

Luděk Spíchal

Kovové průměry a úhly v uspořádáních bodů na spirálách

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 66 (2021), No. 1, 49–61

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/148693>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2021

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*
<http://dml.cz>

Kovové průměry a úhly v uspořádáních bodů na spirálách

Luděk Spíchal

Abstrakt. Článek se zaměřuje na bodové spirály odvozené zejména od Fermatovy a Archimédovy spirály. Pojem zlatého úhlu je rozšířen na množinu kovových úhlů jako analogie k množině kovových průměrů zavedených Verou de Spinadel.

Úvod

V roce 1868 si Wilhelm Hofmeister¹ všiml, že se rostlinné buňky při růstu oddělují z růstového vrcholu tak, že rostlinné části, jejichž jsou základem, jsou následně uspořádány do spirál. Další studium problému ukázalo, že v řadě případů jsou zmíněné části rostlin odděleny ve spirálách úhly, jejichž velikost se nápadně blíží zlatému úhlu, který dělí kruh na části obdobným způsobem, jakým rozděluje úsečku zlatý řez [16]. Pozdější studie poukázaly dále jak na souvislosti s takovými oblastmi matematiky, jako je např. teorie čísel (Fibonacciho a Lucasova posloupnost), tak na souvislosti s některými oblastmi aplikované matematiky (např. teorie pružnosti).

Cílem článku je popsat množiny bodů tvořících bodové spirály. Po stručném představení použitých typů spirál a připomenutí pojmu zlatého řezu a zlatého úhlu následují modely rozložení bodů známé z literatury, které jsou analogií umístění semen v úborech hvězdnicovitých či šiškách borovic. Hlavní část článku je věnována zobecnění pojmu zlatého řezu tzv. množinou kovových průměrů, kterou v knize [14] popsala Vera de Spinadel, a následnému zavedení analogické množiny kovových úhlů. Vybrané hodnoty kovových úhlů jsou podkladem pro vytvoření modelů bodových spirál (Fermatovy a Archimédovy). Na závěr je uvedeno několik modelů transformovaných bodových spirál (Gielisova transformace).

1. Spirály a zlatý řez

Parametrické rovnice spirál (logaritmické, Archimédovy a Fermatovy) jsou

$$\begin{aligned}x &= r(t) \cos(t), \\y &= r(t) \sin(t),\end{aligned}\tag{1}$$

kde $t \geq 0$ a $r(t)$ je spojitá funkce. Vhodnou volbou funkce $r(t)$ získáme

¹Wilhelm Friedrich Benedikt Hofmeister (1824–1877) byl německý biolog a botanik.

Mgr. LUDĚK SPÍCHAL, Ústav matematiky a statistiky, PřF MU, Kotlářská 2, 611 53 Brno
a Česká lesnická akademie, Lesnická 9, 541 01 Trutnov, e-mail: spichal@clatrutnov.cz

- logaritmickou spirálu, kde $r(t) = ae^{bt}$,
- Archimédovu spirálu, kde $r(t) = at$,
- Fermatovu spirálu, kde $r(t) = a\sqrt{t}$.

Zlatý řez vznikne rozdělením úsečky na dvě části tak, že poměr větší části k menší je stejný jako poměr celé úsečky k větší části, tj.

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}. \quad (2)$$

Pokud dále zvolíme $y = 1$, pak má rovnice

$$x^2 - x - 1 = 0$$

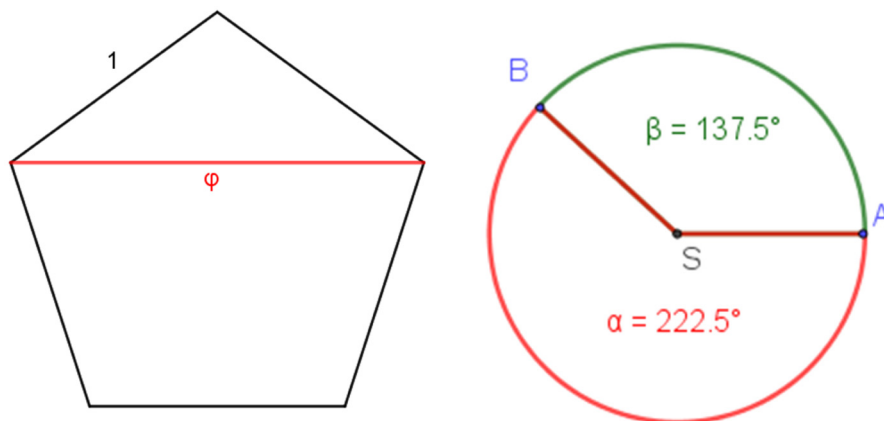
řešení ve tvaru

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Zlatým řezem,² který označíme řeckým písmenem φ , je kořen

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Zlatý řez může být sestrojen mnoha způsoby. Vlevo na obr. 1 je naznačena geometrická interpretace zlatého řezu v pravidelném pětiúhelníku s jednotkovou stranou.



Obr. 1. Zlatý řez (φ) a zlatý úhel (β)

²Zlatý řez je alternativně označován také jako zlatý poměr, zlatý průměr, popř. zlaté číslo.

