Učitel matematiky

Irena Budínová

Vytváření představ základních geometrických pojmů u žáků prvního stupně základní školy

Učitel matematiky, Vol. 25 (2017), No. 2, 65–82

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149093`

VYTVÁŘENÍ PŘEDSTAV ZÁKLADNÍCH GEOMETRICKÝCH POJMŮ U ŽÁKŮ PRVNÍHO STUPNĚ ZÁKLADNÍ ŠKOLY

Irena Budínová

Jedním z prvních témat, kterým se zabývají děti v raném školním nebo předškolním vzdělávání, jsou geometrické útvary. Ještě před započetím školní docházky získávají děti základní informace o geometrických útvarech, které je běžně obklopují. Některé z těchto raných informací mohou vést k nesprávným představám o pojmech a mohou negativně ovlivnit žákovo pozdější chápání daného pojmu. Z tohoto důvodu je důležité rozumět mechanismům, kterými děti rozlišují mezi jednotlivými geometrickými útvary a následně je klasifikují. Jedna ze základních teorií rozvoje geometrického myšlení, která se zabývá schopností dětí klasifikovat geometrické útvary, je van Hielova teorie, která nicméně není dostačující např. pro děti předškolního věku.

Během předškolního vzdělávání, během manipulace s geometrickými útvary či hraním s nimi, mohou děti získávat intuitivní poznatky o geometrických objektech. Jestliže dítě manipulativní fázi v raném dětství neabsolvuje, dochází k absenci intuitivních poznatků, která začne být patrná při zvýšeném požadavku na abstrakci dítěte. Mann (2006) poukazuje na to, že vzdělávání v první etapě primárního vzdělávání, které je nedostatečné či omezené na pamětné osvojení souboru dovedností, vede u mnoha žáků ke ztrátě zájmu o geometrii, která se projeví v pozdějších letech vzdělávání.

Geometrické myšlení

Výuka zaměřená na geometrické útvary v raném dětství je mnohem důležitější, než si většina lidí uvědomuje. V souvislosti s rozvojem schopnosti rozeznávat geometrické útvary jsou uváděny dva tradiční přístupy: **Piagetův přístup** o rozvoji geometrického myšlení v dětství a **van Hieleho přístup**. Piaget ukazuje, že rozvoj geometrického myšlení v dětství probíhá ve dvou fázích. Tento přístup vysvětluje rozeznávání prostředí a útvarů v dětství pomocí topologie[1]. Podle Piageta jsou děti v první fázi schopny poznat známé útvary, toto rozpoznání zahrnuje rovinné útvary. Podle Piageta si děti v této fázi osvojují topologické znalosti, jako zda jsou útvary otevřené, nebo uzavřené, což poznají prostřednictvím senzomotorických aktivit, a umí rozlišit útvary podle topologických vlastností. Podle Piageta (Piaget & Inhelder, 1967) dokážou děti v druhé fázi rozlišit rovinné útvary jako kruh, čtverec, trojúhelník, obdélník a dokážou je od sebe odlišit.

Na druhé straně van Hiele (1986) tvrdí, že rozvoj geometrického myšlení neprobíhá ve dvou fázích jako podle Piageta, ale v pěti oddělených úrovních. Tyto úrovně jsou následující (Tipps, Johnson & Kennedy, 2011; Žilková, 2013):

- **Úroveň 0:** Vizualizace – rozpoznávání a pojmenovávání obrazců.
- **Úroveň 1:** Analýza – popisování vlastností obrazce.
- **Úroveň 2:** Neformální dedukce – klasifikace a třídění obrazců podle vlastností.
- **Úroveň 3:** Dedukce – provádění důkazů za použití vět a definic.
- **Úroveň 4:** Axiomatizace.

První tři úrovně (nultá až druhá) se objevují v průběhu základní školy, třetí a čtvrtá obvykle přichází až později. Nás nyní zajímají první dvě úrovně, které by měly proběhnout v primárním vzdělávání – vizualizace a analýza. Vizualizace začíná v raném dětství a pokračuje na prvním stupni základní školy. Děti poznávají a označují běžné rovinné obrazce jako kruh, čtverec, trojúhelník a obdélník. Poznávají jednoduchá tělesa jako krychle, koule, válec, jehlan, kužel a označují je formálními nebo méně

[1] Topologie je obor matematiky, který studuje takové vlastnosti útvarů, které se nemění při spojitých deformacích. Konkrétně dvojrozměrná topologie studuje vlastnosti objektů, které se nezmění, je-li objekt natištěný na dokonale pružné gumové plachtě, která je potom kroucena a napínána.

formálními jmény jako krabice nebo balón (podle objektů z okolí, které geometrický útvar připomínají). Analýza by měla navazovat v pozdějších ročnících prvního stupně a měla by vycházet z opakovaného manipulování dítěte s danými objekty, kdy dítě začíná intuitivně chápat vlastnosti daného objektu.

