Luděk Spíchal

Využití podobnosti trojúhelníků pro měření výšek

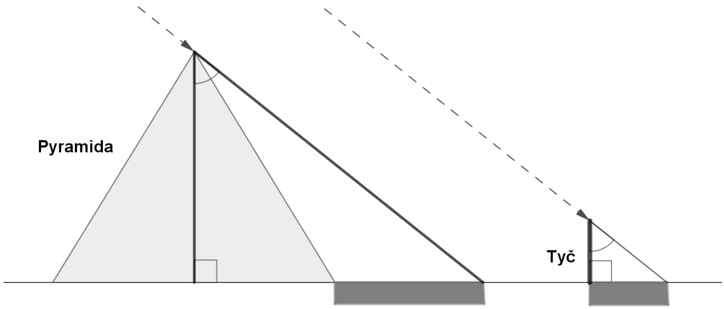
Učitel matematiky, Vol. 26 (2018), No. 4, 220–235

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148591

VYUŽITÍ PODOBNOSTI TROJÚHELNÍKŮ PRO MĚŘENÍ VÝŠEK

Luděk Spíchal

Úvodem



Obr. 1: Thaletova metoda určení výšky pyramidy

Řecký myslitel Thales[1] v 6 st. př. n. l. veřejně ukázal, jak změřit výšku Velké pyramidy v Gíze bez nutnosti na ni vyšplhat. Poblíž pyramidy (v obr. 1 znázorněna šedým průmětem) zabodl do země tyč vrhající na zem stín (obdobně stín vrhala pyramida). Vzhledem k faktu, že sluneční paprsky lze považovat za rovnoběžné, jsou pravoúhlé trojúhelníky v obr. 1 podobné. Problém s určením vzdálenosti od středu pyramidy vyřešil Thales tak, že počkal na okamžik, kdy sluneční paprsek splýval se stěnou

[1] Thales z Milétu (asi 624 př. n. l. až asi 548 př. n. l.) byl řecký filosof, geometr a astronom.

pyramidy (stín vrcholu se pak promítne do vrcholu šedého trojúhelníku). Vzdálenost od středu pak byla polovinou délky strany pyramidy (Bellos, 2016).[2]

Použitý způsob výpočtu výšky můžeme zapsat takto

$$\frac{\text{výška tyče}}{\text{délka stínu tyče}} = \frac{\text{výška pyramidy}}{\text{vzdálenost od středu pyramidy ke konci stínu}}.$$

Výškoměry

Měřit výšku použitím stínu je značně nepraktické, v minulosti byla zkonstruována řada různých typů výškoměrů.

Výškoměry (hypsometry) jsou přístroje umožňující stanovit svislou vzdálenost mezi vodorovnými rovinami vedenými patou a vrcholem stromu.[3]

Zejména v průběhu 19. století se objevila řada různých typů výškoměrů, jejichž konstrukce, přes vzhledovou rozdílnost, obvykle vychází z podobnosti trojúhelníků a použití jednoduchých poměrů vzdáleností.

V článku poukážeme na příklady dvou typů výškoměrů, jejichž konstrukce nabízí možnost využití ve školské matematice.[4]

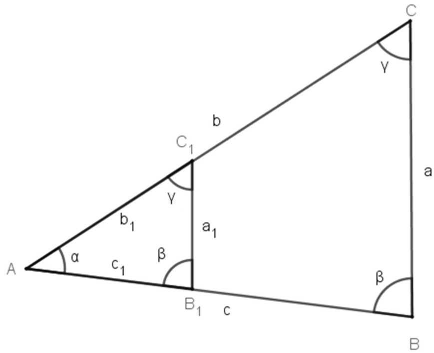
[2]Thaletův výpočet byl založen na abstraktním trojúhelníku, jehož jednu stranu tvořily sluneční paprsky. Egypťané oproti tomu měli sice značné praktické dovednosti, matematiku však používali převážně ke zkoumání skutečných trojúhelníků.

[3]Vzhledem k povaze a původnímu použití popisovaných pomůcek bude v článku řeč zejména o měření výšek stromů. To samozřejmě nevylučuje jejich použití i pro měření výšek jiných volně stojících objektů.

