Milada Kočandrlová

Trojúhelníčková konstrukce elipsy

Učitel matematiky, Vol. 25 (2017), No. 1, 1–8

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149084`

TROJÚHELNÍČKOVÉ KONSTRUKCE ELIPSY

Milada Kočandrlová

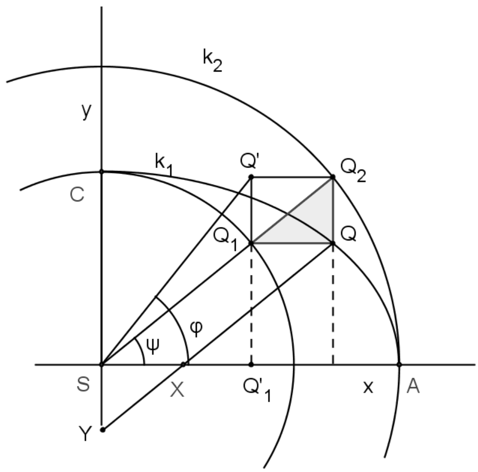
1. Trojúhelníčková konstrukce elipsy z vrcholových kružnic

Na obr. 1 jsou dané dvě soustředné kružnice $k_1(S,b)$, $k_2(S,a)$. Body Q_1, Q_2 jejich společného poloměru (po řadě) vedeme rovnoběžky s osami x,y soustavy souřadnic S,x,y. Průsečík Q obou rovnoběžek s body Q_1,Q_2 určují pravoúhlý trojúhelník. Otáčíme-li poloměr SQ_2 kolem středu S, vytvoří vrchol Q trojúhelníka Q_1Q_2Q elipsu. To je známá trojúhelníčková konstrukce elipsy z vrcholových kružnice k_1,k_2. Elipsa má střed S a poloosy a,b. Snadno to ukážeme, označíme-li ψ odchylku poloměru SQ_2 od hlavní osy $SA=x$ elipsy. Pro bod Q z obr. 1 dostáváme

$$Q = Q(\psi) = [a\cos\psi, b\sin\psi]\,. \tag{1}$$

Umocníme-li rovnice souřadnic $\frac{x}{a}=\cos\psi$, $\frac{y}{b}=\sin\psi$ bodu Q na druhou a sečteme, pak dostaneme známou středovou rovnici elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Úhel ψ je parametr v parametrickém vyjádření (1) elipsy.

Z trojúhelníčkové konstrukce dostáváme **proužkovou konstrukci** (tzv. malou) elipsy. Na „proužku“ v obr. 1 vyznačíme body Q,X,Y. Proužkem pohybujeme tak, aby bod X byl stále na hlavní ose x a zároveň bod Y se pohybuje po vedlejší ose y. Třetí bod Q vytváří elipsu. Z rovnoběžníků SQ_2QY a SQ_1QX je $|QY|=a$, $|QX|=b$.



Obr. 1: Trojúhelníčková konstrukce elipsy z vrcholových kružnic

Na obr. 1 vidíme, že parametr ψ ve vyjádření (1) není s bodem Q „spojen“ přímo, ale prostřednictvím přepony Q_1Q_2. V některých výpočtech potřebujeme takový úhel, na jehož rameni je přímo bod Q. Proto v obr. 1 doplníme trojúhelník Q_1QQ_2 na obdélník Q_1QQ_2Q'. Úhel ASQ' označíme φ. Vztah mezi úhly φ, ψ (v geodézii to je geodetická a redukovaná šířka na referenčním elipsoidu) je vidět z trojúhelníků $SQ_1'Q'$ a $SQ_1'Q_1$:

