

# Učitel matematiky

---

Gabriela Pavlovičová; Renáta Vágová  
Priestorové schopnosti budúcich učiteľov elementaristov

*Učitel matematiky*, Vol. 28 (2020), No. 1, 12–25

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/148626>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2020

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:  
*The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

# PRIESTOROVÁ PREDSTAVIVOSŤ A SCHOPNOSŤ VIZUALIZÁCIE PRI RIEŠENÍ JEDNÉHO NEŠTANDARDÉHO PROBLÉMU

GABRIELA PAVLOVIČOVÁ, RENÁTA VÁGOVÁ<sup>1</sup>

## Teoretické východiská

Priestorová predstavivosť je dôležitým prostriedkom pre popísanie, porozumenie a ohodnotenie nášho geometrického sveta, čo logicky súvisí s matematikou. McGee (1979) popisuje priestorovú schopnosť ako „Priestorová schopnosť je schopnosť mentálne manipulovať, obracať, otáčať alebo preklápať graficky (obrazovo) prezentované podnety“. Mentálna rotácia a priestorová vizualizácia sú dve oblasti priestorových schopností, ktoré majú špecifický vplyv na matematické vedomosti (Linn & Petersen, 1985). Mentálna rotácia je definovaná ako schopnosť rýchlo a presne si predstaviť vzhľad dvoj a trojrozmerných útvarov rotujúcich v priestore. Priestorová vizualizácia zahŕňa postupné spracovanie priestorovej informácie, ako je schopnosť udržať konkrétny tvar v mysli a potom hľadať ten istý tvar ukrytý v zložitejšom útvere, alebo kombinovať dva tvary na vytvorenie nového. Tieto priestorové schopnosti nemajú vplyv len na špecifickú oblasť matematiky, ako je geometria a miera, ale môžu byť aplikované pri riešení matematických problémov v iných oblastiach (Battista, 1990). Už Piaget, Inhelder a Szeminska (1960) vo svojej práci *Child's Conception of Geometry* spájajú priestorové schopnosti a porozumenie geometrii. Andrade a Montecino (2011) analyzovali žiacke problémy chápania „reálnych“ priestorových vzťahov pri vyučovaní

---

<sup>1</sup>Príspevok vznikol s podporou projektu UGA VII/24/2018 Analýza žiackych myšlienkových procesov pri riešení problému.

stereometrie, keď učitelia využívali ikonické rovinné náčrty namiesto skutočných geometrických modelov. Výsledky realizovaného výskumu poukazujú na to, že uvedený spôsob vyučovania geometrie telies často deformuje konštrukciu správneho mentálneho obrazu. Presmeg (1986) rozoznáva viaceré typy mentálnych predstáv, ktoré žiaci využívajú pri riešení rôznych matematických problémov. V geometrii sa najčastejšie vyskytujú:

- konkrétne predstavy (tzv. mentálne fotografie) – mentálne predstavy viažuce sa na konkrétne reálne objekty,
- pohybové predstavy – mentálne predstavy spojené s fyzickými pohybmi ako napr. pohyby rukou, hlavou apod.,
- dynamické predstavy – mentálne predstavy spojené s abstraktným pohybom vizualizovaného objektu, napr. mentálny obraz rotujúceho telesa.

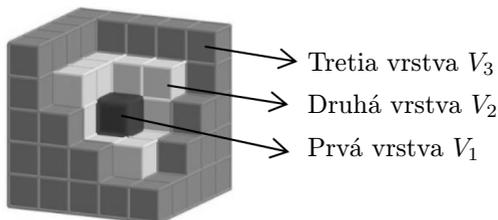
V článku sa zameriavame na skúmanie matematických vedomostí a priestorovej predstavivosti, ktoré sa prejavili pri riešení neštandardného stereometrického problému u študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie.

