Karolína Mottlová

Prostředí Abaku jako nástroj pro zkoumání myšlenky aditivní triády

Učitel matematiky, Vol. 29 (2021), No. 2, 67–78

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148999`

PROSTŘEDÍ ABAKU JAKO NÁSTROJ PRO ZKOUMÁNÍ MYŠLENKY ADITIVNÍ TRIÁDY

Karolína Mottlová

Úvod

Jedním z cílů vyučování matematice je, aby žák porozuměl aditivním operacím (sčítání a odčítání) a vztahům mezi nimi. Tento a s ním další spojené cíle jsou zpracovány v úlohách v jednom z didaktických prostředí – Abaku[1]. V rámci diplomové práce (Mottlová, 2018) byly tyto úlohy použity jako nástroj k experimentům.

Aditivní triáda

„Aritmetický svět se dítěti otevírá přes operace sčítání a odčítání, tedy přes vztahy $a + b = c$ a $a - b = c \ldots$“ (Hejný, 2014, s. 95). Žák vidí ze začátku tyto operace izolovaně a neuvědomí si, že jsou k sobě inverzní neboli opačné. Úlohy typu „$a + \_ = c$“ žák většinou řeší metodou pokusů a trvá jistou dobu, než dojde k uvědomění, že „$\_ = c - a$“. Tuto didaktickou myšlenku týkající se vztahů mezi sčítáním a odčítáním nazýváme *aditivní triáda* (Hejný, 2014). V zúženém pojetí je aditivní triáda neuspořádaný soubor tří celých nezáporných čísel (a, b, c), z nichž jedno je součtem zbylých dvou, například $a + b = c$ (toto Hejný označuje jako externí aditivní triádu[2]). Je důležité si uvědomit, že na pořadí čísel

[1] Úlohy rozpracované týmem H-mat o.p.s. dle metody Abaku (`https://abaku.org/abaku-ve-skole`).

[2] „Termínem *externí aditivní triáda* rozumíme trojici čísel (a, b, c), z nichž jedno je součtem dalších dvou. Mentální projekci tohoto objektu do vědomí člověka pak nazýváme *interní aditivní triáda*. [. . .] Číselný obor je určen věkem žáků, jejichž myšlenkové procesy analyzujeme.“ (Hejný, 2014, s. 95)

v rámci jedné aditivní triády nezáleží. Jestliže (a, b, c) je aditivní triádou, pak také (a, c, b); (b, a, c); (b, c, a); (c, a, b); (c, b, a) jsou aditivními triádami. Pokud chceme dokázat, že tři čísla jsou aditivní triádou, musíme mezi nimi nalézt aditivní operaci bez ohledu na pořadí čísel, například u aditivní triády $(3, 5, 2)$ je důkazem, že platí: $2 + 3 = 5$; $3 + 2 = 5$; $5 = 2 + 3$; $5 = 3 + 2$; $5 - 2 = 3$; $5 - 3 = 2$; $3 = 5 - 2$; $2 = 5 - 3$. Aditivní triádu můžeme chápat také jako mentální projekci tohoto objektu do vědomí žáka (toto Hejný označuje jako interní aditivní triádu), tzn. jak žák rozumí vztahům mezi třemi čísly.

Aditivní triáda je složena právě ze tří čísel. Situaci, která se již netýká tří, ale čtyř čísel, např.: „$a = b+c+d$“ nebo „$a+b = c+d$“, můžeme nazvat *aditivní kvadriádou.* Například u sčítání tří čísel žák sečte nejprve dvě čísla a k součtu pak přičte číslo třetí. V jedné aditivní kvadriádě jsou tedy obsaženy dvě aditivní triády.