2. Zlatý úhel

Zlatý úhel (obr. 1 vpravo) získáme v případě, že rozdělíme plný úhel (2π) na dvě části α, β ($\alpha + \beta = 2\pi$) podle zlatého řezu. Hledané úhly získáme tedy z poměru

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2\pi}{\alpha}. \quad (3)$$

Z definice zlatého řezu a zlatého úhlu pro vyjádření α a β v radiánech okamžitě plyne

$$\alpha = 2\pi/\varphi, \quad \beta = 2\pi/\varphi^2, \quad \text{resp. } \beta = 2\pi - 2\pi/\varphi, \quad (4)$$

kde po dosazení a zjednodušení je $\alpha = \pi(\sqrt{5} - 1)$, resp. $\beta = \pi(3 - \sqrt{5})$. Hledaný zlatý úhel je menší z uvedených hodnot, tj. $\beta = \pi(3 - \sqrt{5})$, resp. $\beta \doteq 137,5^\circ$.



Obr. 2. Spirální uspořádání listů (fylotaxe) na stonku mochně (*Physalis* sp., vlevo) a netýkavky (*Impatiens* sp., vpravo)

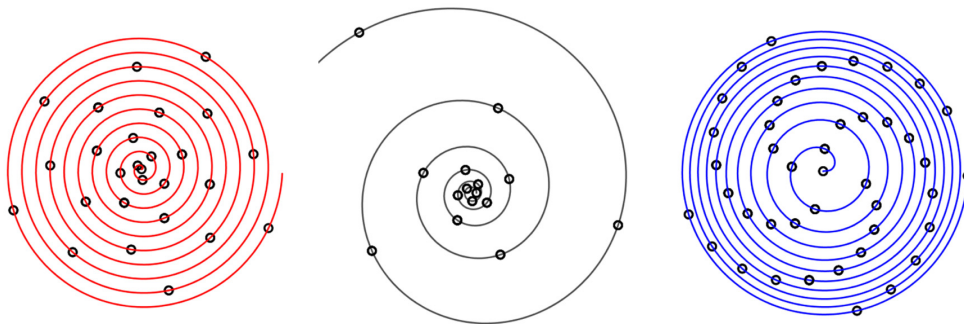
Úhly blízké zlatému úhlu nalezneme např. v rozložení listů na stoncích rostlin (obr. 2). Jestliže vytvoříme bodovou spirálu pomocí iracionálních (ve stupních) úhlů, pak žádné dva body neleží na jedné polopřímce vycházející z počátku. V případě rostlin by takové uspořádání listů mohlo souviset s mírou schopnosti zachycovat sluneční záření [1].³ Spirální uspořádání rostlinných částí zaznamenáme i v dalších případech, např. rozložení jehlic a šupin šišek jehličnanů (obr. 3), dále např. v uložení semen v úborech hvězdicovitých rostlin, rozmístění šupin šišek borovic, rozmístění jehlic na větévkách jedlí apod. Snadno lze ukázat (obr. 5 vlevo, vpravo), že již malá změna

³Dalším důsledkem rozložení listů na stonku podle zlatého úhlu je počet listů na určitý počet otáček, které odpovídají Fibonacciho číslům. Dodejme, že pokud označíme členy Fibonacciho posloupnosti symbolem F_n , pak

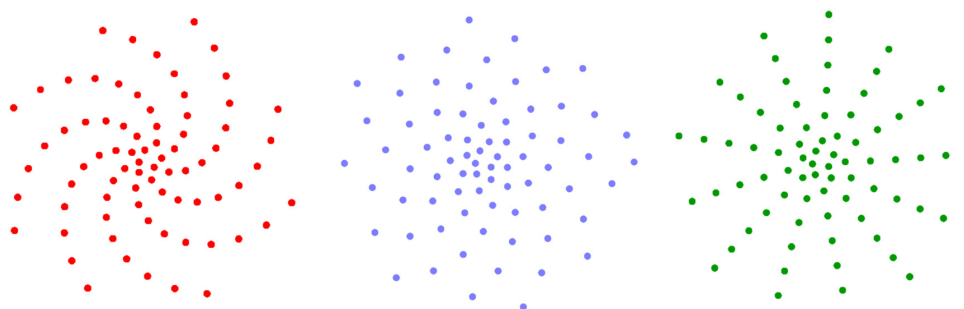
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$



Obr. 3. Spirální uspořádání šupin šišky borovice (*Pinus sylvestris*, vlevo), jehlic jedle (*Abies alba*, vpravo)

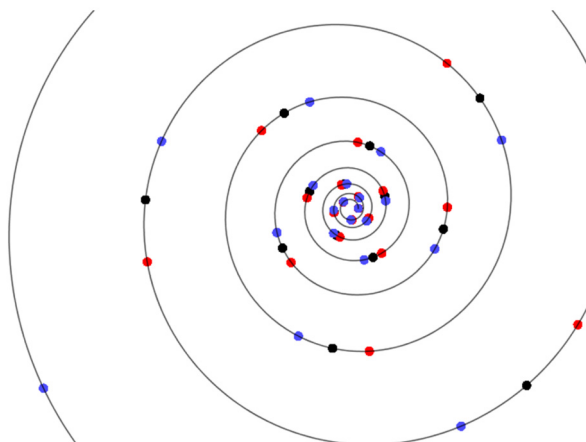


Obr. 4. Rozložení bodů, jejichž úhlová vzdálenost odpovídá zlatému úhlu na Archimédově (vlevo), logaritmické (uprostřed) a Fermatově (vpravo) spirále