## Úvod do problému

Jednou zo základných kompetencií učiteľa je jeho odbornosť v danom vyučovacom predmete. Aby bol schopný motivovať žiakov a naučiť ich chápať konkrétne učivo, musí danú oblasť nie len dobre poznať, ale jej aj rozumieť. Práve oblasť priestorovej geometrie je často spojená s problémami a priestorovými schopnosťami učiteľa, ktoré ďalej sprostredkúva svoji žiakom. Na skúmanie priestorových schopností študentov sme vytvorili a prispôbili netradičný stereometrický problém tzv. „vrstvenia kocky“, ktorého pôvodné znenie uvádza Makina (2010). Cieľom bolo identifikovať a následne analyzovať chyby a postupy v študentských riešeniach s akcentom na porozumenie, schopnosť vizualizácie a grafické znázornenie tohto problému. Viaceré úrovne riešenia tohto problému sú publikované v Vágovej (2018). Našu výskumnú vzorku tvorilo 48 vysokoškolských študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie. Študenti riešili daný problém v rámci seminára z didaktiky

matematiky v prvom ročníku magisterského štúdia. Pracovali samostatne, každý mal rovnaké písomné zadanie, nepoužívali žiadne pomôcky a čas na riešenie nemali vopred určený.

**Zadanie problému.** Predstavte si, že máte k dispozícii neobmedzené množstvo rôznofarebných jednotkových kociek, tj. kociek s dĺžkou hrany  $a = 1$  j (délková jednotka). Ďalej si predstavte, že pomocou týchto jednotkových kociek budete tvoriť väčšie kocky postupným pridávaním vrstiev (ako na cibuli alebo na matrioške), pričom každá vrstva bude inej farby (obr. 1). Následne si predstavte rôznofarebné vrstvy zložené z jednotkových kociek a odpovedzte na nasledovné otázky.



Obr. 1: Ukážka „vrstvenia kocky“

**Úloha.** Predstavte si kocku  $K$  s dĺžkou hrany  $a = 3$  j vytvorenú z jednotkových kociek.

- (1.a) Z koľkých rôznofarebných vrstiev sa skladá kocka  $K$ ?
- (1.b) Načrtnite, ako sa jednotkové kocky vrstvy  $V_2$  dotýkajú celými stenami jednotkových kociek vrstvy  $V_1$ . Koľko je takých jednotkových kociek vo vrstve  $V_2$ ?
- (1.c) Načrtnite, ako sa jednotkové kocky vrstvy  $V_2$  dotýkajú celými hranami jednotkových kociek vrstvy  $V_1$ . Koľko je takých jednotkových kociek vo vrstve  $V_2$ ?
- (1.d) Načrtnite, ako sa jednotkové kocky vrstvy  $V_2$  dotýkajú vrcholmi s jednotkovými kockami vrstvy  $V_1$ . Koľko je takých jednotkových kociek vo vrstve  $V_2$ ?
- (1.e) Aký je celkový počet jednotkových kociek v kocke  $K$ ?

*Riešenie.* Ponúkame len správne odpovede bez náčrtov.

- (1.a) Kocka sa skladá z dvoch vrstiev.

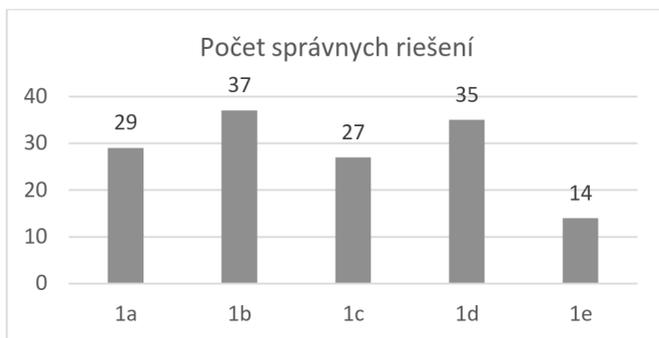
- (1.b) Vo vrstve  $V_2$  je 6 jednotkových kociek dotýkajúcich sa celou stenou jednotkových kociek vrstvy  $V_1$ .
- (1.c) Vo vrstve  $V_2$  je 12 jednotkových kociek dotýkajúcich sa celou hranou jednotkových kociek vrstvy  $V_1$ .
- (1.d) Vo vrstve  $V_2$  je 8 jednotkových kociek dotýkajúcich sa vrcholmi jednotkových kociek vrstvy  $V_1$ .
- (1.e) Počet jednotkových kociek v kocke  $K$  je 27.

## Analýza študentských riešení a diskusia

Pri analýze riešení sme si položili tieto otázky:

1. Aká bude celková úspešnosť riešenia jednotlivých otázok v zadaní úlohy?
2. Ako študenti graficky načrtnú jednotlivé situácie?
3. Aké chyby sa budú najčastejšie vyskytovať a z čoho môžu prameniť?