[4]V obou případech budeme při měření výšky uvažovat svisle stojící strom. Lesníci výškou stromu rozumí vzdálenost mezi horizontálními rovinami procházejícími patou stromu a nejvyšším vegetačním orgánem stromu. Měření výšek listnatých stromů je technicky složitější, než v případě jehličnanů, které mají obvykle snadno viditelný vrchol. V případě listnatých stromů je nutné před měřením sledovat průběh kmene a pokusit se nalézt místo, kde se horizontální rovina dotýká obrysové křivky koruny.
Více např. `http://www.uhul.cz/images/nil/metodika_sberu/kap_3_6_0.pdf`

Podobnost trojúhelníků

Podobností můžeme rozumět geometrické zobrazení jednoho geometrického útvaru na jiný útvar se stejným tvarem.



Obr. 2: Podobnost trojúhelníků při konstrukci výškoměru

Trojúhelník AB_1C_1 je podobný trojúhelníku ABC (obr. 2), právě když existuje kladné číslo k takové, že pro jejich strany platí: $c_1 = kc$, $b_1 = kb$, $a_1 = ka$.[5]

Trojúhelník AB_1C_1 je zmenšeným obrazem trojúhelníku ABC (poměr zmenšení je dán číslem k). Výškoměry jsou přístroje, které umožňují využít podobnost trojúhelníků (vypočtený koeficient k) pro vytvoření výškoměrné stupnice s přímým odečtem výšky stromu.

Christenův výškoměr

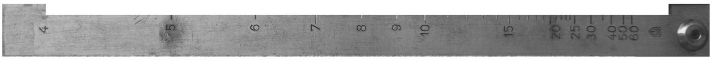
Christenův[6] výškoměr (obr. 3) je v původní podobě mosazné pravítko s rozměry $33{,}5 \times 2{,}8$ cm (Ruecker, 2013).[7] Záměrné zařízení

[5]Číslo k (koeficient podobnosti) udává zvětšení ($k > 1$), zmenšení ($k < 1$), popř. shodnost ($k = 1$).

[6]Traugott Christen (1874–1933) byl švýcarský lesník. Výškoměr vyvinul v roce 1891. Originál patentového zápisu Christenova výškoměru, např. zde: `http://www.plumbbob.de/media//DIR_42117/DIR_233801/b70b152951a2b124ffff802affffff2.pdf`

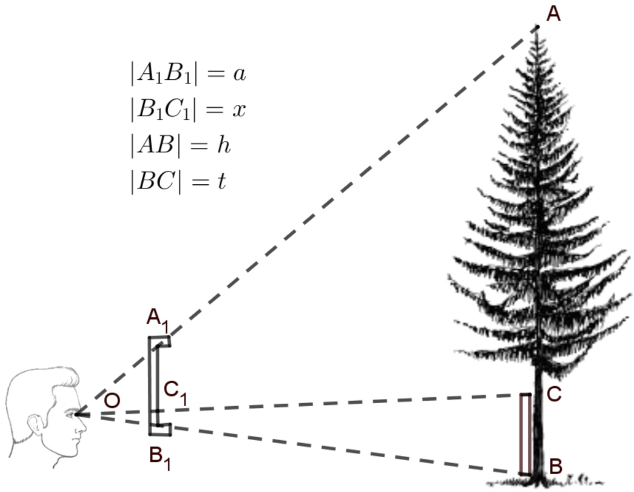
[7]Existují také skládací varianty Christenova výškoměru, používané zejména v Anglii a USA.

tvoří hrany zářezů (u některých modelů nahrazených pro lepší viditelnost sklopnými jehlicemi). Při měření je zapotřebí jednoho pomocníka, který postaví lať (obvykle 4 metry dlouhou) svisle u stromu.



Obr. 3: Christenův výškoměr

Při měření se postavíme na vhodné místo, odkud z dostatečné vzdálenosti můžeme dobře vidět vrchol i patu stromu i latě. Při měření uchopíme výškoměr ukazováčkem a palcem levé ruky v otvoru na horním okraji výškoměru tak, aby zaujal svislou polohu. Ruku mírně natáhneme a zaměříme nejprve na vrchol stromu horní zářez. Poté pozvolna přitahujeme ruku šikmo směrem k oku (vrchol zůstává v horním zářezu) tak, aby se v dolním zářezu objevila pata stromu. Výšku stromu odečteme v místě, kde stupnici protíná vrchol latě, tj. v bodě C_1 (Čabart, 1959).