Obr. 5. Rozložení bodů, jejichž úhlová vzdálenost odpovídá úhlu $136,5^\circ$ (vlevo), zlatému úhlu ($137,5^\circ$, uprostřed) a úhlu $138,5^\circ$ (vpravo), ležících na Archimédově spirále

hodnoty zlatého úhlu vede k radikální změně uspořádání jednotlivých bodů. Rozložení bodů na Fermatově spirále můžeme srovnat s obdobnými modely vycházejícími z Archimédovy a logaritmické spirály (obr. 4), přičemž ve všech případech zazname-



Obr. 6. Rozložení bodů, jejichž úhlová vzdálenost odpovídá úhlu $136,5^\circ$ (modrá), zlatému úhlu ($137,5^\circ$, černá) a úhlu $138,5^\circ$ (červená), ležících na logaritmické spirále

náme vznik sekundárních spirál.⁴ Fermatova a Archimédova spirála dovolují těsnější přiblížení jednotlivých bodů, než jaké lze zaznamenat v případě logaritmické spirály znázorněné na obr. 6 ([4], [10], [16]). K umístění bodů na spirálách v obr. 4, 5 a 6 použijeme rovnici (1), kde argumentem jsou celočíselné násobky zvolené úhlové vzdálenosti.

V literatuře lze nalézt řadu článků zabývajících se rozmístěním listů na stoncích, květů a semen v květenstvích apod. Zmíňme např. článek [17], ve kterém Vogel navrhl pro zmíněná uspořádání rovnice

$$\phi = n \cdot 137,5^\circ, \quad r = c\sqrt{n},$$

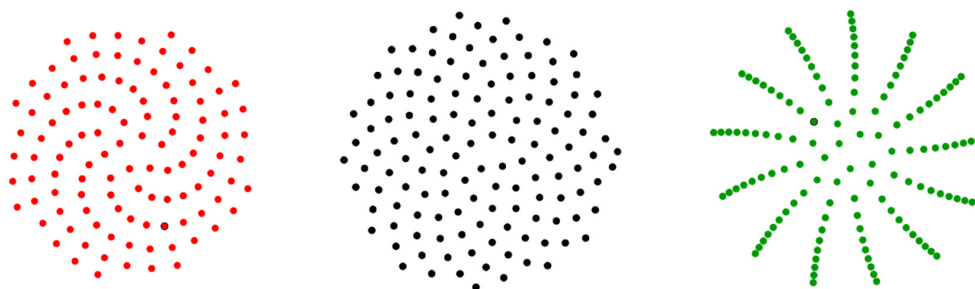
kde n je pořadové číslo (počítáno od středu) květu v květenství, ϕ je násobek zlatého úhlu, r je vzdálenost mezi středem květenství a středem n -tého květu, c je vhodná konstanta. Pro použití odmocninové závislosti má jednoduché geometrické vysvětlení. Za předpokladu, že květy mají stejnou velikost a jsou těsně nahloučené, pak je celkový počet květů v květenství o poloměru r úměrný ploše květenství. Pořadové číslo n nejvzdálenějšího květu je úměrné hodnotě r^2 , tj. $r \sim \sqrt{n}$. V této souvislosti si nelze nevsimnout zřejmé analogie s Fermatovou spirálou, viz obr. 7.

Ridley v článku [11] pomocí počítačových simulací ukázal, že zlatý úhel umožňuje vzhledem k použitým rovnicím nejefektivnější rozmístění květů v květenství, tj. největší počet květů na dané ploše květního lůžka.

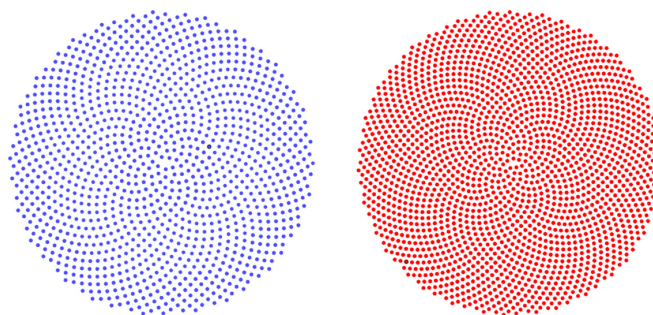
Douady & Couder v článku [3] na základě studia mechanických poměrů v systémech rostoucích buněk ukázali, že úhly mezi po sobě jdoucími semeny jsou aproximací zlatého úhlu v podobě Fibonacciho zlomků (tj. F_{n-1}/F_n). Dodejme na okraj, že jejich teorie vysvětluje i takové počty korunních plátek, které nejsou Fibonacciho čísla, jako jsou např. čtyři korunní plátky fuchsie (Lucasova posloupnost).