Van Hieleho kroky jsou, obdobně jako Piagetovy, také postupné a úspěch na určité úrovni závisí na vlastnostech geometrického myšlení v předchozí úrovni (Aktas Arnas & Aslan, 2010). Nicméně podle van Hieleho (1986) je Piagetova teorie geometrického myšlení vývojová teorie a ne vzdělávací teorie. Piaget se nezajímal o to, jak mohou být děti podporovány v posunu od jedné úrovně k druhé. Navíc van Hiele upozorňuje na to, že potřebujeme více než dvě úrovně k vysvětlení rozvoje geometrického myšlení.

Pro van Hieleho (1986) je první úroveň geometrického myšlení úroveň vizuální. Na této úrovni vnímají děti útvary v celku a klasifikují je porovnáváním s **prototypem**. Tato úroveň zahrnuje první dva roky primárního vzdělávání. Děti na této úrovni nevěnují pozornost definování vlastností útvarů, jako jsou hrany nebo vrcholy. Když dítě začne definovat geometrické útvary podle jejich vlastností, jako je počet stran (příp. hran v případě 3D objektů) nebo vrcholů, nachází se na druhé úrovni geometrického myšlení, což je analýza (Hannibal & Clements, 2000). Děti dosahují této úrovně v 3. až 4. ročníku primárního vzdělávání (Aktas Arnas & Aslan, 2010).

Geometrický obrázek je reprezentace nějakého abstraktního pojmu, jako je např. trojúhelník. Malé děti mají problémy propojit různé reprezentace stejného geometrického pojmu. Navíc mají sklony řídit se podle určité prototypické reprezentace. Děti užívají prototypy ke kategorizaci útvarů (Hershkowitz, 1989, cit. podle Dindyal, 2015). To může být, přinejmenším částečně, důsledkem geometrických zkušeností, které děti získají ve svých hodinách matematiky, nebo které viděly v běžných učebnicích.

Tsamir et al. (2015, cit. podle Dindyal, 2015) poukazuje, že nejdříve jsou osvojeny **ideální příklady** (prototypy), a velice často je to nějaký netypický rys (např. velikost nebo orientace), který přispívá k vytvoření prototypického příkladu. Děti mohou mít různé představy pro tentýž pojem. Malým dětem může použití několika pozitivních a negativních příkladů pomoci získat pevnější pochopení geometrického pojmu, a to i na úrovni vizualizace.

Giaquinto (2007) se na utváření geometrických pojmů dívá z pohledu vnímání různých objektů jedincem. Naše počáteční geometrické představy závisí podle něj na tom, jak vnímáme dané útvary. V rámci geometrického pojmu máme určité základní dispozice pro vytváření představ. Tyto dispozice mohou být spuštěny zkušenostmi s tím, co vidíme nebo co si představujeme, a když to děláme, vytváříme si **geometrickou představu**. Představy utvářené touto cestou konstituují znalost, totiž syntetickou *a priori* znalost, za předpokladu, že dispozice k vytváření představ jsou spolehlivé.

Giaquinto (2007) upozorňuje, že vnímání objektu nebo obrázku může být zásadně ovlivněno jeho orientací. Velmi známý příklad, který byl poprvé diskutován Ernstem Machem, je případ čtverce – kosočtverce. Čtverec s horizontálně umístěnou stranou je vnímán jako čtverec, ale čtverec stojící vertikálně na vrcholu není vnímán jako čtverec, nýbrž jako kosočtverec.

Dále Giaquinto (2007) rozlišuje mezi **percepčním pojmem** a samotným **pojmem**. Schopnost usuzovat např. o čtvercích je odlišná od schopnosti rozpoznat percepčně „něco jako čtverec“. Schopnost zdůvodňovat vlastnosti čtverců vyžaduje, aby jedinec měl vytvořen pojem čtverce. Pojem nějakého objektu nemůže být zaměňován s percepční kategorií specifikace tohoto objektu. Ale viditelné vlastnosti jsou těsně spjaty s percepcí. Než se vytvoří geometrický pojem čtverce, vytvoří se nejdříve percepční pojem čtverce.