Obr. 4: Měření výšky stromu pomocí Christenova výškoměru

Princip Christenova výškoměru je založen na podobnosti obecných trojúhelníků (obr. 4)

$$\triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1, \qquad \triangle OCB \sim \triangle OC_1B_1.$$

Pro výšku stromu podle obr. 4 platí

$$h = \frac{at}{x}.$$

Velikosti úseků (x) na stupnici výškoměru, které odpovídají různým výškám stromů (h), jsou při dané délce latě (t) a při dané délce (a) celé stupnice výškoměru dány rovnicí

$$x = \frac{at}{h}. \tag{1}$$

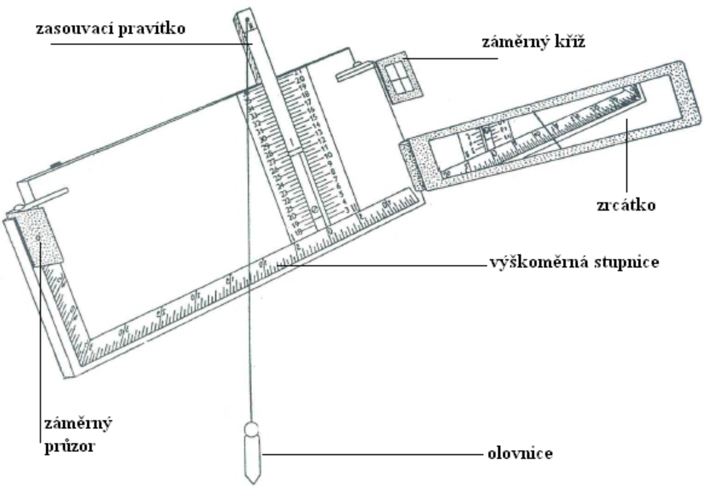
Veličiny v čitateli jsou pevně dané výškou měřičské latě t a délkou výškoměrné stupnice a. Mění se pouze hodnota ve jmenovateli, proto se vzdálenosti mezi jednotlivými dílky stupnice výškoměru s rostoucí výškou rychle zmenšují. Pro výšky nad 25 metrů (při použití 4 m latě) jsou rozdíly jen obtížně rozlišitelné a výškoměr má jen omezenou použitelnost.

Faustmannův výškoměr

Faustmannův[8] výškoměr (obr. 5) je obdélníková destička opatřená jednoduchými záměrnými průzory, k záměrné přímce je kolmo umístěné zasouvací pravítko pro nastavení pásmem naměřené vodorovné základny pomocí indexů I. (pro základny 15–30 m, v obr. 5 stupnice nalevo od zasouvacího pravítka) a II. (pro základny 1–20 m, v obr. 5 stupnice napravo od zasouvacího pravítka)

[8]Martin Faustmann (1822–1876) byl německý lesník a lesnický vědec. Výškoměr vyvinul společně s manželkou. Poprvé se o výškoměru v odborném tisku zmiňuje v roce 1854, např. zde: `http://www.plumbbobcollectors.info/media//DIR_78901/26d70e8c5783934ffff828fac14421f.pdf` Popis výškoměru s vysvětlením principu podal v roce 1856, např. zde: `http://www.plumbbobcollectors.info/media//DIR_78901/26d70e8c5783934ffff8290ac14421f.pdf`

na dvou, oboustranně podél pravítka vynesených stupnicích vzdáleností I. a II.



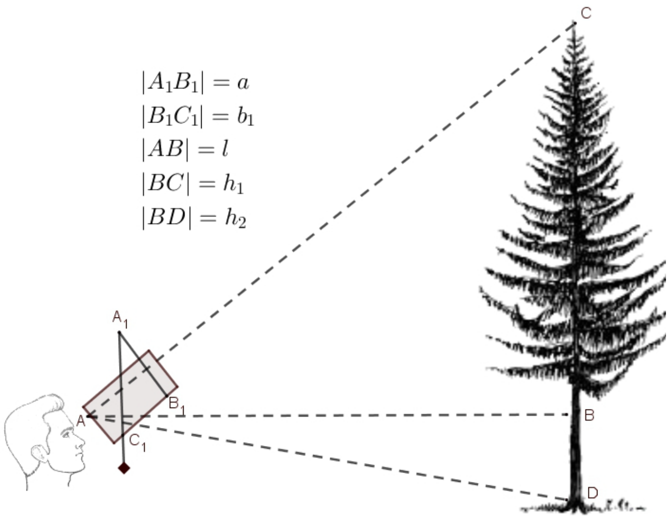
Obr. 5: Faustmannův výškoměr (Čabart, 1959)

Výškoměr je vybaven sklopným zrcátkem pro usnadnění odečítání hodnot z výškoměrné stupnice.