Newell & Shipman v článku [9] aplikovali teorii pružnosti na model rostoucí rostliny a ukázali, že růst vrcholu (primordia) vede ke vzniku současně se šířících vln, které mají

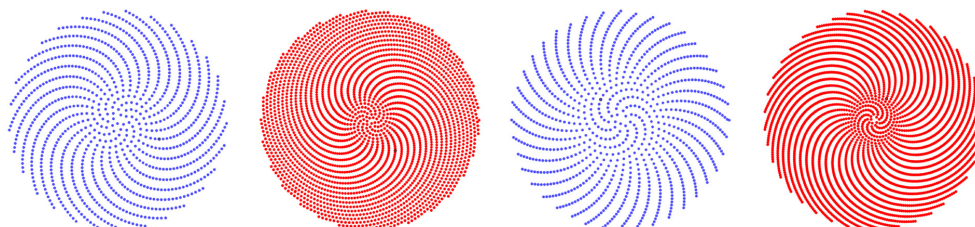
⁴Obrázky spirál v celém článku byly vytvořeny pomocí programu GeoGebra.



Obr. 7. Rozložení bodů, jejichž úhlová vzdálenost odpovídá úhlu $136,5^\circ$ (vlevo), zlatému úhlu ($137,5^\circ$, uprostřed) a úhlu $138,5^\circ$ (vpravo), ležících na Fermatově spirále



Obr. 8. Rozložení bodů, jejichž úhlová vzdálenost odpovídá úhlu $\pi(\sqrt{5}-1)$ rad (cca $222,5^\circ$, vlevo, $\pi < t < 1\,500\pi$) a zlatému úhlu $\pi(3-\sqrt{5})$ rad (cca $137,5^\circ$, vpravo, $\pi/2 < t < 1\,500\pi$), ležících na Fermatově spirále



Obr. 9. Rozložení bodů, jejichž úhlová vzdálenost odpovídá úhlu $(2\pi-\sqrt{3})$ rad (cca $260,8^\circ$, zcela vlevo, $\pi < t < 1\,500\pi$), úhlu $\sqrt{3}$ rad (cca $99,2^\circ$, druhý zleva, $\pi/2 < t < 1\,500\pi$), úhlu $(2\pi-\sqrt{2})$ rad (cca 279° , druhý zprava, $\pi < t < 1\,500\pi$) a úhlu $\sqrt{2}$ rad (cca 81° , zcela vpravo, $\pi/2 < t < 1\,500\pi$), ležících na Fermatově spirále

různý směr a frekvenci. Jejich skládání (interference) vytváří frekvence odpovídající Fibonacciho číslům.

Na obr. 9 můžeme porovnat uspořádání bodů odpovídající dvěma dalším iracionálním číslům: $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$. V obou uvedených případech zaznamenejme ve srovnání se zlatým úhlem (obr. 8) značné zjednodušení uspořádání bodů do relativně jednoduché spirální struktury (levotočivé i pravotočivé).

3. Stříbrný a bronzový úhel

Připomeňme nejdříve, že každé reálné číslo $y > 0$ lze vyjádřit ve tvaru *řetězového zlomku*

$$y = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}, \quad a_0 \in \mathbb{N}_0, \quad a_i \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

který je možné ve zkrácené podobě zapsat ve tvaru $[a_0, \dots, a_k]$ (konečný řetězový zlomek), resp. $[a_0, a_1, \dots]$ (nekonečný). Pro zlatý průměr (řez) platí

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}},$$

popř. ve zkrácené podobě

$$\varphi = [1, 1, 1, \dots].$$

Křížek, Somer a Šolcová v knize [8] zmiňují další dvě iracionální čísla, která lze definovat analogickým způsobem jako *zlatý průměr*:

- $\sigma = [2, 2, 2, \dots] = \sqrt{2} + 1$ je tzv. *stříbrný průměr*,
- $\delta = [3, 3, 3, \dots] = (\sqrt{13} + 3)/2$ je tzv. *bronzový průměr*.

Dvě hodnoty jsou v poměru odpovídajícím *stříbrnému průměru*, jestliže poměr větší a menší hodnoty je stejný jako poměr součtu menší hodnoty a dvojnásobku větší hodnoty k větší hodnotě

$$\frac{x}{y} = \frac{2x + y}{x}. \quad (6)$$

Pokud dále zvolíme $y = 1$, pak má rovnice

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

řešení ve tvaru

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Stříbrným průměrem⁵, který označíme řeckým písmenem σ , je kořen

$$\sigma = 1 + \sqrt{2}.$$

Geometrická interpretace stříbrného průměru je zřejmá z obr. 10 a souvisí s pravidelným osmiúhelníkem.⁶

⁵Hodnotu stříbrného průměru lze získat rovněž z Pellovy posloupnosti

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2\,378, 574, 13\,860, \dots$$

analogickým způsobem, jako při určení hodnoty zlatého řezu pomocí Fibonacciho posloupnosti