Didaktické prostředí Abaku

Didaktické prostředí s názvem Abaku je inspirováno dvěma přístupy. Jedním z nich je metodika Abaku napsaná Alenou Vávrovou (2015), jež vychází ze hry Abaku vytvořené Vladimírem Tesařem (2015)[3]. Metodika obsahuje popis, nápady a návrhy celých lekcí, které využívají metody Abaku. Druhým přístupem je tzv. „rodinka“ (viz obr. 1, 2 a 3). Jedná se o myšlenku, kterou původně zavedli Pavol Černek a Vladimír Repáš. Tato myšlenka byla použita v úlohách ve slovenských učebnicích (Repášet al., 1997; Černek & Bednářová, 2006; Žabka, Černek & Martiška 2011; Žabka & Černek, 2012).

Prostředí s názvem Abaku bylo využito v učebnicích matematiky pro 1. ročník vydané nakladatelstvím H-mat (Hejný et al., 2018a).

Prostředí je uvedeno plakátem (viz obr. 4).

[3] „Abaku je v základní podobě desková hra s danými pravidly. Hraje se většinou ve dvou hráčích, kteří pokládají kameny na desku tak, aby vytvářeli příklady. Vyhodnocování tahů usnadňuje elektronická verze (`duelovky.cz/abaku` nebo `liga.abaku.cz`).“ (Vávrová, 2015)

Tri čísla tvoria sčítaciu rodinku, ak súčet dvoch z nich sa rovná tretiemu číslu. Sčítaciu rodinku tvoria napríklad čísla 568, 900 a 332, lebo 568 + 332 = 900. Ktoré z nasledujúcich trojíc tvoria sčítaciu rodinku?

47, 26, 21 79, 45, 123 468, 3 562, 3 094

694 557, 299 816, 984 373 56 789, 19 543, 37 246

Obr. 1: Sčítací rodinka (Repáš et al., 1997, s. 4)

Tri čísla tvoria odčítaciu rodinku, ak rozdiel dvoch z nich sa rovná tretiemu číslu. Odčítaciu rodinku tvoria napríklad čísla 568, 900 a 332, lebo 900 – 568 = 332. Ktoré z nasledujúcich trojíc tvoria odčítaciu rodinku?

47, 76, 29 79, 45, 43 478, 572, 94

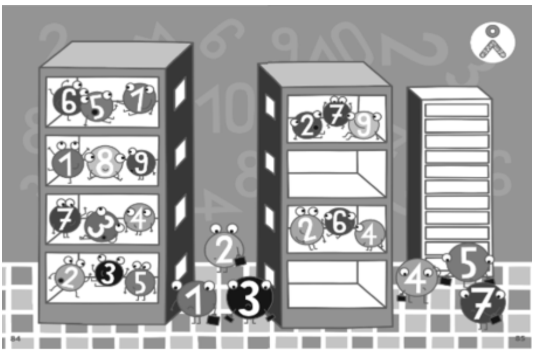
126 789, 39 543, 97 246 23, 79, 56

Obr. 2: Odčítací rodinka (Repáš et al., 1997, s. 5)

7 Nájdite rodinku, ktorá je sčítacia aj odčítacia súčasne.

8 Nájdite rodinku, ktorá je sčítacia, ale nie je odčítacia.

Obr. 3: Propojení myšlenky sčítací a odčítací rodinky (Žabka & Černek, 2011, s. 27)



Obr. 4: Úvodní plakát k prostředí Abaku na první dvoustraně 3. dílu pracovní učebnice (Hejný et al., 2018a, s. 84–85)

Cílem plakátu je zavedení nového prostředí Abaku – města čísel. Nejdříve si žáci povídají o tom, co na ob-

> rázku vidí. Přitom objevují pravidlo, podle kterého bydlí tři čísla v jednom bytě. Když žáci pravidlo odhalí (součet dvou čísel je číslo třetí), učitel může zavést termín trio, se kterým se bude dále pracovat. Může akceptovat i jiné pojmenování, které navrhnou žáci. Učitel pouze žáky upozorní, že v učebnici se bude mluvit o triu. Učitel formuluje úlohu, aby žáci prověřili, zda v každém bytě bydlí trio, a umístili do bytů šest čísel čekajících před panelákem tak, aby v bytech byla další dvě tria. Doplňující úloha: Učitel vyzve žáky, aby vytvořili svoje byty a nastěhovali do nich tria. (Hejný et al., 2018b, s. 125)[4]