Můžeme shrnout, že si žáci pozorováním určitých zákonitostí kolem sebe vytvářejí představu pojmu. Podle své zkušenosti a pozorování vyslovují tvrzení pro různé jevy a jejich podstatu. Žák si vytváří představu na základě svého pozorování, která zastupuje geometrický pojem. Rozdíl mezi představou a pojmem je komplikovaný kvůli faktu, že představa určitého konceptu může vypadat jako „obraz“ konceptu. Jelikož obraz a jeho pojem nejsou totéž, a obvykle obraz ukazuje jen jeden pohled na objekt, obdobně představa pojmu reprezentuje pouze částečně svůj objekt. Můžeme tedy říci, že pojem vznikající na základě zkušenosti se nemusí utvářet zcela správně vzhledem k objektivnímu pojetí pojmu.

Koncepce žákovského poznávacího procesu Hejného a Kuřiny vychází z předpokladu, že „v poznávacím procesu žáci obvykle nejprve porozumí několika konkrétním příkladům, všímají si společných vlastností, později zobecňují a nakonec přichází abstrakce“ (Hejný & Kuřina, 2001: s. 128). Tento poznávací proces se týká pojmotvorného procesu u abstrakt, k němuž dochází pomocí jiného procesu zaměřeného na pochopení konkrét, u nichž není zapotřebí taková míra zobecnění. Původní myšlenka M. Hejného byla rozšířena a prohloubena a vyústila do současné podoby tzv. **teorie generického modelu** (Hejný, 2014). Poznávací proces je v ní rozdělen do pěti etap a následné krystalizace:

> Motivace ⇒ izolované modely ⇒ generické modely procesuální ⇒ generické modely konceptuální ⇒ abstraktní znalosti ⇒ krystalizace

Ve 4. ročníku se v oblasti geometrického myšlení nacházíme na hladině izolovaných modelů. Žáci se potřebují setkávat s příklady a protipříklady geometrických pojmů, aby si utvářeli správné představy, aby správně zobecňovali a nenastávaly chyby v přechodu od izolovaných modelů ke generickým modelům.

V českém prostředí se dlouhodobě výukou geometrie na ZŠ zabývají různí výzkumníci. Např. Kuřina dává geometrii do kontextu s uměním a kresbou (Kuřina et al., 2009) a rovněž se zabývá dělením roviny a prostoru (Kuřina & Půlpán, 2006). Jirotková se zabývá rozvojem geometrického myšlení. V oblasti vytváření pojmů uvádí ve shodě s přístupem Hejného, že na počátku budování matematického poznatku musí být motivace a následuje dlouhá etapa izolovaných modelů. Čím víc různorodých modelů dítě pozná, tím pevnější je jeho výsledné poznání (Jirotková, 2010: s. 20). Mezi izolovanými modely by se měly dle Jirotkové (2010) objevovat také modely překvapivé, zdánlivé a ne-modely. Zejména ne-modely jsou dle mého názoru ve výuce velmi důležité. Pokud si má žák utvářet představu čtverce, potřebuje také model ne-čtverce (např. kosočtverec). Kupčáková (2001) dělí „dětskou geometrii“ do několika okruhů: pozorování trojrozměrného světa, dětská kresba, dětská stereometrie a dětská planimetrie. Nemá se dle ní jednat o axiomatický systém výstavby geometrie.

V české didaktice geometrie se v posledních letech setkáváme s proměnami chápání výuky geometrie. Zatímco dřívější východisko výuky geometrie bylo v podstatě axiomatické, dnes se žák má od 1. třídy setkávat se skutečnou geometrií a ne vymyšlenou, tj. ve výuce se má vycházet z jevů a objektů, které potkává ve skutečném životě. Pojmy nemají být definovány, žák má postupně objevovat vlastnosti útvarů na základě své manipulativní činnosti. Důležité je, aby při tom využíval zrak i hmat. Přirozenější je pro žáka začít s prostorovými objekty nežli rovinnými. Marie Kupčáková uvádí, že „od 1. období (1. stupně ZŠ) může učitel bez omezení představovat a správně pojmenovávat základní prostorové útvary, kterými jsou krychle, kvádr, jehlan, koule, válec, kužel. Použije při tom různé metody i formy práce, stále však dbá na to, aby každé dítě mělo možnost dosyta vnímat tělesa zrakem i hmatem, spolu s jejich pojmenováním“ (Fuchs & Zelendová, 2015: s. 76). Později na 1. stupni může žák pracovat i s rovinnými útvary, jako jsou čtverec, kosočtverec, obdélník, kosodélník, lichoběžník, trojúhelník, mnohoúhelník (Fuchs & Zelendová, 2015). Podstatné je, aby žák prováděl konkrétní manipulativní činnosti pro objevování geometrických útvarů (Fuchs & Zelendová, 2015).