Na zodpovedanie prvej otázky sme vyhodnotili riešenia, pričom sme sa zamerali len na správnosť výsledku. Výsledné hodnotenie je v grafe 1.

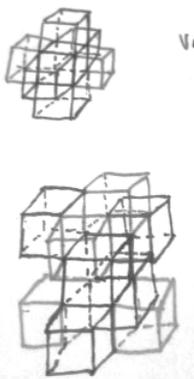


Graf 1: Počet správnych riešení v čiastkových úlohách

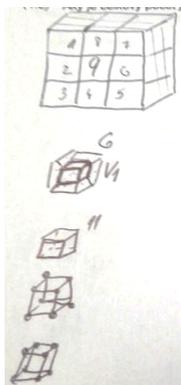
Ako vidíme, najmenšie problémy robilo študentom určenie počtu spoločných stien jednotkových kociek a následne určenie spoločných hrán. Najmenšia úspešnosť bola v určení celkového počtu jednotkových kociek, teda objemu kocky  $K$ .

Na zodpovedanie druhej otázky sme identifikovali pri grafic-  
kom znázornení jednotlivých situácií tieto náčrty:

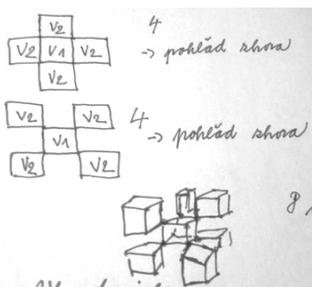
- priestorové znázornenie jednotkových kociek (obr. 2): 3D model,
- priestorové znázornenie jednej kocky (obr. 3): model kocka,
- rovinné i priestorové znázornenie (obr. 4): kombinovaný model,
- rovinné znázornenie (obr. 5): 2D model.



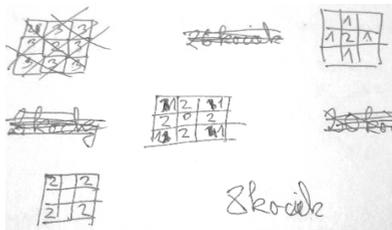
Obr. 2: 3D model



Obr. 3: Model kocka

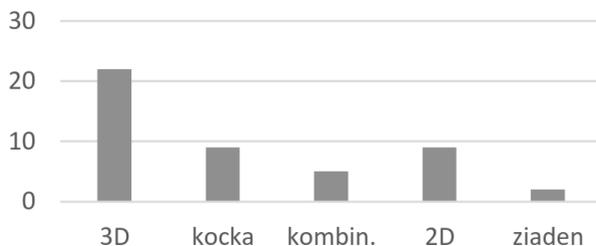


Obr. 4: Kombinovaný model



Obr. 5: 2D model

Na obrázkoch 2–5 sú zobrazené ukážky riešení, ktoré charakterizujú jednotlivé typy vyskytujúcich sa grafických náčrtov, pričom boli aj riešenia bez náčrtov. Ich celkový počet je vyjadrený v grafe 2. Ako vidíme, študenti sa najčastejšie snažili danú situáciu znázorniť priestorovo, i keď často neúspešne, prípadne s nesprávnym záverom. Viaceré náčrty sa viazali priamo na úvodný obrázok a študenti nepracovali s celou kockou  $K$  zadanou v úlohe, ale len s jej časťou znázornenou na obrázku. Môžeme to pripísať aj nesprávnemu pochopeniu úlohy, čo pramení z nepozornosti pri čítaní zadania. Niektorí študenti sa zamerali viac na správne odpovede ako na náčrty, neriešili teda úlohu dôsledne, prípadne si danú situáciu vedeli mentálne predstaviť, no mali problém ju znázorniť. Pri riešení tejto úlohy stačilo uvedomiť si základné vlastnosti kocky, no neštandardná situácia „vrstvenia kocky“ akoby tieto vedomosti potlačila.