Na výškoměru nastavíme vysunutím indexu naměřenou odstupovou vzdálenost od stromu. Výškoměrem nejprve zacílíme na vrchol stromu. Úsek výšky nad vodorovnou rovinou přečteme podle polohy olovnice dole na výškoměrné stupnici od nuly směrem k oku. Poté zacílíme výškoměr na patu stromu. Úsek výšky pod vodorovnou rovinou odečteme na stupnici směrem od oka k zrcátku. Obě měření následně sečteme v případě, že naše oko při měření leželo mezi patou a vrcholem stromu. Jestliže bylo naše oko při měření nad vrcholem nebo pod patou stromu, pak obě měření provádíme na stejné straně stupnice a následně od větší přečtené hodnoty odečteme hodnotu menší (Čabart, 1959).

Princip Faustmannova výškoměru vychází z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků (obr. 6)

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1.$$



Obr. 6: Měření výšky stromu pomocí Faustmannova výškoměru

Pro výšku stromu h podle obr. 6 platí

$$h = h_1 + h_2.$$

S využitím podobnosti pravoúhlých trojúhelníků pro výšku h_1 platí

$$h_1 = \frac{l}{a} b_1. \tag{2}$$

Obdobně je určena výška h_2.

Vzdálenost (l) je změřená odstupová vzdálenost, kterou nastavíme jako vzdálenost (a) na výškoměru vysunutím indexu. Část výšky stromu nad vodorovnou rovinou je určena délkou (b_1) na stupnici výškoměru, část výšky stromu pod vodorovnou rovinou je určena délkou (b_2) na výškoměrné stupnici.

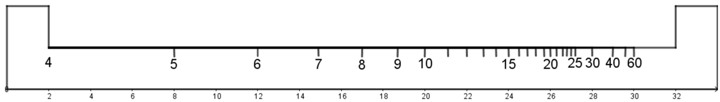
V případě obou výškoměrů platí, že hodnota čtená na stupnici v C_1 udává přímo výšku stromů.

Modely výškoměrů

Oba výškoměry lze sestrojit použitím jednoduchých pomůcek.

Model Christenova výškoměru

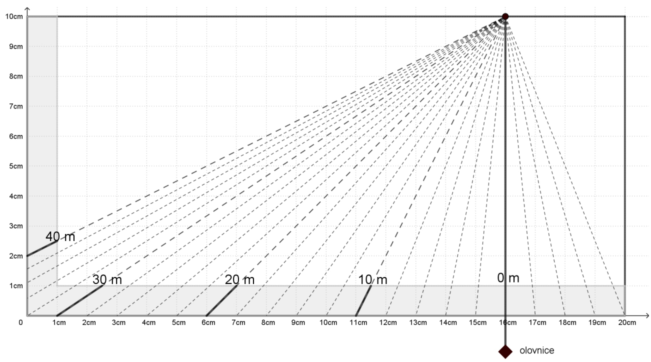
Pro konstrukci můžeme použít pravítko nebo lať o délce alespoň 30 cm (obr. 7).[9] Podobně jako v původní úpravě je možné vyříznout zářezy, jednodušší variantou je připevnění např. špejle k oběma okrajům. Poté si určíme délku použité latě (např. 4 m). Při vyznačování stupnice výškoměru použijeme rovnici (1).



Obr. 7: Model Christenova výškoměru (vzdálenosti pod výškoměrem jsou uvedené v centimetrech)

Model Faustmannova výškoměru

Ve zjednodušené podobě můžeme vytvořit model Faustmannova výškoměru pro pevně danou odstupovou vzdálenost (nebudeme potřebovat zasouvací index). Výškoměr lze vyrobit z kartonu, překližky nebo podobného materiálu.