Mnoho učitelů a žáků se dnes setká s výukou matematiky podle metody M. Hejného. Vyučování matematice orientované na budování schémat dle metody M. Hejného je založeno na matematických prostředích, která žákům mimo jiné umožňují samostatně odhalovat matematické myšlenky (Hejný, 2014). Prostředí pro 2D geometrii jsou: dřívka, parkety, tangramy, geoboardy, čtverečkovaný papír. Prostředí pro 3D geometrii jsou: krychlové stavby, sítě krychle, geometrická tělesa. Žák se od 1. ročníku ZŠ průběžně setkává s jednotlivými prostředími. Podstatná je přitom manipulace s pomůckami, která žákům pomáhá rozvíjet geometrické myšlení.

V České republice máme dále nezanedbatelný počet škol s alternativními metodami, jako je daltonský plán či Montessori pedagogika. Školy s daltonským plánem obvykle zařazují do výuky větší množství projektové výuky a samostatné skupinové práce. Montessori pedagogika je od mateřské školy založena na poznávání světa pomocí všech smyslů. Žáci se zde v geometrii od mateřské školy setkávají s modely těles i rovinných útvarů, které se učí pojmenovat a manipulují s nimi.

Přestože ve vnímání výuky geometrie došlo k výraznému posunu, reálná výuka je v některých případech velmi setrvačná. Setkáváme se potom s případy, kdy učitelé setrvávají na zažitých způsobech výuky. Důsledky potom sledujeme na všech úrovních žákovského geometrického myšlení, včetně vytváření představ o geometrických pojmech.

Geometrie 1. stupně v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání

V Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (RVP ZV) se setkáme s následující charakteristikou okruhu Geometrie (MŠMT, 2013: s. 26)[2]: „V tematickém okruhu Geometrie v rovině a v prostoru žáci určují a znázorňují geometrické útvary a geometricky modelují reálné situace, hledají podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují všude kolem nás, . . . “ Očekávané výstupy pro 1. období jsou „M-3-3-01 rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa; nachází v realitě jejich reprezentaci“ a pro 2. období „M-5-3-01 narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici); užívá jednoduché konstrukce“ (MŠMT, 2013: s. 28).

Ve Standardech pro základní vzdělávání (2013) najdeme k danému očekávanému výstupu M-5-3-01 indikátory:

1. Žák rozezná základní rovinné útvary (kruh, čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici) nezávisle na jejich natočení, velikosti nebo označení.
2. Žák určí rovinné útvary pomocí počtu vrcholů a stran, rovnoběžnosti a kolmosti stran.

[2]Budu se omezovat pouze na pasáže týkající se rozpoznávání či znázorňování geometrických útvarů.

Podrobnější informace k indikátorům najdeme v Metodických komentářích ke Standardům ZV (Fuchs & Zelendová, 2015).

Z van Hieleho teorie vyplývá, že již během čtvrtého ročníku by se žáci měli dostat na úroveň analýzy, tj. být schopni uvažovat o vlastnostech daného útvaru. Pokud žák v rámci indikátoru 1 rozezná např. čtverec, není zřejmé, zda se rozhodoval pouze na základě vizuálních atributů, nebo zvažoval i jeho vlastnosti.

Indikátor 2 již vyžaduje, aby se žák nacházel na úrovni analýzy. Přechod na úroveň analýzy vyžaduje, aby se žákovské představy o geometrických pojmech formovaly správně. V opačném případě žák buď zůstává na úrovni vizualizace, nebo se utvrzuje ve svých mylných představách a ty používá i na úrovni analýzy. Čím více je mylná představa ustálena v pojmotvorném procesu, tím obtížněji se odstraňuje.

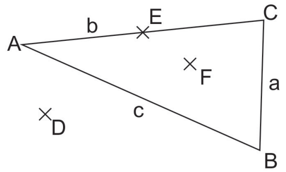
Výzkum vytváření představ o geometrických pojmech u žáků 4. ročníku

Výzkumu se účastnily čtyři brněnské základní školy s celkovým počtem žáků 226. Jednalo se o 11 čtvrtých tříd. Ačkoli nebyl žádný záměr vybrat školy se společnou specifikací, všechny třídy vnímám jako třídy s alternativním přístupem. Pět tříd postupovalo podle daltonského plánu, pět tříd bylo klasických, avšak postupovalo podle Hejného metody, jedna třída byla Montessori.