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

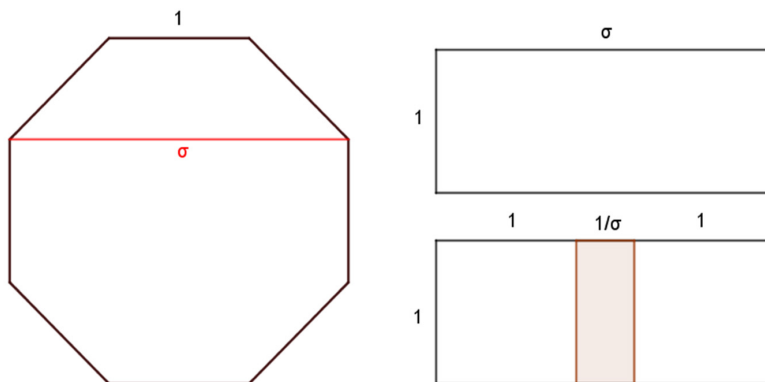
V obou případech dělíme vždy dva bezprostředně po sobě jdoucí členy, přičemž hledaný průměr je limitou posloupnosti podílů.

⁶V článku [2] Buitrago ukázala, že pouze zlatý a stříbrný průměr lze znázornit jako úhlopříčku v pravidelném n -úhelníku.

Pojem *stříbrného úhlu* zavedeme obdobným způsobem jako v případě zlatého úhlu, tj.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2\alpha + \beta}{\alpha} \wedge \beta = 2\pi - \alpha, \quad (7)$$

kde po úpravě a zjednodušení je $\alpha = \pi\sqrt{2}$, $\beta = \pi(2 - \sqrt{2})$. Hledaný stříbrný úhel je menší z úhlů α , β , tj. úhel β .



Obr. 10. Geometrická interpretace stříbrného průměru a jeho převrácené hodnoty

K odvození *bronzového úhlu* použijeme poměr⁷

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3\alpha + \beta}{\alpha} \wedge \beta = 2\pi - \alpha, \quad (8)$$

kde po úpravě a zjednodušení je $\alpha = \pi(1 + \sqrt{13})/3$, $\beta = \pi(5 - \sqrt{13})/3$, přičemž bronzový úhel je vyjádřen menším z úhlů α , β , tj. úhlem β .

4. Kovové průměry a úhly

Úvahy, které jsme učinili v předchozích kapitolách vzhledem ke zlatému, stříbrnému a bronzovému průměru můžeme převést do obecné podoby tak, že budeme uvažovat rovnici

$$x^2 - nx - 1 = 0, \quad (9)$$

kde $n \in \mathbb{N}$ je parametr, přičemž hledaný průměr je kořen

$$x = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}. \quad (10)$$

Vzhledem k tomu, že pro $n \geq 2$ platí $n^2 < n^2 + 4 < (n + 1)^2$, tj. $n^2 + 4$ není druhou mocninou přirozeného čísla, jsou kořeny rovnice (9) iracionální. Vhodnou volbou

⁷Bronzový průměr získáme z řešení rovnice

$$x^2 - 3x - 1 = 0.$$

parametru n získáme jednak výše zmíněné průměry (zlatý pro $n = 1$, stříbrný pro $n = 2$, bronzový pro $n = 3$), jednak posloupnost dalších průměrů, které jsou souhrnně označovány jako *kovové průměry*⁸

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \frac{4 + \sqrt{20}}{2} = 2 + \sqrt{5}, \frac{5 + \sqrt{29}}{2}, \dots,$$

popř. ve tvaru desetinného čísla

$$1,618 \dots; 2,414 \dots; 3,303 \dots; 4,236 \dots; 5,193 \dots; \dots$$

Řetězové zlomky kovových průměrů lze vyjádřit ve tvaru

$$\sigma = [n, n, n, \dots],$$

což ihned plyne z rovnice $x = n + 1/x$, která je důsledkem rovnice (9).

Kovové úhly získáme z řešení rovnice

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{n\alpha + \beta}{\alpha} \wedge \beta = 2\pi - \alpha, \quad (11)$$

kde $n \in \mathbb{R}^+$. Po úpravě a zjednodušení dostáváme

$$n\beta^2 - 2\pi(n+2)\beta + 4\pi^2 = 0, \quad (12)$$

přičemž hledaný kovový úhel β lze vyjádřit ve tvaru

$$\beta = \frac{\pi}{n}(n+2 - \sqrt{n^2+4}). \quad (13)$$

Posloupnost několika prvních kovových úhlů pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$\pi(3 - \sqrt{5}), \frac{\pi}{2}(4 - \sqrt{8}), \frac{\pi}{3}(5 - \sqrt{13}), \frac{\pi}{4}(6 - \sqrt{20}), \frac{\pi}{5}(7 - \sqrt{29}), \dots$$