Graf 2: Počet jednotlivých modelov v náčrtoch

Na zodpovedanie tretej otázky sme analyzovali jednotlivé riešenia. Pri určovaní počtu vrstiev v úlohe (1.a) v nesprávnych odpovediach boli uvedené 3 vrstvy, ktoré boli znázornené na úvodnom obrázku. Vychádzajúc aj z už uvedených výsledkov, by sme chceli poukázať na chyby pri riešení úlohy (1.e) prameniace z nevedomosti, nepozornosti alebo z neštandardnej situácie. Študenti nesprávne určili počet jednotkových kociek v kocke  $K$  takto:

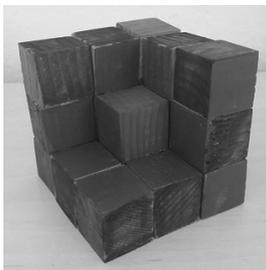
- $9 \cdot 6 + 1 = 55$ , teda 9 jednotkových kociek na jednej stene vonkajšej vrstvy, pričom stien je 6 a 1 kocka je vo vnútornej vrstve,
- $6 \cdot a \cdot a = 6 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ , použitie vzorca pre výpočet povrchu, nie objemu kocky,

- určenie počtu všetkých jednotkových kociek na úvodnom obrázku, neakceptovanie zadania úlohy pre kocku  $K$ ,
- určenie počtu jednotkových kociek pre kocku so stranou  $a = 5j$ , teda podľa úvodného obrázku.

V rámci výskumnej časti môžeme zhrnúť, že pri analýze riešení sa ukázala silná väzba študentov na obrázok v zadaní. Študenti preferovali priestorové grafické znázornenie jednotlivých situácií v čiastkových úlohách, ukázalo sa vážne neporozumenie v určení objemu kocky v neštandardnej situácii a problémy s čítaním s porozumením.

## Modifikácia problému pre primárne vzdelávanie

Pri práci so žiakmi na primárnom stupni vzdelávania by sme odporúčali uvedený problém prispôbiť na manipulačnú aktivitu podobnú stavbe z kociek obrázku 6.



Obr. 6: Ukážka práce s kockami

Pri vhodnom farebnom rozlíšení jednotkových kociek, prípadne jej hrán a vrcholov, považujeme túto úlohu za vhodnú na utvrdenie pojmov: stena, hrana, vrchol kocky, ako aj na rozvoj priestorovej predstavivosti žiakov. Žiaci môžu dostať hotovú „navrstvenú“ kocku  $K$ , ktorú budú postupne rozkladať na jednotkové kocky podľa inštrukcií učiteľa. Budú tak odhaľovať vnútornú vrstvu  $V_1$  a hľadať vzťahy medzi jednotkovými kockami jednotlivých vrstiev vzhľadom k spoločným stenám, vrcholom a hranám. Manipulácia s klasickými kockami je však obmedzená na možnosti vyberania jednotkových kociek tak, aby sa kocka  $K$  nerozpadla.

Existujú však stavebnice, ktoré tento nedostatok eliminujú vďaka využitiu napr. magnetov, suchých zipsov alebo iných systémov.

Ďalej uvádzame možnosti využitia počítačového prostredia, ktoré je možné prispôsobiť rôznym vekovým kategóriám žiakov. Zatiaľ čo mladší žiaci môžu pracovať s vopred pripravenými ap-letmi, starší žiaci môžu sami skladať a rozkladať jednotkové kocky podľa možností zvoleného softvéru. My prezentujeme využitie dynamického softvéru GeoGebra, ktorý je v našom vzdelávacom prostredí už celkom dobre udomácnený.

## Využitie softvéru GeoGebra pri riešení neštandardného geometrického problému

Častokrát sa stáva, že vedomosti z oblasti priestorovej geometrie sú limitované na naučenia sa základných vlastností základných geometrických telies (kocka, kváder, guľa apod.) a na výpočet ich objemov a povrchov. V minulosti existovali dva spôsoby reprezentácie geometrických telies, tj. učitelia využívali buď klasické 3D modely z dreva, plastu a kovu, alebo využívali ikonické rovinné reprezentácie týchto útvarov na vyjadrenie trojrozsomernej podstaty telesa (napr. náčrt kocky na tabuľu – náhľad sprava). Ako sme už vyššie uviedli, podľa Andrade a Montecina (2011) je náčrt ikonických reprezentácií jedným z hlavných dôvodov deformácie konštrukcie správnej mentálnej predstavy.