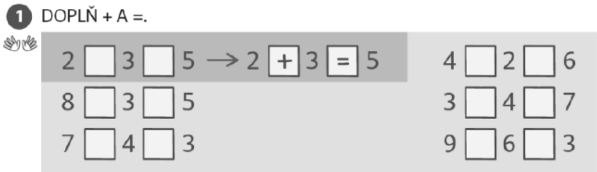
Níže jsou uvedeny typy trií, které se prokazatelně objevily v žákovských pracích. Je pravděpodobné, že nebyly objeveny všechny. Typy jsou klasifikovány dle toho, jaká čísla žák použil, a seřazeny podle četnosti jejich použití žákem:

- jednociferná čísla a přičítání čísla 1, např. $(4, 1, 5)$, $(1, 8, 9)$, $(2, 1, 3)$;
- jednociferná čísla a součet dvou za sebou jdoucích čísel, např. $(3, 4, 7)$, $(5, 2, 3)$, $(1, 2, 3)$;
- jednociferné nebo dvouciferné číslo jako součet dvou stejných nebo různých jednociferných čísel, např. $(2, 2, 4)$, $(6, 3, 3)$, $(2, 9, 7)$, $(7, 8, 15)$, $(9, 9, 18)$, $(6, 9, 15)$;
- jednociferná čísla a součet dvou násobků nejmenšího čísla v triu, např. $(3, 6, 9)$, $(2, 4, 6)$, $(2, 6, 8)$;
- různá nebo stejná jednociferná čísla, jejichž součet je 10, např. $(10, 2, 8)$, $(5, 5, 10)$, $(6, 4, 10)$;
- jednociferná čísla, číslo 0 a rozdíl dvou stejných čísel, např. $(0, 1, 1)$, $(9, 0, 9)$, $(0, 0, 0)$;
- víceciferná čísla dělitelná deseti nebo stem, např. $(10, 20, 30)$, $(100, 200, 300)$;
- víceciferná čísla a přidání čísla 1, např. $(10, 1, 11)$, $(100, 1, 101)$, $(99, 1, 100)$;

[4] V příručce lze nalézt úvod k přístupu výuky orientované na budování schémat, podklady pro tvorbu ŠVP, návrh tematického plánu, cíle jednotlivých kapitol a úloh, řešení úloh a další.

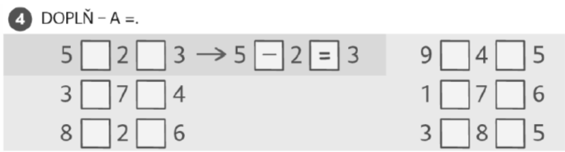
- dvě dvouciferná čísla, z nichž jedno je 10, např. $(2, 10, 12)$, $(10, 7, 17)$;
- jednociferná čísla nebo jedno dvouciferné číslo a přičítání čísla 5, např. $(4, 5, 9)$, $(8, 5, 13)$, $(3, 5, 8)$.

Další úlohy z prostředí Abaku, jež mají mimo jiné za cíl seznámit žáky s konvenčním zápisem rovnosti, nalezneme v téže učebnici na str. 86 (viz obr. 5).



Obr. 5: Úloha k prostředí Abaku (Hejný et al., 2018a, s. 86)

Jedná se o šest úloh na doplňování znaménka „+“ a „=“, přičemž první úloha je vyřešena a ilustruje, jak mají žáci úlohy řešit. Každá úloha má právě jedno řešení. Stejný typ úlohy, ale s doplňováním znaménka „−“ a „=“ je na str. 108 (viz obr. 6).

