Petra Bušková

Spor o nekonečno

Učitel matematiky, Vol. 28 (2020), No. 1, 2–11

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148625

SPOR O NEKONEČNO

Petra Bušková

Budoucnost matematiky

Historie matematiky není příliš rozšířeným a známým vědním oborem, zdá se být spíše okrajovou částí matematiky i historie. Její přínos však tkví v propojení dvou zdánlivě málo souvisejících vědních odvětví. Sám Henri Poincaré, jemuž se bude tento článek z velké části věnovat, vyzdvihoval propojování zdánlivě vzdálených jevů: „Má-li nový výsledek cenu, má ji proto, že spojuje prvky odedávna známé, avšak dotud rozptýlené a zdánlivě cizorodé, a tím náhle zavádí řád tam, kde zdál se vládnout nepořádek.“ (Poincaré, 1909). Není pochyb, že z historie se můžeme nejen poučit. V matematice můžeme nalézat souvislosti mezi matematiky i mezi jejich objevy, můžeme sledovat jejich vzájemné ovlivňování, ať už je to formou podpory a rozvíjení myšlenek, nebo formou vroucích sporů.

Při průzkumu české časopisecké literatury minulého století často narážíme na jakési ozvěny světového dění. Jednou z těchto ozvěn je přednáška Henriho Poincarého ze IV. mezinárodního kongresu matematiků konaného v Římě v roce 1908, kterou pro Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky se svolením autora přeložil Bohumil Bydžovský. Přednáška nese po překladu název *Budoucnost mathematiky*.

Poincaré v první části přednášky nastínil vývoj matematiky a poukázal na nutnost vidět věci odlišně (před Newtonem vidělo mnoho lidí padat jablko, ale pouze on z tohoto faktu něco vyvodil) a spojovat si zdánlivě vzdálené. Současně varuje před účelovostí matematiky, matematik má pěstovat vědu pro své potěšení, ne jen aby vyhověl přání zákazníků (nejčastěji fyziků). Úlohou vědy je podle Poincarého zjednat úsporu myšlení, s čímž spojuje také matematickou estetiku. Naráží na problém požadavku přesnosti důkazu, kvůli němuž nabydou matematická jednání značné délky a důkazy mohou ztratit svou eleganci a harmonii. Jako nesprávnou cestu v pokroku matematiky vidí Poincaré přílišné specializování, které by mohlo oddálit sblížení jejích různých částí.

V druhé části přednášky se Poincaré věnoval jednotlivým částem matematiky a popsal jejich předpokládaný vývoj. Konkrétně se věnoval aritmetice, algebře, diferenciálním rovnicím, diferenciálním rovnicím parciálním, Abelovým funkcím, teorii funkcí, teorii grup, geometrii, cantorismu a hledání postulátů.

Zaměřme se nyní na část Poincarého přednášky věnující se cantorismu (učení Georga Cantora, dnes bychom jej nazvali naivní teorie množin). Autor krátce poukazuje na paradoxy (které by potěšily i Zenona Eleatského) a domnívá se, že cestou k vyřešení vzniklých problémů v cantorismu je nikdy nezavádět entity, které nelze úplně definovat konečným počtem slov (Poincaré, 1909). Ačkoli tomuto tématu ve zmíněné přednášce Poincaré nevěnoval příliš mnoho prostoru, je zřejmý jeho nesouhlas s Cantorovou teorií. Tento spor dvou velkých matematiků (a mnohých dalších, Poincaré byl pouze jedním z řady odpůrců Cantorovy teorie, tzv. intuicionistů) se v české časopisecké literatuře objevil jen nenápadně (následně i v článku *Jak soudil H. Poincaré o vztazích mathematiky k logice* od Karla Vorovky z roku 1914 v témže časopise), za našimi hranicemi byl však velmi výrazný. Dovolte mi nyní ve zkratce připomenout život a dílo Henriho Poincarého i Georga Cantora, abychom mohli lépe pochopit samotnou podstatu jejich neshod.