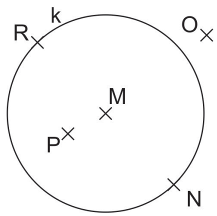
Žáci plnili test sestávající z 11 geometrických úkolů. Test byl sestaven mými kolegyněmi z Katolické univerzity v Ružomberoku (Kopáčová & Žilková, 2015, 2016). S jednotlivými úlohami bude čtenář seznámen průběžně. Pouze pro rámcový přehled nyní uvedu znění úloh bez obrázků (s výjimkou úloh 6, 7, 8):

1. Ke každému útvaru napiš jeho správný název.
2. Je útvar na obrázku čtverec?
3. Rozhodni, které z následujících útvarů jsou trojúhelníky.
4. Zakroužkuj, které z následujících útvarů nejsou obdélníky.
5. Zakroužkuj, které z následujících útvarů nejsou kruhy.
6. Podle obrázku doplň:
   a) body, které patří trojúhelníku ABC,

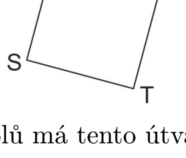
b) vrcholy trojúhelníku ABC,
c) strany trojúhelníku ABC.



7. Na obrázku je kružnice se středem v bodě M.
   a) Zapiš všechny body, které patří kruhu.
   b) Zapiš všechny body, které patří kružnici.
   c) Zapiš úsečky, které jsou poloměrem kružnice.
   d) Doplň: Průměrem kružnice je úsečka ______.



8. Rozhodni, zda je pravda:
   a) Úsečka RT je stranou čtverce.
   b) Strana SU je úhlopříčka čtverce.
   c) Strany RU a RT jsou sousední.
   d) Strany SR a TU jsou protilehlé.
   e) Strany ST a TU mají různou délku.
   f) Protilehlé strany ve čtverci mají různou délku.
   g) Úsečky SU a SR mají stejnou délku.



9. Kolik stran a vrcholů má tento útvar?

10. Zakresli libovolný trojúhelník, čtverec a pětiúhelník, je-li zadaná jedna jejich strana.
11. Napiš názvy všech čtyřúhelníků, které znáš, a zakresli je do čtvercové sítě.

V rámci prvního příspěvku ze seriálu tří příspěvků se budeme zabývat Úlohou 1, vztahující se k rozpoznávání základních geometrických útvarů. V druhém dílu se zaměříme na úlohy vztahující se ke čtverci a obdélníku a ve třetím dílu úlohami o trojúhelníku a kruhu.

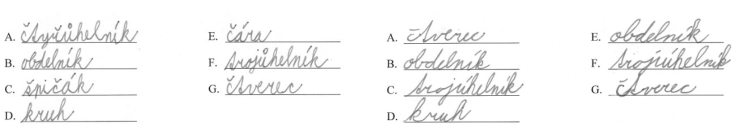
Budeme postupně sledovat žákovo geometrické myšlení a pokusíme se o popis fenoménů, které charakterizují žáka v jisté etapě jeho geometrického vývoje. V testu bylo možno získat maximálně 93 bodů. Průměr všech žáků byl 73,6 bodů se směrodatnou odchylkou 9,9. Celkové výsledky pro třídy jsou uvedeny v tab. 1.

Třída	**Počet žáků**	**Průměr bodů**	**Směrodatná odchylka**
Montessori (1)	19	86,0	3,4
Klasika, Hejný (2)	24	79,7	2,9
Klasika, Hejný (3)	20	77,5	6,2
Dalton (4)	24	76,0	6,1
Dalton (5)	16	74,9	7,8
Dalton (6)	25	74,7	5,9
Klasika, Hejný (7)	20	71,5	7,6
Dalton (8)	21	71,1	12,3
Dalton (9)	16	66,9	11,0
Klasika, Hejný (10)	20	66,2	9,9
Klasika, Hejný (11)	22	62,8	7,7