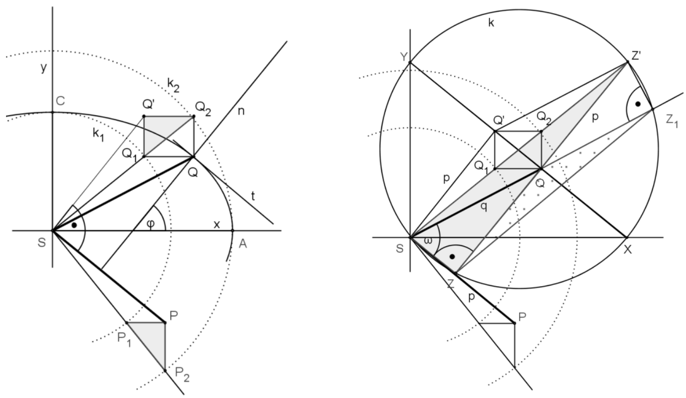
$$\tan\varphi = \frac{a}{b}\tan\psi. \tag{2}$$

Dosazením (2) do (1) dostaneme nové vyjádření bodů elipsy pomocí úhlu φ

$$Q = Q(\varphi) = \left[\frac{a^2\cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}, \frac{b^2\sin\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}\right]. \tag{3}$$

Nyní ukážeme, že přepona SQ' v trojúhelníku $SQ_1'Q'$ je rovnoběžná s normálou elipsy, tj. úhel φ je odchylka normály elipsy v bodě Q od její hlavní osy. Tak bude nový parametr φ ve (3) přímo spojen s bodem elipsy.

V obr. 2a jsou ke koncovým bodům P_2, Q_2 kolmých poloměrů kružnice k_2 sestrojeny trojúhelníčkovou konstrukcí body P, Q. Poloměry PS, QS určují sdružené průměry elipsy. Tečna t elipsy v bodě Q je rovnoběžná s průměrem SP. Trojúhelník SQ_2Q' je otočený trojúhelník SP_2P kolem bodu S o devadesát stupňů. Tudíž přímka SQ' je kolmá na přímku SP a také na tečnu t v bodě Q. Normála n elipsy v bodě Q je rovnoběžná s přímkou SQ', její odchylka od osy x je φ.



(a) Normála elipsy (b) Apolloniův vzorec

Obr. 2

Apolloniova věta o sdružených poloměrech elipsy (viz Hruša, 1935) nám objasní bodovou konstrukci elipsy. Hruša pro její zdůvodnění používá kosinovou větu, nám postačí věta Pythagorova.

Jsou-li a, b poloosy a p, q poloměry sdružených průměrů elipsy, pak platí Apolloniův vzorec

$$a^2 + b^2 = p^2 + q^2. \tag{4}$$

V obr. 2b úhlopříčka QQ' obdélníka Q_1QQ_2Q' protíná osy elipsy v bodech X, Y, $|YQ| = |XQ'| = a$, $|YQ'| = |XQ| = b$. To je velká proužková konstrukce elipsy. Proužek je určen body X, Y, Q. Abychom ozřejmili vzorec (4), sestrojíme nad průměrem XY kružnici k. Pro mocnost bodu Q ke kružnici k platí

$$|QY| \cdot |QX| = |QZ'| \cdot |QZ|. \tag{5}$$

Čtyřúhelník $SQZ'Q'$ je rovnoběžník, proto $|QZ'| = |SQ'| = |SP| = p$. Z pravoúhlého trojúhelníku SZQ je $|QZ| = q \sin \omega$, kde ω jsme označili odchylku sdružených průměrů SP, SQ. Potom dosazením do (5) dostáváme

$$ab = pq \sin \omega. \tag{6}$$

Z Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku SZZ' je

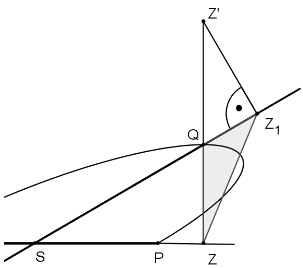
$$q^2 \cos^2 \omega + (p + q \sin \omega)^2 = (a + b)^2.$$

Po úpravě

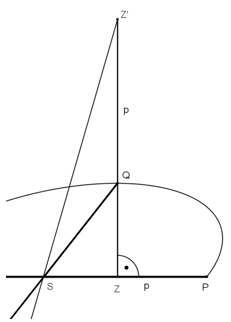
$$(a + b)^2 = q^2 + p^2 + 2pq \sin \omega.$$

Po dosazení (6) dostáváme tvrzení (4).