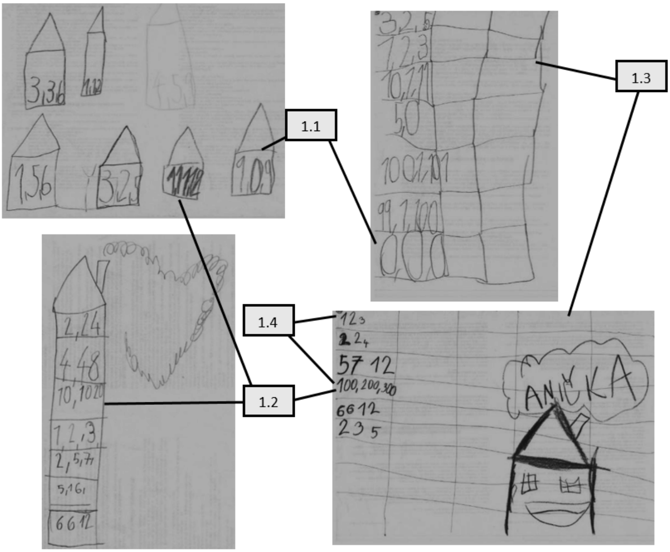


Obr. 6: Úloha k prostředí Abaku (Hejný et al., 2018a, s. 108)

Výsledky analýz žákovských prací z diplomové práce autorky

Diplomová práce obsahuje dva před-experimenty a jeden hlavní experiment.

V prvním před-experimentu v jedné první třídě pražské základní školy byl žákům řečen motivační příběh: „Na jedné planetě, v jedné zemi, v jednom městě je veliký dům a v něm žijí čísla. V jakém domě bydlíte vy? . . . Tady to je takový panelák, skoro mrakodrap, protože těch čísel tam bydlí opravdu moc. A v jednom bytě bydlí vždy tři čísla. A v tomto bytě bydlí čísla jedna, dva a tři. Proč myslíte, že zrovna tato tři čísla?“ (Mottlová, 2018, s. 31). Dále bylo jejich úkolem na čistý papír nakreslit panelový dům a do něj doplnit vlastní tria.



Obr. 7: Vybrané žákovské práce z prvního před-experimentu (Mottlová, 2018, s. 37, 39, 43, 48)

Z analýzy žákovských prací (viz obr. 7) vyplynuly tyto hlavní jevy:

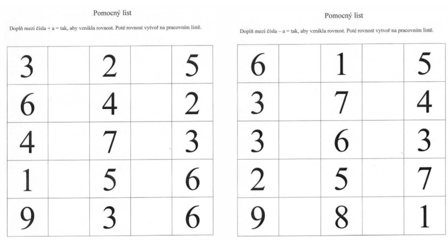
- každý žák vymýšlí různé typy trií,
- někteří pracují s „0“ (viz řešení 1.1),
- někteří pracují s dvouცifernými a tříciferními čísly (viz řešení 1.2),
- většina žáků opouští sémantický příběh (nekreslí si domeček) a pracuje ve struktuře (tvoří tabulku a plán práce) (viz řešení 1.3),
- u několika žáků lze pozorovat zkušenost s podobností součtu dvou jednociferných čísel se součtem dvouciferných nebo trojciferných čísel (např.: 1, 2, 3 – 10, 20, 30 – 100, 200, 300) (viz řešení 1.4).

V rámci druhého před-experimentu byly žákům první třídy jiné pražské školy předloženy tři pracovní listy. Jeden hlavní (viz obr. 8) a dva pomocné listy (viz obr. 9) se sadou kartiček, na nichž byla znaménka „+“, „−“, „=“.

Habakuk – pracovní list

1. **Doplň + a = mezi čísla tak, aby vznikla rovnost.**
   a) 3 2 5
   b) 6 4 2
   c) 4 7 3
   d) 1 5 6
   e) 9 3 6
2. **Doplň – a = mezi čísla tak, aby vznikla rovnost.**
   a) 6 1 5 b) 3 7 4 c) 3 6 3 d) 2 5 7 e) 9 8 1
3. **Doplň mezi čísla jedno znaménko + nebo – a jedno = tak, aby vznikla rovnost.**
   a) 3 7 4
   b) 3 5 8
   c) 6 5 1
   d) 9 3 6
   e) 2 7 9
   f) 9 7 2
4. **Doplň jedno nebo dvě znaménka + nebo – a =, vytvoř rovnost.**
   Úloha: 4 1 2 3
   U této úlohy Adam sestavil úlohu: 1+2=3. Bětka sestavila úlohu 4+1=2+3. Jenda sestavil úlohu 4+1-2=3. Jsou tato řešení správně? Počítej další úlohy.
   a) 5 4 1 2
   b) 4 3 2 1
   c) 7 2 3 1
   d) 8 2 8 2