Tab. 1

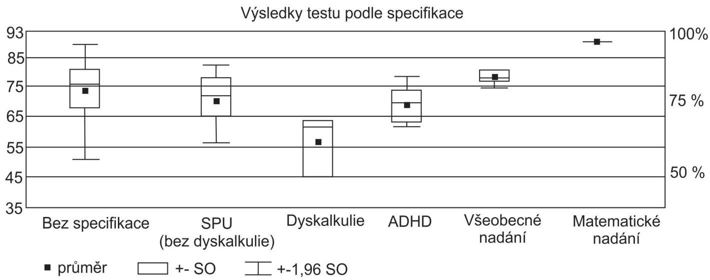
Úspěšnost se v jednotlivých třídách značně liší, a platí to i o třídách v rámci jedné školy. Pokud jsem měla možnost vypozorovat, v nejúspěšnějších třech třídách se používá velké množství pomůcek. Montessori pedagogika je založena na manipulaci s pomůckami, žáci se s nimi setkávají prakticky v každé hodině, jsou zvyklí klasifikovat zalaminované modely rovinných útvarů, pracují s provázkem, špejlemi, tělesy, čtou si geometrické pohádky. Geometrie je zařazována minimálně jednou týdně. Rovněž učitelka z druhé nejúspěšnější třídy používá velké množství pomůcek – dřívka, krychlové stavby, rovinné útvary, parkety, skládání papíru, sítě krychle, geodesky, čtvercovou mříž. Od 3. ročníku se přidává rýsování. Mezi méně úspěšnými byly ty třídy, jejichž učitelky používají klasické geometrické pomůcky, jako jsou pravítko a kružítko, jejichž učitelky vůbec neodpověděly na otázku, jak často geometrii vyučují a jaké používají pomůcky, ale také třídy, v nichž se učitelky velice snaží ukazovat geometrii z různých úhlů pohledu, avšak ve třídě je velká kumulace sociálně znevýhodněných dětí.

Ve vzorku bylo 182 žáků bez specifikace, 27 žáků se specifickými poruchami učení, z toho 3 žáci s dyskalkulií, 9 žáků s ADHD, 6 žáků se všeobecným nadáním, 2 žáci s matematickým nadáním. Výrazně odlišné byly výsledky dvou matematicky nadaných žáků (jejich identifikace proběhla jen podle toho, že postupují podle učebnice šestého ročníku, o svém nadání nemají žádný dokument), kteří měli v testu úspěšnost téměř 100 %. Na druhou stranu všeobecně nadaní žáci a žáci se specifickými vzdělávacími potřebami nijak výrazně nevybočovali. Lze konstatovat, že např. žáci s dyslexií, dysgrafií, či žáci s ADHD měli horší úpravu písma, leckdy psali špatně slova (např. kruch místo kruh), avšak svými geometrickými poznatky byli mnohdy nadprůměrní. Na obr. 1 je ukázka řešení žáků Úlohy 1, jejíž zadání nalezne čtenář níže. Na něm můžeme vidět, že žáci se specifikací i bez ní dělali různé chyby jak v označení útvarů, tak v jejich zápisu.



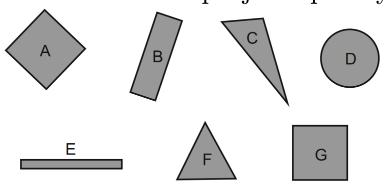
Obr. 1: Ukázka žákovských řešení (Úloha 1). Vlevo žák bez uvedené specifikace, vpravo žákyně s ADHD a dysortografií

Výrazně nižší byly výsledky žáků s dyskalkulií. Porovnání jednotlivých skupin podle výsledků je na obr. 2.



Obr. 2: Výsledky testu podle specifikace – krabicový diagram

Úloha 1. Ke každému útvaru napiš jeho správný název.



Výsledky úlohy 1.

Úkol	**Úspěšnost (v %)**
1 A	53,5
1 B	96,4
1 C	86,3
1 D	96,0
1 E	86,7
1 F	99,1
1 G	99,6

Tab. 2

Jak je z tabulky patrné, téměř stoprocentní úspěšnost měly útvary F a G. Jedná se o prototypy trojúhelníku a čtverce, se kterými se nejčastěji setkáváme v různých učebních textech. Porovnáme-li výsledky úloh 1F a 1C, je vidět, že otočený tupoúhlý model trojúhelníku pro některé žáky není zástupcem pojmu trojúhelník. V tomto případě není možné usuzovat, zda to bylo spíše otočení nebo „tupoúhlost“, která žáky zmátla, anebo je to proto, že už od mateřské školy je dětem předkládán pouze rovnostranný trojúhelník jako jediný reprezentant trojúhelníků.