Henri Poincaré

Henri Poincaré, celým jménem Jules Henri Poincaré, byl francouzský matematik (1854–1912), jehož přínos vědě a vliv byl obrovský, často je považován za jednu z nejgeniálnějších osobností vůbec. Narodil se v roce 1854 ve francouzském městě Nancy, kde jeho otec působil jako profesor medicíny na univerzitě. Vyrůstal tedy v dobře situované a společensky uznávané rodině. Jeho bratranec Raymond Poincaré zastával ve Francii několikrát funkci premiéra a během první světové války byl dokonce prezidentem Francie (O'Connor & Robertson, 2003). Henri studoval dva roky matematiku na pařížské polytechnice (École Polytechnique), následně studoval na Hornické vysoké škole v Caen (Gribbin, 2009). Během své krátké praxe inženýra hornictví získal roku 1879 na poli diferenciálních rovnic doktorský titul opět na polytechnice. Jako student se zabýval širokou škálou literatury, od populárně naučných článků až po náročné vědecké texty. Díky své vynikající paměti si dokázal z literatury hodně odnést a získané poznatky využít jinde (O'Connor & Robertson, 2003).

Poincaré byl významnou osobností v celé řadě různých odvětví. Mimo diferenciální rovnice, pomocí kterých se pokoušel popsat stabilitu sluneční soustavy (známý problém tří těles), tak učinil objevy jedněch z prvních aplikací neeuklidovské geometrie. Dospěl k výsledkům, které zapříčinily vznik teorie chaosu a matematické topologie (Gribbin, 2009). Jeho studie v oboru matematické fyziky se velmi přiblížila Einsteinově speciální teorii relativity objevené v tomtéž období. Důvodem, proč se Poincarého teorie relativity příliš neprezentuje, je skutečnost, že nikdy nepodnikl krok k přeformulování pojmů čas a prostor do pojmu časoprostor. Poincaré zkrátka nepokládal tento objev za nijak převratný a využitelný (Gray, 2018). Významných výsledků dosáhl i v mnoha dalších odvětvích, pro které bohužel v tomto článku nezbývá místo.

V neposlední řadě proslul Poincaré jako filosof matematiky a vědy, mimo jiné díky svým přednáškám a esejům publikovaným ve čtyřech souborech s názvy *Věda a hypotéza* (1903), *Hodnota vědy* (1905), *Věda a metoda* (1908) a *Poslední myšlenky* (publikováno posmrtně v roce 1912) (Poincaré & Fiala, 2010).

Právě k Poincarého práci a myšlenkám v rámci filosofie matematiky se budeme v tomto článku později vracet. Skutečnost velkého vlivu tohoto matematika jen potvrzuje vydání českého překladu jeho vybraných textů k filosofii matematiky a vědy (výběr ze čtyř zmíněných Poincarého publikací) pod názvem *Číslo, prostor, čas* (2010), jež uspořádal a přeložil Jiří Fiala.

Během svého života získal Poincaré řadu ocenění a medailí, byl několikrát nominován na Nobelovu cenu za fyziku (The Nobel Prize, 2018) a v roce 1906 se stal prezidentem Akademie věd (Académie des Sciences) (O'Connor & Robertson, 2003).

Georg Cantor

Pomyslným oponentem Poincarého (alespoň v poli aritmetiky nekonečna) byl Georg Cantor, celým jménem Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918). Ačkoli se Cantor narodil v Petrohradu v Rusku, je díky většině života prožité v Berlíně a Halle považován za německého matematika. Georg Cantor se narodil do hudebně talentované rodiny úspěšného obchodníka, i on sám byl výtečným houslistou a brzy se k jeho hudebnímu nadání přidalo nadání matematické. Poté, co se celá rodina přestěhovala do Německa, studoval Cantor krátce na univerzitě v Curychu, brzy však přešel na Berlínskou univerzitu, kde se specializoval na fyziku, filosofii a matematiku. Jeho učiteli byli například Weierstrass, Kummer a Kronecker (ten se posléze stal Cantorovým hlavním vědeckým odpůrcem). Zprvu se Cantor věnoval teorii čísel, později, když získal – po krátkém působení jako učitel v dívčí škole – místo na univerzitě v Halle[1], se zabýval teorií trigonometrických řad, která jej dovedla až k jeho životnímu dílu – teorii množin a pojmu nekonečných čísel (O'Connor & Robertson, 1998).