Obr. 8: Hlavní pracovní list k druhému před-experimentu (Mottlová, 2018, s. 50)



Pomocný list

Doplň mezi čísla + a = tak, aby vznikla rovnost. Poté rovnost vytvoř na pracovním listě.

3		2		5
6		4		2
4		7		3
1		5		6
9		3		6

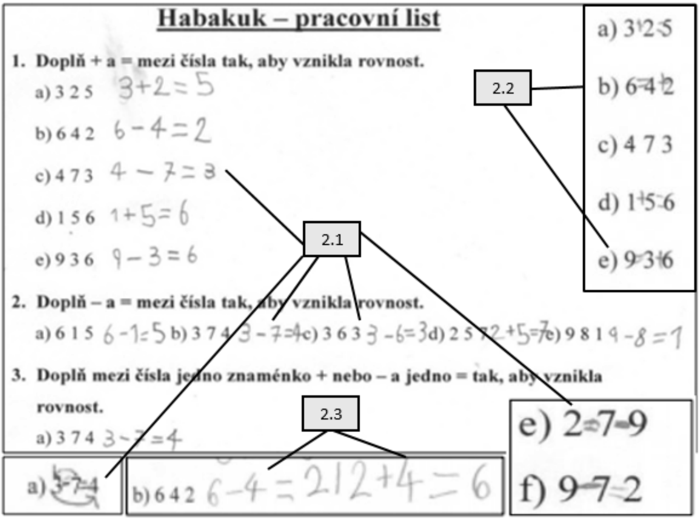
Pomocný list

Doplň mezi čísla – a = tak, aby vznikla rovnost. Poté rovnost vytvoř na pracovním listě.

6		1		5
3		7		4
3		6		3
2		5		7
9		8		1

Obr. 9: Pomocné pracovní listy k druhému před-experimentu (Mottlová, 2018, s. 53)

Úkolem žáků bylo pomocí manipulace s lístečky získat zkušenost s výsledkem operace na levé straně a svá řešení zapsat na hlavní pracovní list.

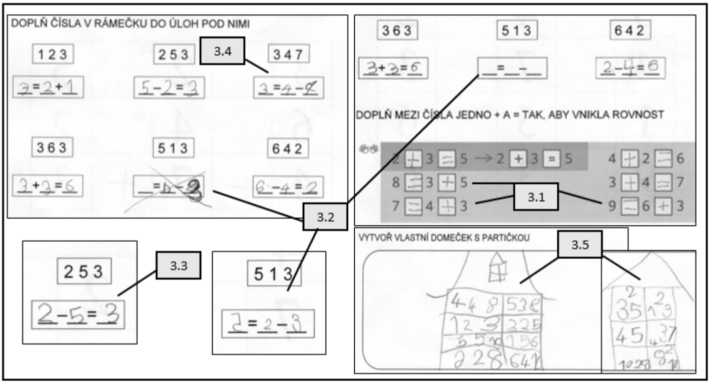


Obr. 10: Vybraná žákovská řešení z druhého před-experimentu (Mottlová, 2018, s. 58, 60, 65, 66)

Z analýzy žákovských prací (viz obr. 10) vyplývá, že:

- někteří žáci se dopouštějí chybného čtení rovností nebo chybné aplikace komutativního zákona u operace odčítání (viz řešení 2.1),
- většina žáků nemá zkušenosti s výsledkem rovnosti na levé straně, ale díky manipulaci s čísly ji získávají (viz řešení 2.2),
- někteří si všímají shodně nebo podobně zadaných čísel a na základě toho získávají zkušenost s přechodem k inverzní operaci (viz řešení 2.3).