V súčasnosti existuje ďalšia možnosť reprezentácie útvarov priestorovej geometrie, a to vďaka dynamickým geometrickým softvérom. Následne ponúkame ukážku, ako učiteľ môže ľahko demonštrovať problémy tohto typu využitím softvéru GeoGebra. Máme zato, že nami uvádzaný problém (resp. podobné problémy aj s inými geometrickými telesami), by mohol byť zaradený do motivačnej i fixačnej fázy vyučovacej hodiny. Žiaci, ešte pred riešením štandardných stereometrických úloh, by mali možnosť manipulovať s objektmi, nazerať na problém z rôznych perspektív, a tak „absorbovať“ správny mentálny obraz, ktorý im následne pomôže pri konštrukcii správnych mentálnych predstáv.

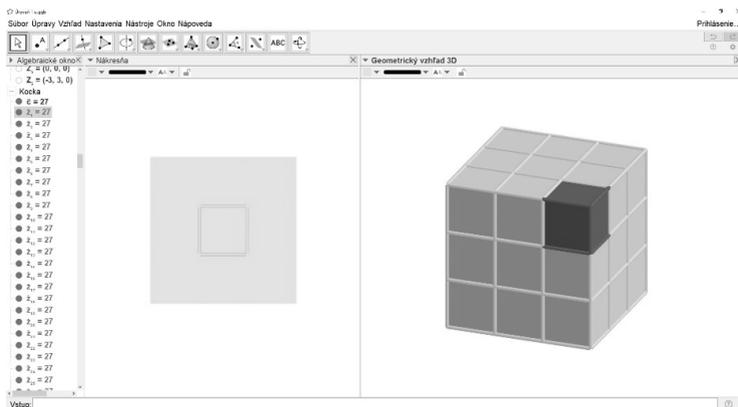
## Ukážka riešenia úlohy v GeoGebre

Podľa vyššie uvedeného zadania problému, základnou kockou je kocka  $K$  s dĺžkou hrany  $a = 3j$  vytvorená z jednotkových kociek. Poznamenajme, že podstata jeho riešenia spočíva v správnej vizualizácii skrytých priestorových objektov, tj. vo vytvorení si správnej mentálnej predstavy vnútorného usporiadania kocky  $K$ . Avšak ak by sme uvedený problém chceli použiť ako motivačný s využitím softvéru GeoGebra, úlohou žiaka bude skryť „nepotrebné“ jednotkové kocky vrstvy  $V_2$ . Odporúčame, aby učiteľ pre svojich žiakov zostrojil zadanie problému vopred, keďže konštrukcia trojrozmerných útvarov si vyžaduje určité zručnosti práce v prostredí GeoGebra. Inými slovami, hlavným cieľom nie je žiakov naučiť pracovať so spomínaným programom. Dynamický geometrický softvér má slúžiť ako nástroj na:

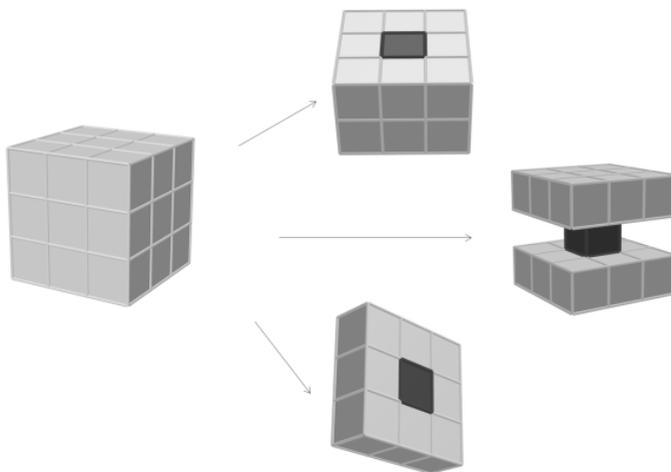
- manipuláciu s kockami (zobraziť objekt, skryť objekt, rotácia objektu a pod.);
- vytvorenie si korektného obrazu rôznych situácií z viacerých uhlov pohľadu;
- precvičovanie si vizualizačných schopností.

V takomto prípade je práca so softvérom veľmi jednoduchá, vďaka čomu sa môžeme plne sústrediť na riešenie jednotlivých úrovní. Úlohou žiaka bude iba kliknúť na vybraný objekt, vďaka čomu ho buď skryje, alebo zobrazí (obr. 7). Okrem *Geometrického vzhľadu 3D* majú žiaci možnosť pracovať aj s pôdorysom kocky  $K$ . Tento spôsob manipulácie s geometrickými telesami môže výrazne ovplyvniť žiacke chápanie trojrozmerných objektov z ich dvojrozmernej reprezentácie.