Obr. 8: Model Faustmannova výškoměru pro odstupovou vzdálenost 20 m

[9] Jak již bylo uvedeno, s rostoucí výškou stromu se rychle zkracují vzdálenosti na výškoměrné stupnici.

Pro odstupovou vzdálenost 20 metrů si vystačíme s obdélníkem o velikosti stran 10×20 cm.[10] Obdélník umístíme tak, že delší strana bude vodorovně, spodní strana obdélníku bude opatřena výškoměrnou stupnicí. Nejdříve rozdělíme delší stranu obdélníku kolmicí na dva různě dlouhé úseky (např. 16 cm a 4 cm, kratší úsek bude sloužit k měření pod vodorovnou rovinou). V místě, kde protne kolmice spodní stranu, bude umístěna nulová výška. V místě, kde protne kolmice horní stranu obdélníku, upevníme vhodným způsobem provázek se zátěží (obr. 8).

Při konstrukci výškoměrné stupnice využijeme podobnost pravoúhlých trojúhelníků, délky úseků na stupnici počítáme podle rovnice (2). Při měření můžeme zaměřovat vrchol (patu) přes horní hranu výškoměru. Výhodnější bude práce ve dvojici, pomocník odečte ze stupnice příslušný úsek.

Chyby při měření

Při měření se setkáváme s různými odchylkami v naměřených hodnotách a to i v případě, že se měřená hodnota nemění (je konstantní). Důvody mohou být různé, některé chyby můžeme odstranit (hrubé[11] nebo systematické[12]), jiné zcela odstranit nemůžeme (náhodné chyby).

Odhad chyby lze výpočtem provést před provedením měření. V dalším textu popíšeme odhad chyby při měření Christenovým výškoměrem.[13]

[10] Při měření výšek stromů se doporučuje volit odstupovou vzdálenost tak, aby se hodnotou blížila výšce stromu.

[11] Mezi hrubé chyby můžeme zařadit např. chybný odečet, chybnou funkci přístroje. Takových chyb bychom se měli v průběhu měření zásadně vyvarovat.

[12] Systematické chyby mohou souviset např. s nesprávnou stupnicí přístroje. Systematičnost této chyby se projevuje tím, že měřené hodnoty veličiny jsou buď trvale větší, nebo menší, než je hodnota skutečná. Takové chyby lze po rozpoznání odstranit.

[13] Odhad chyby při měření Faustmannovým výškoměrem vyžaduje použití parciálních derivací $\Delta h = \frac{l}{a}\,(\Delta b_1 + \Delta b_2) + \frac{h_1 + h_2}{l}\,\Delta l$.
Chyba při měření je ovlivněna zejména chybným čtením na stupnici výškoměru (více viz příloha A).
Čabart (1959) uvádí zkoušky přesnosti provedené s Faustmannovým výško-

Odhad chyby při měření Christenovým výškoměrem

Měření Christenovým výškoměrem je založeno na jediném odečtu ze stupnice měřítka. Nevyžaduje určení odstupové vzdálenosti, což dále zmenšuje výskyt možných chyb.

Pro výšku měřenou Christenovým výškoměrem platí

$$h = a\frac{t}{x} = at\frac{1}{x}.$$

Derivací rovnice získáme odhad chyby

$$\Delta h = at\frac{\Delta x}{x^2}.$$

Chyba při stanovení výšky Δh je tedy nepřímo úměrná čtverci délky úseku x (obr. 4). Pro menší výšky měřených stromů je délka úseku x na výškoměru větší. Poměr $\frac{\Delta x}{x^2}$ se s rostoucí hodnotou x postupně zmenšuje, odchylka změřené výšky od skutečné je malá. S rostoucí výškou stromu se naopak zkracuje délka úseku x, roste hodnota poměru $\frac{\Delta x}{x^2}$, odchylka změřené výšky od skutečné postupně roste (obr. 9).

Při praktickém měření se pro Christenův výškoměr proto doporučuje:

- měřit stromy do výšky cca 25 m,[14]
- odstupovou vzdálenost volit v hodnotě přibližně odpovídající výšce měřeného stromu.