Ještě markantnější rozdíl je u úloh 1G a 1A, kdy pouhým otočením čtverce klesla úspěšnost jeho označení z téměř 100 % na o trochu více než 50 %. Velké procento žáků (38,5 %) označilo útvar A jako kosočtverec. Podíváme-li se do standardů, pojem kosočtverec se zde vůbec nevyskytuje. Nově se setkáváme s pojmem kosočtverec a dalšími čtyřúhelníky na 1. stupni ZŠ v Metodických komentářích ke Standardům ZV (Fuchs & Zelendová, 2015). Většina žáků termín kosočtverec zná, mnozí mu ale přisuzují nesprávný význam. Domnívají se, že otočením se z čtverce stane kosočtverec, nebo v otočeném čtverci skutečně kosočtverec vidí. Žáci se v běžném životě setkávají s výrazem „na koso“, což znamená „šikmo“. Odtud může pramenit desinterpretace termínu kosočtverec.

Žáci čtvrtého ročníku by neměli pojmy čtverec a kosočtverec vnímat hierarchicky (čtverec je speciální případ kosočtverce), ale měli by tyto pojmy striktně odlišovat. Jedna z možných klasifikací čtyřúhelníků je uvedena na obr. 3.

Obr. 3: Klasifikace čtyřúhelníků

Čtverec a kosočtverec jsou čtyřúhelníky s odlišnými vlastnostmi. Žáci 4. ročníku by neměli čtverec chápat jako speciální případ kosočtverce, a už vůbec ne kosočtverec chápat jako případ čtverce – což se stávalo, jak později uvidíme ve výsledcích dalších úloh.

Velmi výrazně se v úkolu 1A a 1C odlišovali žáci dvou nejúspěšnějších tříd od jiných tříd (tab. 3).

Třída	**Úspěšnost (v %)**						
	1A	**1B**	**1C**	**1D**	**1E**	**1F**	**1G**
Montessori (1)	100	100	100	100	100	100	100
Klasika, Hejný (2)	83	100	100	100	100	100	100

Tab. 3

Ani jeden žák z Montessori třídy neoznačil čtverec A jako kosočtverec. Žáci v této třídě jsou zvyklí třídit zalaminované útvary. Leží-li před nimi různě pootočené čtverce a kosočtverce, musí být schopni podle nějakého ukazatele rozlišit jednotlivé útvary. To je nutí zabývat se vlastnostmi jednotlivých útvarů.

V případě útvaru E byla nižší úspěšnost dána neobvyklým tvarem, kdy útvar žákům někdy připomínal spíše čáru než obdélník.

Žáci velmi často chybovali v zápisu slov obdélník, čtyřúhelník, trojúhelník, což je vidět také na obr. 1. Důvodem je to, že nechápou předponu a uniká jim základ slova. I těmto aspektům je třeba v geometrii věnovat pozornost.

Žáci v ojedinělých případech pro některé útvary používali velmi zajímavé názvy. 1B: kosoobdélník, 1C: kosotrojúhelník, špičák, 1D: koule, kolečko, kolo, válec, 1E: čára, kvádr, 1F: jehlan. Častá byla záměna 2D za 3D objekty (kruhu za kouli či válec, trojúhelníku za jehlan, obdélníku za kvádr). Žáci měli být od učitele poučeni, že se jedná o rovinné objekty. Pokud se tak nestalo, může žák útvar chápat také jako znázorněný prostorový útvar.

Závěr a doporučení

Z výsledku prvního úkolu testu jsme viděli, že žáci pojem mnohdy chápou prototypicky a otočení či změna velikosti nebo tvaru způsobí, že žák nedokáže útvar správně pojmenovat. U mnohých žáků je patrné setrvání na úrovni vizualizace, kdy útvar posuzují čistě podle toho, jak na ně působí. V rámci první úlohy jsme se setkali s následujícími typickými fenomény geometrického myšlení žáků 4. ročníku:

- Mnoho žáků chápe geometrické pojmy prototypicky.
- Setkáváme se s jevem, kdy žáci chápou otočený čtverec jako kosočtverec. V tomto případě by se žáci měli setkávat s příklady a protipříklady čtverců a diskutovat jejich vlastnosti, jako jsou shodnost stran a shodnost úhlů.
- Žáci nezapisují správně slova obdélník, trojúhelník, čtyřúhelník (žáci nejčastěji volí „obdelník“, dále „trojuhelník“ či „trojůhelník“ apod.). Měli by být na tuto skutečnost upozorněni a z hlediska českého jazyka by jim mělo být sděleno, jaká je podstata slova.