⁸Množinu kovových průměrů (*metallic means family*) poprvé zmiňuje Vera W. de Spinadel ([14], [15]). Rovnici pro jejich určení odvozuje ze zobecněné Fibonacciho posloupnosti

$$G(n+1) = pG(n) + qG(n-1),$$

kde $p, q \in \mathbb{N}$ a člen $G(n+1)$ je lineární kombinací dvou předcházejících členů. Pokud rovnici vydělíme členem $G(n)$ a upravíme

$$\frac{G(n+1)}{G(n)} = p + q \frac{1}{\frac{G(n)}{G(n-1)}},$$

pak za předpokladu, že existuje konečná limita

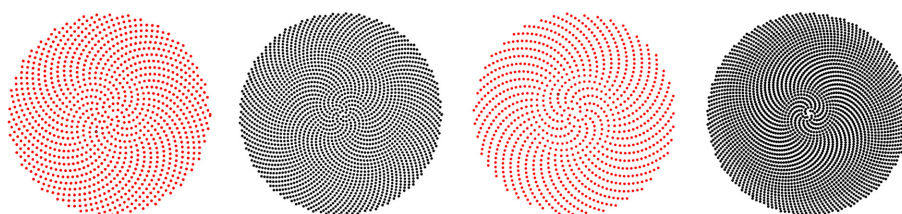
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(n+1)}{G(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(n)}{G(n-1)} = x,$$

získáme po dosazení rovnici

$$x^2 - px - q = 0.$$

Rovnice (9) je speciálním případem předchozí rovnice pro volbu $q = 1$. Další variantou, kterou Vera de Spinadel (1999) diskutuje, je rovnice ($p = 1$)

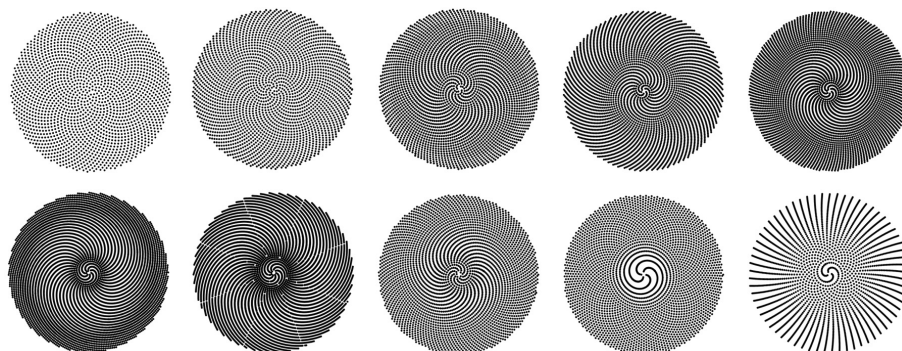
$$x^2 - x - q = 0.$$



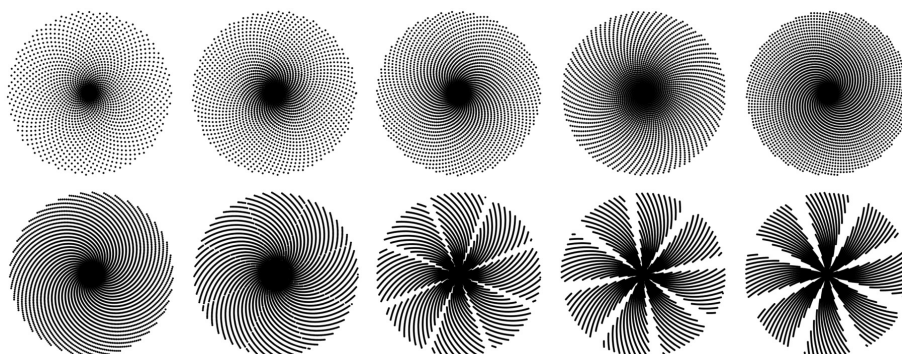
Obr. 11. Rozložení bodů, jejichž úhlová vzdálenost odpovídá úhlu $\pi\sqrt{2}$ rad (cca $254,5^\circ$, zcela vlevo, $\pi < t < 1\,500\pi$), stříbrnému úhlu $\pi(2 - \sqrt{2})$ rad (cca $105,5^\circ$, druhý zleva, $\pi/2 < t < 1\,500\pi$), úhlu $\pi(1 + \sqrt{13})/3$ rad (cca 276° , druhý zprava, $\pi < t < 1\,500\pi$) a bronzovému úhlu $\pi(5 - \sqrt{13})/3$ rad (cca 84° , zcela vpravo, $\pi/2 < t < 1\,500\pi$), ležících na Fermatově spirále

5. Kovové úhly na Fermatově a Archimédově spirále

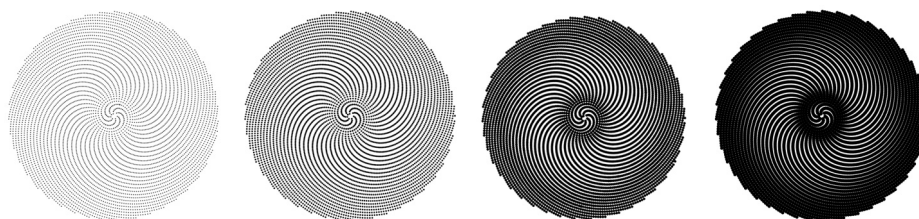
V předchozích sekcích jsme ukázali relativně jednoduchý způsob vytváření iracionálních čísel tvořících množinu kovových průměrů, která mají podobné vlastnosti jako zlatý řez. Analogickým způsobem odvozená množina kovových úhlů vytváří při modelování bodových spirál různě složitá uspořádání, z nichž některá jsou velmi blízka rozmístěním listů či semen rostlin (obr. 11, 12, 13 a 14).