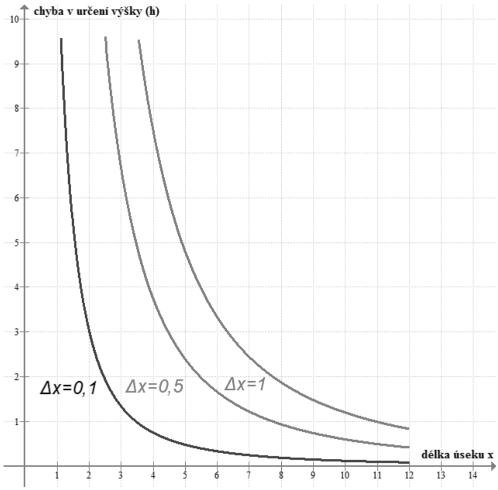
Čabart (1959) uvádí, že při přezkoušení přesnosti Christenova výškoměru byla zjištěna průměrná relativní odchylka měřené výšky 1,4 % (smrk, průměr. výška 20,7 m).[15]

---

měrem v porostech smrku a borovice. Průměrná relativní chyba činila −2,6 % (prům. výška 20,7 m pro smrk, resp. 22 m pro borovici), resp. −4,8 % (pouze smrk, průměrná výška 27 m). Polanský (1934) uvádí pro přesnost Faustmannova výškoměru hodnotu −3,2 % (přesná výška stromu 16,64 m stanovena teodolitem). Záporná hodnota ukazuje, že naměřená výška byla menší než skutečná.

[14] Při obvyklé délce Christenova výškoměru (cca 30 cm) jsou rozdíly mezi značkami na stupnici výšek přesahujících 25 m již velmi špatně rozlišitelné.

[15] Při přezkoušení na větších výškách se chyby výškoměrů projevily větší



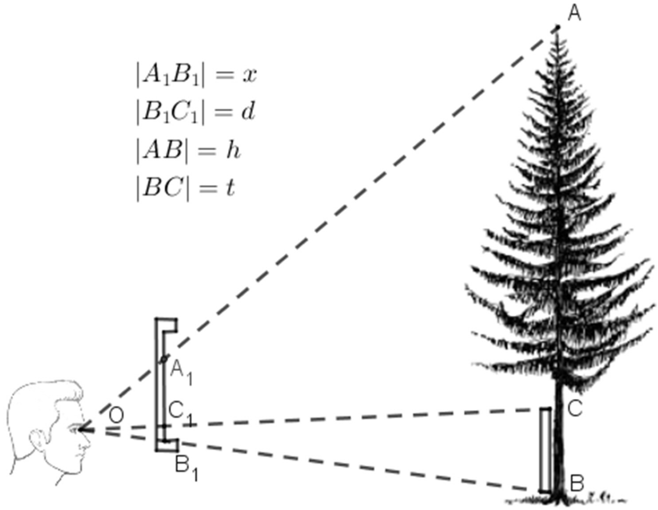
Obr. 9: Porovnání vlivu velikosti odchylky odečtu Δx na velikost chyby v určení výšky Δh (m) pro různě dlouhé úseky x na měřidle výškoměru

Úpravy Christenova výškoměru

Postupně se objevilo několik vylepšení snažících se zmenšit výskyt výše uvedených chyb měření. Patrně nejzdařilejší byla úprava Forestiera, který přidal stativ a stavitelný ukazatel na stupnici pro vyznačení výšky měřičské latě (Polanský, 1934).

Korsuň & Parkán (1957) uvádí úpravu Christenova výškoměru založenou na vytvoření další stupnice na opačné straně výškoměru (obr. 10). Tato stupnice má pro každý metr výšky stejnou délku intervalu (např. 0,75 cm). Při měření se čtyři spodní dílky (d) ztotožní se 4 m latí (t) a výška stromu (h) se odečítá na stupnici proti vrcholu stromu (x). Daná úprava dovoluje při uvedeném dělení stupnice měřit stromy do výšky 40 metrů.

měrou, kolísaly v rozpětí 1,4–3,2 %. Výškoměr byl testován také v porostech borovice, zde s přesností 1,6 (resp. 1,7) %. Kladná hodnota znamená, že přístroj udával větší než skutečnou výšku.
Polanský (1934) uvádí pro přesnost Christenova výškoměru hodnotu −6,1 % (přesná výška stromu 16,64 m určena teodolitem).