Žáci by se ve výuce geometrie měli setkat s co největším množstvím izolovaných modelů daného pojmu. Kromě tradičních úloh, se kterými se ve školách setkáváme, jako je rýsování trojúhelníku či čtverce, by se měli setkávat s problémově zadávanými úkoly, které je nutí přesouvat se na vyšší úroveň geometrického myšlení. Příkladem může být klasifikace geometrických útvarů, které si žáci mohou sami narýsovat, vybarvit, vystříhat a zalaminovat. Třídění a klasifikování vyžaduje postupné zvažování vlastností geometrických útvarů.

Ve výuce geometrie by měly být žákům nabízeny vhodné manipulativní činnosti, které umožní žákům rozvíjet geometrické myšlení v nejširším slova smyslu.

Literatura

[1] Arnas Aktas, Y. & Aslan, A. G. D. (2010). *Children's Classification of Geometric Shapes.* Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi.

[2] Dindyal, J. (2015). Geometry in the early years: a commentary. *ZDM Mathematical Education*, 47(3), 519–529.

[3] Duval, R. (1999). Representation, vision and visualisation: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt, & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematic Education* (3–26). Columbus: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Enviromental Education.

[4] Fuchs, E. & Zelendová, E. (2015). *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání.* Praha: NÚV. Dostupné z `http://clanky.rvp.cz/wp-content/upload/prilohy/20617/matematika.pdf`

[5] Giaquinto, M. (2007). *Visual Thinking in Mathematics. An epistemological study.* Oxford: University Press.

[6] Hannibal, M. A. Z. & Clements, D. H. (2000). *Young children's understanding of basic geometric shapes.* National Science Foundation, Grant number: ESI-8954644.

[7] Hejný, M. & Kuřina, F. (2001). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* Vyd. 1. Praha: Portál.

[8] Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

[9] Hershkowitz, R. (1989). Visualisation in geometry: two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61–67.

[10] Jirotková, D. (2010). *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

[11] Kopáčová, J. & Žilková, K. (2015). Developing children's language and reasoning about geometrical shapes – a case study. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *International Symposium. Elementary Maths Teaching.* Prague: Charles University, Faculty of Education.

[12] Kopáčová, J. & Žilková, K. (2016). Predstavy a milné predstavy žiakov o obdĺžnikoch. In, *Studia Scientifica Fecultatis Paedagogicae Universitas Catholica Ružomberok.* Ružomberok: Verbum.

[13] Kupčáková, M. (2001). *Geometrie ve světě dětí i dospělých.* Hradec Králové: Gaudeamus.

[14] Kuřina, F. & Půlpán, Z. (2006). *Podivuhodný svět elementární matematiky.* Praha: Academia.

[15] Kuřina, F., et al (2009). *Matematika a porozumění světu.* Praha: Academia.

[16] Mann, E. L. (2006). Creativity: The Essence of Mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30(2), 236–260.

[17] MŠMT.cz. (2013). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* Dostupné z `http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/upraveny-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani`

[18] MŠMT.cz. (2013). *Standardy pro základní vzdělávání. Matematika a její aplikace.* Dostupné z `http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/opatreni-ministra-skolstvi-mladeze-a-telovychovy-kterym-se-4`

[19] Piaget, J. & Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space.* New York: W. W. Norton.

[20] Tipps, S., Johnson, A. & Kennedy, L. M. (2011). *Guiding Children's Learning of Mathematics.* Wadsworth: Cengage Learning.

[21] Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R. & Tabach, M. (2015). Early years teachers‘ concept images and concept definitions: triangles, circles, and cylinders. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 497–509.

[22] van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: a theory of mathematics education.* Orlando: Academic Press.

[23] Žilková, K. (2013). *Teória a prax geometrických manipulácií v primárnom vzdelávání.* Praha: Powerprint.

Abstract

Geometric shapes are one of the first subjects in mathematics education during the early stage of elementary school. Even before

entering formal schooling, children gain some basic information about geometric shapes through their everyday experience. Children form conceptions about the concepts on the basis of their experience. Some of these early conceptions about geometric shapes might be incorrect, which might negatively impact children's further understanding of geometric shapes. For that reason, exploring how children recognize and classify geometric shapes is important in determining the content of early mathematics education. Developing geometric thinking is a long-term path and requires an informal encounter of pupils with geometric concepts and their properties. The first years of education are really essential because intuitive perceiving of the world is developed. In this study, we show some ways of forming conceptions of the basic geometric shapes in children of the fourth grade.

Irena Budínová
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity
Poříčí 31
603 00 Brno
e-mail: irena.budinova@seznam.cz