Úlohou žiaka na úrovni (1.a) je určiť počet rôznofarebných vrstiev v kocke  $K$ . Na obrázku 8 je možné vidieť ukážku troch rôznych spôsobov skrývania kociek vrstvy  $V_2$ . Žiak má možnosť zvoliť si svoj spôsob skrývania týchto kociek a má možnosť nazeráť na danú situáciu z rôznych uhlov pohľadu, aby získal čo najkomplexnejší obraz. Jednou z výhod využívania dynamických softvérov je možnosť použitia takých spôsobov riešenia problému, ktoré nie sú štandardne možné v bežných podmienkach. Napríklad, nie je možné ponechať iba spodnú a hornú stenu kocky  $K$ .



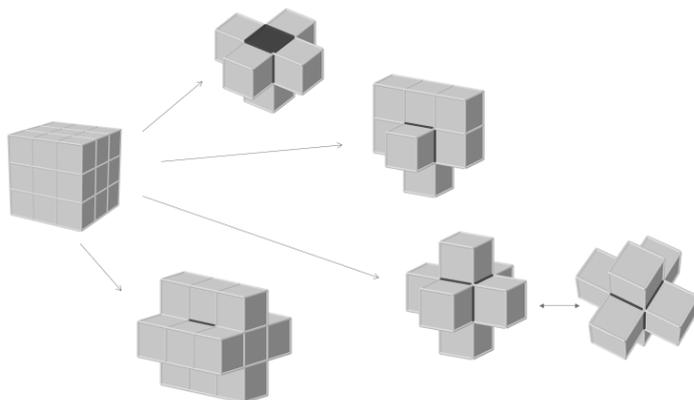
Obr. 7: Ukážka práce v programe GeoGebra



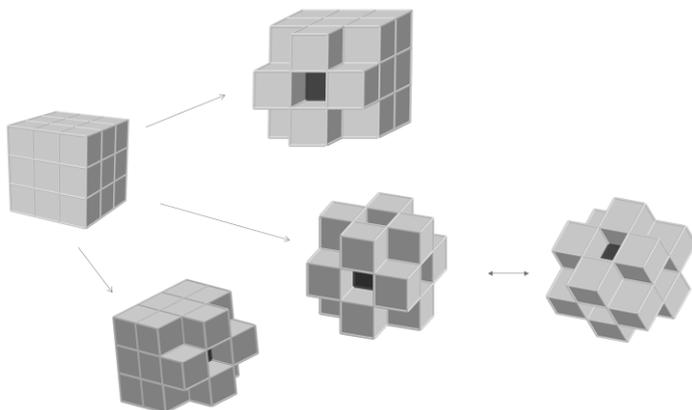
Obr. 8: Ukážka riešenia úrovne 1.a

Nasledujúce obrázky 9, 10, 11 znázorňujú ukážku riešenia úrovní (1.b), (1.c), (1.d). Rovnako ako na úrovni (1.a), základnou kockou je kocka  $K$ , kde úlohou žiaka je skryť kocky vonkajšej vrstvy  $V_2$ . Riešenie úrovne (1.e) spočíva v určení celkového počtu jednotkových kociek, teda objemu kocky  $K$ .

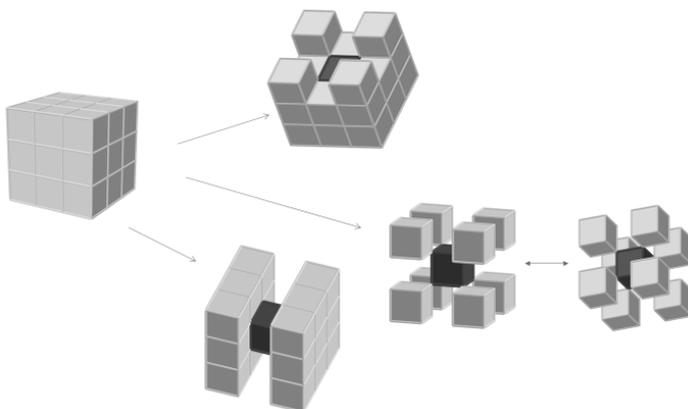
Uvedená neštandardná úloha má rôzne využitie v praxi. Učiteľ sa môže zamerať na priestorové usporiadanie objektov, vlastnosti objektov, rotáciu objektov apod. Záleží na ňom, na ktorý dôležitý aspekt chce žiakov upozorniť.