Obr. 12. Rozložení bodů, jejichž úhlová vzdálenost odpovídá kovovým úhlům podle rovnice (13) pro $n = 1$ až $n = 5$ (nahore), hodnotám $n = 6$, $n = 7$, $n = \pi$, $n = e$, $n = (1 + \sqrt{5})/2$ (dole), ležících na Fermatově spirále ($\pi/2 < t < 1\,500\pi$)



Obr. 13. Rozložení bodů, jejichž úhlová vzdálenost odpovídá kovovým úhlům podle rovnice (13) pro $n = 1$ až $n = 10$, ležících na Archimédově spirále ($0 < t < 1\,500\pi$)



Obr. 14. Rozložení bodů různých velikostí (v Geogebře velikosti 1 až 4), jejichž úhlová vzdálenost odpovídá rovnici (13) pro $n = 6$, ležících na Fermatově spirále ($0 < t < 1500\pi$)

6. Gielisovy transformace bodových spirál

Gielisova transformace spočívá v nahrazení rovinné křivky určené polární rovnicí $\rho = f(t)$ křivkou⁹ ([5], [6], [7])

$$\rho = f(t) \left(\left| \frac{1}{a} \cos \frac{mt}{4} \right|^{n_1} + \left| \frac{1}{b} \sin \frac{mt}{4} \right|^{n_2} \right)^{-\frac{1}{q}}, \quad (14)$$

kde $a, b, m, n_1, n_2, q \in \mathbb{R}^+$. Bez újmy na obecnosti v rovnici (14) položíme $a = b = 1$ (křivky pro ostatní případy získáme změnou měřítka na osách) a dále položíme $n_1 = n_2 = p$, čímž dostáváme

$$\rho = f(t) \left(\left| \cos \frac{mt}{4} \right|^p + \left| \sin \frac{mt}{4} \right|^p \right)^{-\frac{1}{q}}, \quad (15)$$

přičemž $g_{m,p,q}(t) = \left(\left| \cos \frac{mt}{4} \right|^p + \left| \sin \frac{mt}{4} \right|^p \right)^{-1/q}$ lze interpretovat jako Gielisovu transformaci jednotkové kružnice se středem v počátku, a to pro různé volby parametrů m, p, q . Příklady tvarů modelovaných podle předchozích rovnic lze nalézt např. v ([5], [6], [7], [12], [13]).

Pro modelování bodových spirál (obr. 15, 16) zavedeme bodovou rovnici křivky

$$X = [x(t), y(t)],$$

kde

$$\begin{aligned} x(t) &= f(t)g_{m,p,q}(t) \cos(t), \\ y(t) &= f(t)g_{m,p,q}(t) \sin(t) \end{aligned} \quad (16)$$

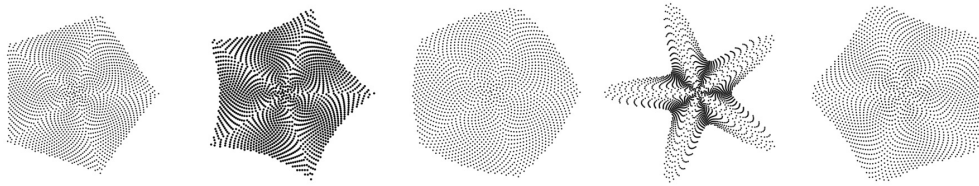
⁹Gielis transformaci odvodil ze zobecněné rovnice elipsy

$$\left| \frac{x}{a} \right|^n + \left| \frac{y}{b} \right|^n = 1$$

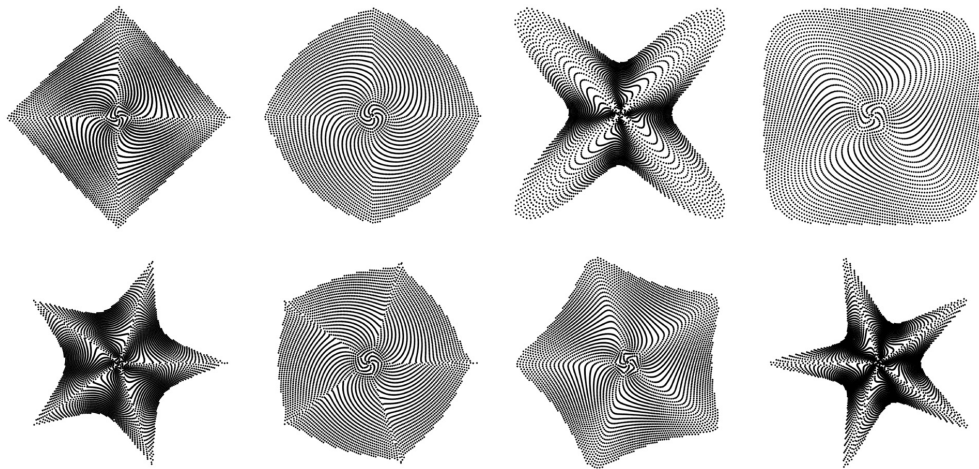
tak, že v polárním tvaru (ρ, t) předchozí rovnice

$$\rho = \left(\left| \frac{\cos t}{a} \right|^n + \left| \frac{\sin t}{b} \right|^n \right)^{-\frac{1}{n}}$$

nahradil jediný exponent n třemi nezávislými exponenty n_1, n_2, q a doplnil parametr $\frac{m}{4}$ do argumentu goniometrických funkcí.