V rámci hlavního experimentu žáci dostali pracovní list s úlohami na obou stranách. Na první straně žáci manipulovali s pomocnými znaménky (stejně jako v předchozím experimentu). Druhá strana pracovního listu obsahovala tři úkoly.



Obr. 11: Vybraná žákovská řešení z hlavního experimentu (Mottlová, 2018, s. 85, 87, 89, 90)

Z analýzy žákovských prací (viz obr. 11) vyplývá, že:

- žáci díky manipulaci získávají zkušenost s výsledkem operace na levé straně, ale jen někteří umí tuto dovednost využít (z 25 žáků tuto zkušenost umí využít 6) (viz řešení 3.1),
- někteří žáci se snaží vyrovnat s neřešitelnou úlohou různými způsoby, např. po nezdařeném pokusu úlohu škrtnou, nebo si zvolí vlastní čísla, aby úloha byla řešitelná, nebo úlohu nechají prázdnou (viz řešení 3.2),
- žáci mají zkušenost s komutativním zákonem pro operaci sčítání, ale někteří ho chybně aplikují při operaci odčítání, což dokazuje rovnost „$2 - 5 = 3$“ (viz řešení 3.3),
- většina žáků má problém s rovností „$3 = 7 - 4$“ a chybně ji řeší takto: „$3 = 4 - 7$“. Následně ji chybně čtou „Sedm mínus čtyři rovná se tři,“ tedy zprava doleva (viz řešení 3.4),
- žáci mají zájem vytvářet různé typy trií (viz řešení 3.5).

Využití pro učitele na základní škole

Dva hlavní problémové jevy, jež mohou žáka doprovázet do vyšších ročníků, jsou chybná aplikace komutativního zákona u operace odčítání a chybné čtení rovnosti, které se může vyskytnout u obou aditivních operací. Při zapisování řešení úloh nemůžeme poznat, jaké chyby se žák dopouští. Teprve když ho vyzveme k prezentaci jeho řešení, můžeme odhalit příčinu chyby a na jejím základě ji odstranit.

První jev (např. u úlohy „$2 - 5 = 3$“) může učitel odstranit pomocí dramatizace úlohy v sémantickém prostředí „Schody“[5]. Učitel zadá povel: „Žáku A, postav se na schod 2 a udělej 5 kroků dozadu. Začni teď. Žáku B, postav se na schod 3.“ Po odkrokování úlohy se učitel zeptá: „Stojí oba žáci A i B na stejném schodu?“

Během experimentů se ukázalo, že se jeden nebo dva žáci drželi své chybné představy a nepřijali výsledek. V takové chvíli je vhodné nechat úlohu zapsanou na kraji tabule a přejít k jiným typům úloh. Za krátký čas se může učitel k úloze vrátit a s největší pravděpodobností dojde k porozumění a shodě.

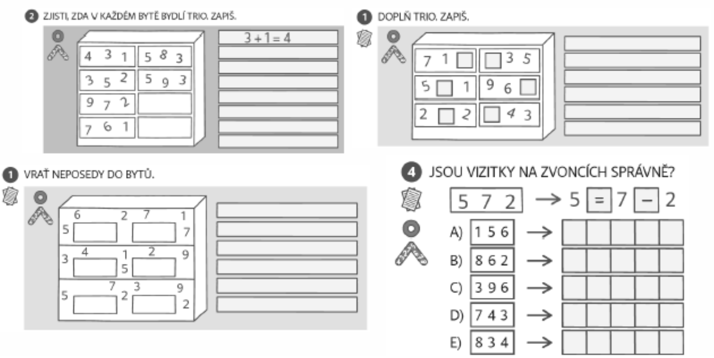
Druhý jev může učitel odstranit pomocí postupného řešení obou stran rovnosti. Učitel napíše na tabuli chybnou rovnost „$3 = 4 - 7$“. Číslo „3“ a znaménko „=“ zakryje. Žáci vidí pouze operaci „$4 - 7$“. Učitel se dotazuje na výsledek této operace. Pokud žáci řeknou „-3“, učitel jej zapíše a odkryje levou stranu. Zeptá se žáků, zda rovnost platí. Pokud žáci při řešení úlohy „$4 - 7$“ připustí oba výsledky, tedy „3“ a „-3“ učitel přejde k dramatizování operace v prostředí „Schody“.