Obr. 10: Měření výšky pomocí upraveného Christenova výškoměru

Chyba měření vznikající při použití takto upraveného výškoměru má odlišný charakter než v případě původního Christenova výškoměru. Na stupnici výškoměru je pevně dán úsek (d), který ztotožňujeme s měřičskou latí.[16] Podle obr. 10 lze tedy výšku stromu zapsat ve tvaru

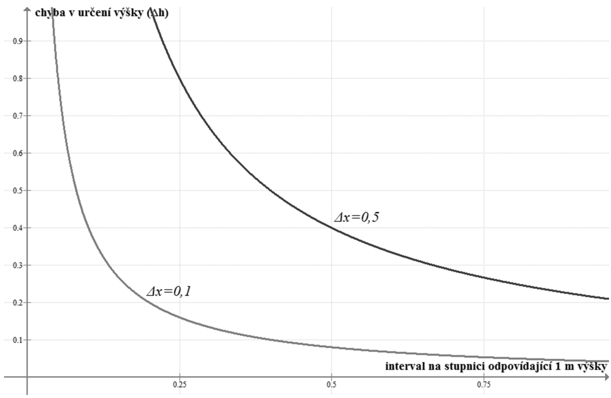
$$h = x\frac{t}{d}.$$

Po derivaci

$$\Delta h = \frac{t}{d}\Delta x.$$

Chyba v určení výšky je přímo úměrná chybě čtení na stupnici výškoměru a nepřímo úměrná zvolené délce intervalu na stupnici výškoměru (obr. 11).

[16] Pro výše uvedený interval 0,75 cm by tento úsek měl délku 3 cm. Při délce stupnice 30 cm lze měřit stromy do výšky 40 m.



Obr. 11: Chyba při určení výšky stromu Δh v závislosti na zvolené délce intervalu (pro čtyřmetrovou lať)

Závěr

Článek uvedl několik možností měření výšky volně stojících objektů. Uvedené příklady výškoměrů naznačily základní typ konstrukce takových přístrojů.

Faustmannův výškoměr byl ve druhé polovině 19. století a na začátku 20. století běžně používaným přístrojem, vyráběným celou řadou výrobců v různých modifikacích. Při použití je nutné pásmem určovat odstupovou vzdálenost a měřit vždy dva údaje (vrchol a patu stromu). Christenův výškoměr nevyžaduje určení odstupové vzdálenosti, což po zácviku měřiče zrychluje měření výšek.[17] V obou případech se jedná z dnešního pohledu o zajímavé, nicméně v lesnické praxi již nepoužívané přístroje.

Jednoduchá konstrukce popisovaných výškoměrů nabízí možnost demonstrovat vlastnosti podobných trojúhelníků ve školské matematice. Jako doplňkové úlohy zadané žákům se nabízí např.:

- nalezení postupu, jak odhadnout s nepříliš velkou chybou výšku stromu bez pomoci výškoměru,[18]

[17] Různá míra zácviku obsluhy může být jedním z důvodů rozdílů v udávané přesnosti Christenova výškoměru (viz výše).

[18] Lesníci v případě potřeby odhadují výšku stromu jednoduchým porovná-

- nalezení postupu, jak měřit původním Christenovým výškoměrem stromy, jejichž výška přesahuje 30 m,[19]
- sestavení Faustmannova výškoměru pro jiné odstupové vzdálenosti,
- sestavení výškoměru z běžného úhloměru (vyžaduje použití goniometrických funkcí).

Doplňme, že ve 20. století se objevila řada dalších typů výškoměrů s rozšířenými funkcemi umožňujícími kromě výšek měřit také sklon svahu, popř. určovat odstupovou vzdálenost bez použití pásma. Jedná se jak o přístroje mechanické (např. Blume-Leiss, Suunto, Silva), tak i elektronické (např. Vertex, Haglov, Hec).[20] Výšky lze samozřejmě měřit i přístroji, které primárně nejsou k takovému účelu určené (např. teodolity). Rovněž mobilní telefony vybavené akcelerometrem mohou být po instalaci vhodné aplikace[21] využity pro měření výšky stromů.

Poděkování: Ing. J. Térovi za laskavé zapůjčení Christenova výškoměru.

Literatura

[1] Bellos, A. (2016). *Alex za zrcadlem. Jak se čísla odrážejí v životě a život v číslech.* Praha: Dokořán.