Za množinu Cantor považoval každý souhrn určitých rozlišitelných objektů našeho nazírání nebo našeho myšlení shrnutých v jeden celek (sám však toto nepokládal za definici, neboť je pojem množina podle jeho představ natolik samozřejmý, že není žádné definice třeba) (Fuchs, 1999). Cantor zkoumal odlišnosti v chování konečných a nekonečných množin – pro nekonečnou množinu platí, že některé z jejích podmnožin mají stejný počet objektů jako sama původní množina. Zavedl pojmy ordinálních a kardinálních čísel[2],

[1] Zde se seznámil se svým kolegou a přítelem Richardem Dedekindem.

[2] Kardinální číslo množiny udává její mohutnost, v konečných množinách je kardinální číslo totožné s počtem prvků dané množiny. Ordinální číslo množiny se vztahuje k dobře uspořádaným množinám, tedy k množinám, jejichž každá neprázdná podmnožina obsahuje nejmenší prvek. Samotné ordinální číslo množiny nám tedy říká, jakým způsobem je množina uspořádaná (například na základě velikosti prvků). U konečných dobře uspořádaných množin jsou kardinální i ordinální čísla shodná, v nekonečných množinách se však rozcházejí.

objevil důkaz o nespočetnosti množiny reálných čísel (v jakémkoli intervalu existuje více čísel než v množině všech přirozených čísel, existují tedy různě mohutná nekonečna) a předložil matematickému světu slavný problém hypotézy kontinua, o kterém se sám domníval, že jej brzy podloží důkazem. Hypotéza kontinua tvrdí, že nejsou žádná kardinální čísla mezi $\aleph_0$ [alef nula] (kardinálním číslem množiny, jež lze vzájemně jednoznačně zobrazit na množinu přirozených čísel) a kardinálním číslem $c = 2^{\aleph_0}$, vyjadřujícím počet bodů na přímce (Gribbin, 2009). Jinak řečeno, neexistuje množina s mohutností ostře větší, než je mohutnost množiny přirozených čísel, a zároveň ostře menší, než je mohutnost množiny všech čísel reálných.[3] Při své práci Cantor objevil tzv. Cantorovo diskontinuum, což je množina bodů, které zůstanou na přímce po nekonečném opakování jednoduché operace – odebírání prostřední třetiny úsečky (začínáme s jednou úsečkou, následně odebíráme prostřední třetinu každé ze vzniklých úseček). Dnes bychom Cantorovo diskontinuum nazvali fraktálem.[4]

Georga Cantora trápila během posledních desetiletí života stále častěji se objevující období hluboké deprese, která mu znemožňovala vědeckou činnost. Některé zdroje uvádí, že Cantorovy deprese byly způsobeny nepřijetím jeho teorie množin a opakovaným selháváním v důkazu hypotézy kontinua. Ke konci svého života se Cantor odvrátil od matematiky a věnoval se zejména teologickým otázkám a dílu Shakespeara (O'Connor & Robertson, 1998).

Přínos Georga Cantora matematice byl velmi významný. Ačkoli byla zpočátku teorie množin matematiky těžko přijímána, postupně podnítila další rozvoj několika matematických disciplín, zejména matematické logiky, ale i teorie funkcí, topologie nebo analýzy. Cantorova teorie množin také zapříčinila změnu mate-

---

[3] O téměř 60 let později dokázal Kurt Gödel, že pokud je teorie bezesporná, je bezesporná i po přijetí hypotézy kontinua (to však není důkaz platnosti hypotézy kontinua). Konečně o dalších 20 let později dokázal Paul Cohen, že hypotéza kontinua je v teorii množin nerozhodnutelné tvrzení (Fuchs, 1999).

[4] V Cantorově době však ještě pojem fraktál neexistoval, zavedl jej až v roce 1975 Benoît Mandelbrot (O'Connor & Robertson, 1999).

matického vzdělávání známou pod pojmem „nová matematika“ (původně ve Spojených státech amerických) (Gribbin, 2009).

Spor Poincarého a Cantora

Spor Cantora a Poincarého vyvěrá z různého chápání těžko uchopitelného pojmu „nekonečno“. Jen definic pojmu nekonečno se v průběhu vývoje matematiky objevilo nesčetně a dodnes neexistuje jeho jednotná definice. Jako příklad lze uvést definice Barucha Spinozy (17. století; nekonečné je pouze to, co není schopné žádného dalšího růstu), Augustina Louise Cauchyho (19. století; nekonečno je proměnlivá veličina, jejíž hodnota neomezeně roste a právem by mohla být větší než každá daná veličina, ať už jakkoli velká) (Kolman & Roreitner, 2013) a definici Cauchyho vrstevníka a našeho rodáka Bernarda Bolzana (nekonečná mnohost je taková mnohost, která je větší než každá konečná, tj. mnohost, jež je uzpůsobena tak, že každá konečná množina představuje pouze její část) (Bolzano & Zich, 1963).