Z Apolloniovy věty a obr. 2b dostáváme bodovou konstrukci elipsy dané sdruženými průměry SP, SQ. Vrchol Z_1 pravého úhlu nad průměrem SZ' a body Q, Z určují trojúhelník QZZ_1, obr. 2b. Pohybuje-li se trojúhelník QZZ_1 tak, že vrchol Z je na průměru SP a vrchol Z_1 na průměru SQ, pak vrchol Q vytvoří elipsu, obr. 3a.



(a) Body elipsy ze sdružených průměrů



(b) Proužková konstrukce

Obr. 3

Z obr. 2b dostáváme také **proužkovou konstrukci elipsy dané sdruženými průměry** SP, SQ, obr. 3b (také viz Kaufmann, 1930). Bodem Q sestrojíme kolmici na průměr SP. Její patu označíme Z. Na polopřímce ZQ určíme bod Z' tak, aby $|QZ'| = |SP| = p$. Přímky SP a SZ' jsou řídícími přímkami pro „proužek“ $Z'QZ$. Bod Z' se pohybuje po přímce SZ' a bod Z se pohybuje po přímce SP. Bod Q při tomto pohybu určuje elipsu.

2. Trojúhelníčková konstrukce elipsy ze sdružených průměrů

Pro elipsu danou sdruženými průměry popíšeme trojúhelníčkovou konstrukci. Vyjdeme přitom z parametrického vyjádření elipsy (viz Maleček, 1995)

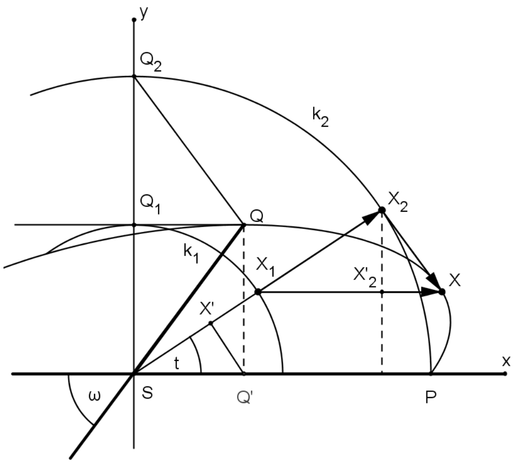
$$X(\tau) = [p\sin\tau + q\cos\omega\cos\tau, q\sin\omega\cos\tau] . \tag{7}$$

Zde $p = |SP|$, $q = |SQ|$ jsou sdružené poloměry, ω odchylka průměrů a parametr τ se měří od osy y kolmé na průměr SP. Abychom odvodili trojúhelníčkovou konstrukci, která v citovaném článku chybí, přepíšeme rovnici (7). Zvolíme $\tau = \frac{\pi}{2} - t$, tj. parametr t odčítáme od osy $x = SP$. Pak místo (7) dostáváme rovnici elipsy ve tvaru

$$X(\tau) = [p\cos\tau + q\cos\omega\sin t, q\sin\omega\sin t] . \tag{8}$$

Sledujme obr. 4 a rovnici (8). Ve vyjádření (8) z druhé souřadnice bodu X vezmeme $q\sin\omega$ za poloměr kružnice k_1. Kružnice má s elipsou, danou sdruženými průměry SP, SQ, společnou tečnu QQ_1. Na kružnici k_1 zvolíme libovolný bod X_1 a úhel PSX_1 označíme t. Potom y-ová souřadnice bodu X_1 je $q\sin\omega\sin t$. Tedy bod X bude ležet na přímce XX_1 rovnoběžné s osou x.

V první souřadnici bodu X ve vyjádření (8) je $p\cos t$ x-ová souřadnice bodu X_2. Bod X_2 je průsečík poloměru SX_1 s kružnicí $k_2(S, p)$. V trojúhelníku SQ_1Q je $q\cos\omega$ odvěsnou Q_1Q. V trojúhelníku $SQ'X'$ je pak přeponou SQ' a odvěsna zde je $|X'Q'| = q\cos\omega\sin t$. Potom $|X_2'X| = |x'Q'|$. Bod X je tedy bodem elipsy dané rovnicí (8).