[2] Čabart, J. et al. (1959). *Naučný slovník lesnický.* Praha: Čs. akademie zemědělských věd.

ním stromu s jakýmkoliv předmětem, který v natažené ruce zakryje zaměřený strom. Poté otočí zmíněný předmět do vodorovné polohy tak, aby se jeden z konců pomyslně dotýkal paty stromu. Druhý konec vyznačí místo, ze kterého lesník odkrokuje vzdálenost k patě stromu.

[19] Jednou z možností je pomyslné rozdělení stromu na části (např. poloviny) a určení výšky jedné části. Celková výška je násobkem (pro polovinu dvojnásobkem) změřené hodnoty. Další možností je zvětšení měřidla.

[20] Více např. `https://katedry.czu.cz/storage/3844_Souhrn_Dendrometrie.pdf`, 33–37.

[21] Více např. Villasante A., Fernandez C. (2014). Measurement errors in the use of smartphones as low-cost forestry hypsometers. *Sil. Fennica* 48(5). Dostupné z `https://silvafennica.fi/article/1114`.

[3] Polanský, B. (1934). Konstrukce výškoměrů a dendrometrů, sestrojené v poslední době a několik návrhů na zdokonalení výškoměrů. *Lesnická práce*, 13(1), 36–42. Dostupné z `http://lmda.silvarium.cz`

[4] Korsuň, F. & Parkán, J. (1957). Jednoduché pomůcky pro taxační práci. *Lesnická práce*, 36(2), 86–90. Dostupné z `http://lmda.silvarium.cz`

[5] Ruecker, W. (2013). Atkinson, Christen and Faustmann hypsometers. *Wolf's plumb bob news* 9, 100–112. Dostupné z `http://www.plumbbobcollectors.info/media//DIR_42117/DIR_233801/b70b152951a2b124ffff802affffff2.pdf`

Abstract

This article refers to the measuring possibilities of tree heights. There are descriptions of two devices used especially in the past. The article also offers the skills to create simple models of hypsometers using mathematics of elementary or secondary school. The last part is focused on error's estimation by using hypsometers.

Luděk Spíchal
Ústav matematiky a statistiky
Masarykova univerzita v Brně
Kotlářská 267/2
611 37 Brno
Česká lesnická akademie Trutnov
Lesnická 9
541 01 Trutnov
e-mail: spichal@clatrutnov.cz

Příloha A

Měření Faustmannovým výškoměrem je založené na určení odstupové vzdálenosti (l). Vlastní měření se skládá ze zjištění dvou hodnot čtených na stupnici výškoměru (h_1, h_2). Předpokládejme, že oko měřiče je mezi patou a vrcholem stromu.

Pro celkovou výšku stromu podle rovnice (2) platí

$$h = h_1 + h_2 = \frac{l}{a} b_1 + \frac{l}{a} b_2 = h\left(b_1, b_2, l\right).$$

Rovnice pro h_1, h_2 jsou funkcemi dvou proměnných, určíme parciální derivace

$$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 = \left|\frac{\partial h_1}{\partial b_1}\right| \Delta b_1 + \left|\frac{\partial h_1}{\partial l}\right| \Delta l + \left|\frac{\partial h_2}{\partial b_2}\right| \Delta b_2 + \left|\frac{\partial h_2}{\partial l}\right| \Delta l,$$

$$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 = \frac{l}{a} \Delta b_1 + \frac{b_1}{a} \Delta l + \frac{l}{a} \Delta b_2 + \frac{b_2}{a} \Delta l,$$

$$\Delta h = \frac{1}{a}\left[l\left(\Delta b_1 + \Delta b_2\right) + \Delta l\left(b_1 + b_2\right)\right]. \tag{3}$$

Úpravou rovnice (3) získáme maximální odhad celkové chyby

$$\Delta h = \frac{l}{a}\left(\Delta b_1 + \Delta b_2\right) + \frac{h_1 + h_2}{l} \Delta l.$$

Koeficient a je pro dané měření konstantní a daný vysunutím zasouvacího pravítka. Na velikost chyby má větší vliv nepřesný odečet na stupnici výškoměru (první člen rovnice), odchylka od odstupové vzdálenosti se při malých rozdílech projeví málo (druhý člen rovnice).