Někteří matematici odporovali nejen různým definicím nekonečna, ale už samotné představě něčeho nekončícího, popírali existenci nekonečných množin. Už Bolzano vyvracel připomínky odpůrců existence nekonečné množiny, například tvrzení, že nekonečná množina nemůže existovat, protože nemůže být nikdy sjednocena v celek, nikdy nemůže být sjednocena v myšlence. Tento názor Bolzano vyvrátil dvěma tvrzeními. Pokud bychom si nebyli schopni představit množinu, aniž bychom si představili každý její prvek jednotlivě, pak bychom nemohli sjednotit například množinu všech celých čísel. Vytvářet si představu každého prvku jednotlivě ale není vůbec nutné, umíme přeci sjednotit množinu všech obyvatel Pekingu, aniž bychom pomysleli na každého jednotlivého obyvatele. Stejně tak můžeme sjednotit i nekonečnou množinu všech přirozených čísel. Bolzanův argument na nemožnost sjednocení v myšlence je takový, že množina existuje nezávisle na tom, zda si ji někdo myslí (Kolman & Roreitner, 2013). Například nemůžeme tvrdit, že před objevením tučňáků neexistovala žádná množina všech tučňáku na Zemi, protože si ji nikdo nemohl myslet.

V době Poincarého a Cantora se tolik nevedl spor o existenci nekonečna, jako spíše o jeho druh. Už mnoho let před těmito matematickými velikány se vědělo například o nekonečnosti přímky. Její nekonečnost však netkvěla v představě celé přímky jako nekonečného objektu (tzv. aktuální nekonečno), ale v možnosti přímku vždy ještě o kousek prodloužit – přímka (a i jiné nekonečné objekty) měla tvar potenciálního nekonečna. Ačkoli se tyto dva pohledy nemusí dnešnímu čtenáři zdát příliš odlišné, ve skutečnosti byla cesta k představě „celé“ nekonečné přímky, to znamená k aktuálnímu nekonečnu, velmi dlouhá a náročná. Už od dob antiky se považovalo za jediné nekonečno podrobitelné lidskému zkoumání nekonečno potenciální, v okamžiku prolomení tohoto paradigmatu Georgem Cantorem se tedy zákonitě vytvořila vlna kritiky.

Henri Poincaré považoval nekonečno za velmi důležité,[5] avšak jeho nekonečno nesmělo nabírat tvaru nekonečna aktuálního, zatímco Georg Cantor založil svou teorii množin a transfinitní čísla (čísla vztahující se k nekonečným množinám) právě na aktuálním nekonečnu. Ačkoli Cantorův odvážný krok k transfinitním číslům byl po dlouhou dobu zavrhován řadou matematiků, některé významné osobnosti se za Cantora v boji postavily. Příkladem může být tehdy mladý, ale velmi významný matematik David Hilbert, který o Cantorovi řekl: „Nikdo už nás nevyžene z ráje, do kterého nás on uvedl.“ (Mareš, 2011).

Spor Poincarého s Cantorem byl dán již jejich odlišným smýšlením o matematice nejen v otázce nekonečna. Na počátku 20. století začali matematici, i díky vzniku neeuklidovských geometrií, cítit potřebu vystavět matematiku na pevnějších základech pomocí rozmachující se matematické logiky. Matematici se tehdy rozdělili do dvou skupin – jedni matematickou logiku přivítali, souhlasili s vytvořením nových základů (čemuž měla pomoci teorie množin) a s důsledným dokazováním i na první pohled zřejmých formulí, druzí se nechtěli vzdát matematické intuice jako hlavního nástroje matematiků. Čtenář již pravděpodobně sám odhadl, do kterého tábora patří Cantor a kam se řadí Poincaré.

[5] Bez nekonečna by nebylo vědy, protože by nebylo nic obecného (Poincaré, 1952).