Obr. 9: Ukážka riešenia úrovne 1.b



Obr. 10: Ukážka riešenia úrovne 1.c



Obr. 11: Ukážka riešenia úrovne 1.d

Medzi viaceré výhody, ktoré nám ponúkol softvér GeoGebra pri riešení uvádzaného neštandardného problému, zaraďujeme:

- presnú a usporiadanú konštrukciu kocky K vytvorenú z jednotkových kociek,
- priehľadnosť stien (viditeľnosť všetkých vrstiev kocky), viditeľnosť hrán kocky vnútornej vrstvy,
- farebné rozlíšenie jednotkových kociek v oboch vrstvách,
- manipulácia s kockami (zmena perspektívy),
- korektná demonštrácia jednotlivých situácií.

## Záver

V článku sme prezentovali jeden neštandardný stereometrický problém a možnosti jeho využitia v školskej praxi. Analyzovali sme riešenia vysokoškolských študentov, budúcich učiteľov primárneho stupňa vzdelávania, ktoré nám odhalili viaceré formálne vedomosti a problémy s priestorovým vnímaním, ako aj grafickým znázorňovaním priestorových objektov. Zo skúseností s riešením uvedeného problému by sme odporúčali pri zadávaní úlohy na papieri nedávať obrázok, ako bol v našom prípade obrázku 1. Ukázala sa silná väzba riešiteľa na tento obrázok a máme za to, že to mohlo ovplyvniť aj samotné riešenie, častokrát nesprávne. Žiak

si má podľa slovného alebo písaného popisu danú situáciu vedieť predstaviť, v prípade potreby môžeme obrázkov len na chvíľu ukázať. Do praxe odporúčame venovať viac pozornosti vizualizácii skrytých objektov, využiť potenciál dynamických geometrických softvérov a iných prostriedkov IKT, pri práci so žiakmi na primárnom stupni vzdelávania klásť dôraz na manipulačné činnosti a objavovanie, viac sa zamerať na neštandardné priestorové situácie a objekty a ich grafické znázornenie v rovine.

## Literatura

- [1] Andrade, M. & Montecino, A. (2011). La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano. In: *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, (1–10). Recife, Brasil.
- [2] Battista, M. T. (1990). Spatial Visualization and gender differences in high school geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 47–60.
- [3] Linn, M. C. & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of gender differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child development*, 56, 1479–1498.
- [4] Makina, A. (2010). The role of visualisation in developing critical thinking in mathematics. *Perspectives in Education*, 28(1), 24–33.
- [5] McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: psychometric studies and environment, genetic, hormonal and neurological influences. *Psychological bulletin*, 86, 889–918.
- [6] Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1960). *The child conception of geometry*. London: Routledge & Kegan.
- [7] Presmeg, N. C. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42–46.
- [8] Vágová, R. (2018). Problém vrstvenia kociek – vizualizácia „neviditeľných“ objektov. In: *Študentská vedecká konferencia 2018* (494–501). Banská Bystrica: UMB.

## Abstract

In the paper, we wanted to point out the need to increase spatial skills as one of the components of mathematical literacy in the education of future primary school teachers. The aim of the research was to identify and then to analyze mistakes and procedures of student solutions with an emphasis on understanding, the ability to visualize and graphically illustrate one unusual stereometric problem. The sample consisted of 48 future primary school teachers. The analysis showed a strong student bond to an image, students preferred spatial graphical representation of individual situations in partial tasks, there has been a serious misunderstanding in determining the cube volume in a non-standard situation and reading comprehension problems. The possibilities of using GeoGebra software and manipulative activities in problem solving are presented too.

*Gabriela Pavlovičová*

*Renáta Vágová*

*e-mail: gpavlovicova@ukf.sk*

*e-mail: renata.vagova@ukf.sk*

*Katedra matematiky FPV UKF v Nitre*

*Tr. Andreja Hlinku 1*

*949 74 Nitra, Slovensko*