Obr. 15. Rozložení bodů, jejichž úhlová vzdálenost odpovídá rovnici (13) pro $n = 1$ (zlatý úhel), ležících na Gielisově transformaci Fermatovy spirály s rovnicí (16), $m = 5$, zleva: $p = 1, q \approx 1,56$; $p = 1, q = 1$; $p = 1, q = 3$; $p = 5, q = 1$; $p = 5, q = 5$ ($0 < t < 1\,500\pi$)



Obr. 16. Rozložení bodů, jejichž úhlová vzdálenost odpovídá rovnici (13) pro $n = 6$, ležících na Gielisově transformaci Fermatovy spirály s rovnicí (16), nahoře $m = 4$, zleva: $p = 1, q = 1$; $p = 1, q = 3$; $p = 1, q = 10$; $p = 5, q = 1$; $p = 5, q = 5$; dole $m = 5$, zleva: $p = 1, q = 0,5$; $p = 0,5, q = 3$; $p = 1, q = 3$; $p = 10, q = 10$; $p = 30, q = 10$ ($0 < t < 1\,500\pi$)

jsou parametrické rovnice Fermatovy spirály pro $f(t) = a\sqrt{t}$, Archimédovy spirály pro $f(t) = at$, $a \in \mathbb{R}$, $t = k\beta$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ a β určíme z rovnice (13).

Závěr

V článku jsme ukázali, jak pomocí tzv. množiny kovových průměrů zavést analogickou množinu kovových úhlů s možným využitím pro modelování bodových spirál. Modely bodových spirál vytvářených pomocí kovových úhlů (obr. 12, 13, 14, 15 a 16) by v případě použití určitých technik (např. litografie) mohly být podkladem pro vytváření vzorů a obrazů se specifickými optickými vlastnostmi.

Poděkování. Děkuji doc. Mgr. Robertu Maříkovi, Ph.D., a doc. RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D., za cenné rady a podněty při zpracování článku.

L i t e r a t u r a

- [1] BELLOS, A.: *Alexova dobrodružství v zemi čísel*. Dokořán, Praha, 2015.
- [2] BUITRAGO, A. R.: *Polygons, diagonals, and the bronze mean*. Nexus Network J. (2007), 321–326.
- [3] DOUADY, S., COUDER, Y.: *Phyllotaxis as a physical self organised growth process*. Phys. Rev. Lett. 68 (1992), 2098–2101.
- [4] FOWLER, D. R., HANAN, J., PRUSINKIEWICZ, R.: *Modelling spiral phyllotaxis*. Computer & Graphics 13 (1989), 291–296.
- [5] GIELIS, J.: *Inventing the circle: the geometry of nature*. Geniaal Publishers, Antwerp, 2003.
- [6] GIELIS, J.: *A generic geometric transformation that unifies a wide range of natural and abstract shapes*. Amer. J. Bot. 90 (2003), 333–338.
- [7] GIELIS, J.: *The geometrical beauty of plants*. Atlantis Press, Paris, 2017.
- [8] KRÍŽEK, M., SOMER, L., ŠOLCOVÁ, A.: *Kouzlo čísel: od velkých objevů k aplikacím*. Academia, Praha, 2018.
- [9] NEWELL, A. C., SHIPMAN, P. D.: *Plants and Fibonacci*. J. Stat. Phys. 121 (2005), 937–968.
- [10] PRUSINKIEWICZ, P., LINDENMAYER, A.: *Phyllotaxis*. In: The Algorithmic Beauty of Plants. The Virtual Laboratory. Springer, New York, 1990.
- [11] RIDLEY, J. N.: *Packing efficiency in sunflower heads*. Math. Biosci. 58 (1982), 129–139.
- [12] SPÍCHAL, L.: *Gielisova transformace logaritmické spirály*. PMFA 65 (2020), 76–89.
- [13] SPÍCHAL, L.: *Superelipsa a superformule*. Matematika-fyzika-informatika 29 (2020), 60–75.
- [14] SPINADEL, V. W. DE: *From the golden mean to chaos*. Editorial Nueva Librería, Buenos Aires, 1998.
- [15] SPINADEL, V. W. DE, PAZ, J. M.: *A new family of irrational numbers with curious properties*. Humanistic Mathematics Network J. 19 (1999), 33–37.
- [16] STEWART, I.: *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. Dokořán, Praha, 2019.
- [17] VOGEL, H.: *A better way to construct the sunflower head*. Math. Biosci. 44 (1979), 119–189.