Zatímco Cantor se jako zastánce cesty dlážděné logikou a matematickými důkazy mohl vzdálit od matematiky dobře uchopitelné lidskou intuicí a dopracovat se k různým mohutnostem nekonečna, ke kardinálním a ordinálním číslům, matematik řídící se zejména intuicí jako Poincaré nemohl Cantorovy výsledky dost dobře přijmout. Poincaré ve svém eseji *Matematické definice a vyučování* vyslovuje názor, že díky intuici zůstává svět matematiky ve styku se světem reálným. Logici dle Poincarého hloubí hluboké propasti mezi matematikou a skutečností. Není však pravdou, že by Poincaré zavrhoval matematickou logiku, pouze tvrdí, že logika je nástroj dokazování, ale intuice nástroj objevování, nelze se tedy spoléhat na matematickou logiku bez užití lidské intuice (Poincaré & Fiala, 2010). Jako důkaz nemožnosti spoléhat se na matematickou logiku bez ohledu na intuici poukazuje Poincaré na antinomie vyskytující se v Cantorově teorii množin (příkladem je populární Russellova antinomie: Holič ze Sevilly holí právě ty ze sevillských mužů, kteří se neholí sami. Kdo však holí holiče?).

Ačkoli byl Henri Poincaré opravdovým velikánem nejen v poli matematiky, s odstupem času se zdá, že pomyslným vítězem sporu se stal Georg Cantor. Původní Cantorova teorie množin s jednoduchou a intuitivní „definicí“ pojmu množina byla upravena tak, aby se vyvarovala všem antinomiím a aby mohla tvořit pevný základ matematice. Matematika zřejmě již natolik pokročila, že není dost dobře možné opírat se stále pouze o intuici, a matematická logika je velmi mocný nástroj, jehož je třeba využívat i za cenu občasné ztráty elegance.

Literatura

[1] Bolzano, B. & Zich, O. (1963). *Paradoxy nekonečna.* Praha: Československá akademie věd.

[2] Fuchs, E. (1999). *Teorie množin pro učitele.* Brno: Masarykova univerzita.

[3] Gray, J. J. (2018). Henri Poincaré. *Encyclopaedia Britannica.* Dostupné z: `http://www.britannica.com/biography/Henri-Poincare/`

[4] Gribbin, J. R. et al. (2009). *100 nejslavnějších vědců: nejvýznamnější osobnosti vědy od starověkého Řecka po současnost (Encyklopedie Britannica)*. Brno: Jota.

[5] Kolman, V. & Roreitner, R. (2013). *O špatném nekonečnu*. Praha: Filosofia.

[6] Mareš, M. (2011). *Příběhy matematiky: stručná historie královny věd*. Příbram: Pistorius & Olšanská.

[7] O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. (1998). Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor. *MacTutor History of Mathematics archive*. Dostupné z: `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cantor.html/`

[8] O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. (1999). Benoît Mandelbrot. *MacTutor History of Mathematics archive*. Dostupné z: `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mandelbrot.html/`

[9] O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. (2003). Jules Henri Poincaré. *MacTutor History of Mathematics archive*. Dostupné z: `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Poincare.html/`

[10] Poincaré, H. (1909). Budoucnost mathematiky. *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, 38(2), 129–149, přeložil B. Bydžovský.

[11] Poincaré, H. (1952). *Science and Hypothesis*. New York: Dover Publications.

[12] Poincaré, H. & Fiala, J. (2010). *Číslo, prostor, čas: výbor z prací o filosofii vědy*. Kanina: OPS.

[13] The Nobel Prize: Nomination Database (2018). *Henri Poincaré*. Dostupné z: `https://www.nobelprize.org/nomination/redirector/?redir=archive/show_people.php&id=7313/`

Abstract

The article deals with the dispute of two prominent personalities – French mathematician, physicist and philosopher Henri Poincaré and German mathematician and logician Georg Cantor. Their dispute was related to set theory created by Cantor, especially the conception of infinity. The actual infinity on which Cantor based his set theory, Poincaré, as well as other representatives of intuitionism, could not accept. Intuitionists relied exclusively on potential infinity. The article introduces the topic by a short introduction of both mathematicians, followed by a brief look at the evolution of understanding infinity. In the next part, the essence of the dispute between Georg Cantor and the intuitionists, represented by Henri Poincaré, is presented.

Petra Bušková
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita
Kotlářská 2
611 37 Brno
e-mail: p.buskova@mail.muni.cz