Další úlohy, jež jsou obsahem prostředí Abaku, mohou ještě více pomoci s reedukací chybných představ, které žáci mají (viz obr. 12).

Závěr

Analýzy žákovských prací přinesly mnoho otázek. Na některé, jako například chybné čtení rovnosti, chybná aplikace komutativního zákona a další viz výše, jsme odpověděli a některé budou předmětem mé další práce. Například: Jak nejlépe přivést žáky k uvědomění si, že sčítání a odčítání jsou inverzní operace? Jaké úlohy volit, aby žákům pomohly k upevnění správného čtení rovnosti a správného aplikování komutativního zákona? Jak budou žáci

[5]Didaktické prostředí v Hejného metodě. „V prostředí Schody se žáci pohybují na očíslovaném krokovacím pásu, tedy číselné ose. [...] Číslo je zde buď adresa schodu, nebo operátor změny – počet kroků.“ (Hejný, 2014, s. 16)



Obr. 12: Úlohy k prostředí Abaku
(Hejný et al., 2018a, s. 89, 96, 106, 113)

pracovat se dvěma aditivními operacemi v jedné rovnosti? Jak budou žáci řešit úlohy s aditivními operacemi v jiných číselných oborech?

Učiteli je předložen nástroj pro diagnostiku chyb a chybných představ, které se běžně ve výuce objevují. Uvědomělou nápravou chyb může učitel pomoci žákům, aby porozuměli aditivním operacím a byli lépe připraveni na náročnější úlohy v matematice na 1. stupni základní školy.

Literatura

[1] Černek, P., & Bednářová, S. (2006). *Matematika pre 2. ročník ZŠ (pracovný zošit).* Orbis Pictus Istropolitana.

[2] Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.* Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

[3] Hejný, M., Jirotková, D., Slezáková, J., Kuřík Sukniak, A., & Strnad, V. (2018a). *Matematika 1. ročník – 3. díl ze 3 (pracovní učebnice).* H-mat, o.p.s.

[4] Hejný, M., Jirotková, D., Slezáková, J., Kuřík Sukniak, A., & Strnad, V. (2018b). *Příručka učitele k učebnicím pro 1. ročník.* H-mat, o.p.s.

[5] Mottlová, K. (2018). *Myšlenka aditivní triády na 1. stupni ZŠ.* [Diplomová práce]. Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova. Vedoucí práce Jana Slezáková.

[6] Repáš, V., Černek, P., & Pytlová, Z. (1997). *Matematika pre 5. rocník ZŠ. 4–5.* Orbis Pictus Istropolitana.

[7] Tesař, V. (2015). *Abaku: pravidla hry* [online]. Dostupné z `https://abaku.org/metodika-na-uvod`.

[8] Vávrová, A. (2015). *Abaku: Metodika a didaktika pro učitele ZŠ.* AL. 21 s.r.o.

[9] Žabka, J., Černek, P., & Martiška, J. (2011). *Učebnica: Matematika pre 5. ročník základných škôl, 1. časť.* Orbis Pictus Istropolitana.

[10] Žabka, J., & Černek, P. (2012). *Matematický trenažér: Pracovný zošit pre 5. ročník ZŠ, 1. časť.* aSc Applied Software Consultants s.r.o.

Abstract

The article focuses on the concept of additive triads. It includes proposals of activities and tasks in the learning environment Abaku which help pupils with the image of a conventional record of the equality, its left-right reading and the application of commutativity. To illustrate our considerations, the analyses of pupils' solutions from the author's diploma thesis are presented.

Karolína Mottlová
Fakultní základní škola profesora Otokara Chlupa Pedagogické fakulty UK, Praha 13, Fingerova 2186
Fingerova 2186/17
158 00 Praha 5
Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy
e-mail: karolina.mottlova.ruzickova@gmail.com