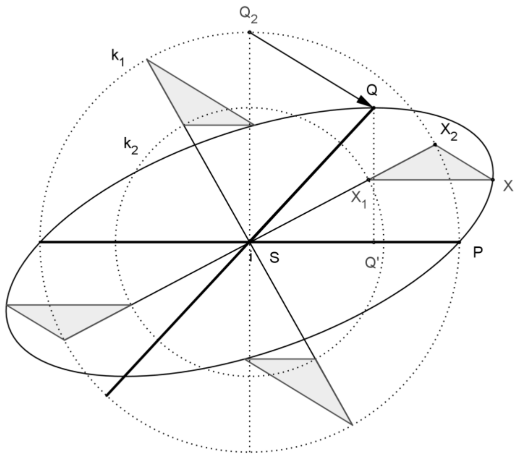
Obr. 4: Parametrizace (8) elipsy dané sdruženými průměry

Dá se ukázat, že body elipsy dané rovnicí (8) jsou výsledkem tří transformací v rovině:

- $X_1 \to X_2$, tj. stejnolehlost kružnic k_1, k_2 se středem S, obr. 4;
- $X_2 \to X$, tj. osová afinita, s osou SP a směrem Q_2Q, mezi kružnicí k_2 a elipsou;
- $X_1 \to X$, tj. osová afinita, s osou jdoucí bodem S rovnoběžně s přímkou QQ_2 a směrem SP, mezi kružnicí k_1 a elipsou.

Trojúhelníčková konstrukce jednotlivých bodů elipsy, dané sdruženými průměry SP, SQ, obr. 5, je potom následující:

1. Body S a Q sestrojíme kolmice na SP. Patu kolmice z Q označíme Q'.
2. Sestrojíme kružnice $k_1(S, |SP|)$, $k_2(S, |QQ'|)$.
3. Zvolíme libovolnou polopřímku s počátečním bodem S. Její průsečíky s oběma kružnicemi označíme X_1, X_2.
4. Bodem X_1 vedeme rovnoběžku s SP. Bodem X_2 vedeme rovnoběžku s Q_2Q. Průsečík obou rovnoběžek je bodem X elipsy.



Obr. 5: Trojúhelníčková konstrukce elipsy ze sdružených průměrů

Analogická bodová konstrukce elipsy ze sdružených průměrů, která využívá podobnosti s kružnicí o středu Q' (viz Jeřábek, 1909), nevychází z rovnice (8) a tím se stává konstrukce značně nepřehledná.

Závěr

V článku jsou shrnuty známé vlastnosti elipsy, které vyplývají z trojúhelníčkové konstrukce z vrcholových kružnic. Tyto vlastnosti jsou dále rozšířené o některé méně známé vlastnosti elipsy, jako např. Apolloniova věta pro sdružené poloměry elipsy. Ve druhé části článku je uvedena trojúhelníčková konstrukce pro elipsu danou sdruženými průměry.

Literatura

[1] Hruša, K. (1935). O jistém vytvoření elipsy. *ČPMF*, 64(1), 6–10.

[2] Jeřábek, V. (1909). O jisté affinní poloze mezi ellipsou a kruhem, *ČPMF*, 38(3), 333–335.

[3] Kaufmann, B. (1930–1). Konstrukce elipsy ze sdružených průměrů. *Rozhledy MF*, 10(2).

[4] Maleček, K. (1995, září). Trojúhelníková konstrukce bodů elipsy a její zobecnění. In *Sborník 15. konference OSGaPG* (24–26).

Abstract

In the first part, we assume well known characteristics of ellipse which are given by triangle construction using main circles. We extend them on some lesser known features like Apolloine theorem of associated radii of the ellipse. In the second part, we assume triangle construction of ellipse given by associated radii.

Milada Kočandrlová
Katedra informatiky BIVS
Nárožní 2600/9
158 00 Praha 5
e-mail: kocandrlova@hotmail.cz