Daniela Bittnerová

Množinové obrázky

Učitel matematiky, Vol. 26 (2018), No. 2, 65–70

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148576

MNOŽINOVÉ OBRÁZKY

Daniela Bittnerová

Slovo „motivace“ se v posledních letech skloňuje ve všech pádech, a to nejen v matematice, ale ne každý ví, jak na to. Na toto téma existuje celá řada článků i doporučení, některá z nich jsou dokonce opravdu cenná. Ze zkušenosti však většinou vyplyne, že na každé téma se musí trochu jinak, nestačí jen uplatňovat obecná didaktická pravidla. Pak každý rád sáhne po něčem již osvědčeném, po něčem, co kolegové již v praxi vyzkoušeli. Některá témata jsou přímo stvořená pro vytvoření krásných aplikačních úloh, jež žáky či studenty zaujmou, ale co s tématy, na něž je v osnovách málo času, a přitom je nutné látku připomenout, eventuálně rozšířit o nové poznatky?

V podobné situaci se ocitáme na začátku každého prvního semestru, kdy máme se studenty technických a ekonomických oborů v hodinách matematiky zopakovat množiny, výroky a poté i úvod k funkcím. Kdyby bylo dost času, dalo by se řešit plno krásných úloh, ale co s tím, když na množiny a výroky máme malou část přednášky a kousek cvičení? Před několika lety jsem proto začala studentům zadávat dobrovolný domácí úkol. Kdo se ho zúčastní, může získat nějaké body navíc do celkového hodnocení za práci v semestru. Navíc si při tom celkem zábavnou formou (aspoň pro někoho) něco zopakuje.

Zadání dobrovolného úkolu

Pomocí množin a alespoň tří různých množinových operací nakreslete nějaký obrázek pro malé dítě, například pro malého sourozence. K popisu obrázku kromě výrokového počtu a množinových operací využijte různé relace či funkce.

Okamžitě po zadání slyším dotazy: Co to znamená, nakreslit obrázek pro malé dítě? Odpovím otázkou: Jak se kreslí pro děti? A hned si odpovím – stylizovaně, jednoduše, a uvedu několik příkladů. V některých skupinách se akce zúčastní skoro všichni, v jiných jednotlivci, celkově s tím mám velmi dobré zkušenosti. Studenty to baví a mají velice pěkné nápady. Ty oceňuji, i když třeba úloha není vytvořena správně. Častou chybou je, že studenti nesplní podmínku tří různých množinových operací, mnozí používají samá sjednocení či průniky. Někteří zase popíšou jen obrys obrázku. Také ne každý obrázek je vhodný pro malé děcko (půllitr piva i s pěnou, přesýpací hodiny atd.), ale to toleruji. Vadou mnoha jinak dobře vytvořených úloh bývá velké množství množin. Úloha se pak stává velmi nepřehlednou a špatně se řeší.

V průběhu doby jsem získala celou řadu pěkných úloh. O některé bych se ráda podělila. Neuvádím sněhuláky a domečky, kterých dostanu každý rok několik, ale originální nápady. Jedná se o inspirace, náměty, nikoliv o původní řešení studentů. V černobílém provedení nejsou vidět barvy, které byly použity pro zdůraznění obrázku.

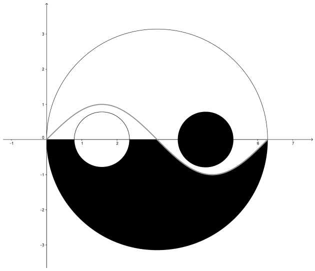
Úloha 1 – Jing a jang. Toto úlohu jsem vybrala jako zástupce všech možných panáčků, prasátek, soviček apod. Je vytvořena z malého počtu množin, proto je přehledná a snadno se na ní ukáže, o co vlastně jde.

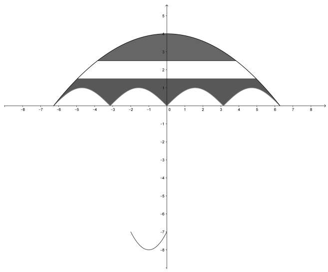
$$A = \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; (x-\pi)^2 + y^2 \le \pi^2\right\}$$
$$B = \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; \sin x \le 1\right\}$$
$$C = \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + y^2 \le \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right\}$$
$$D = \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; \left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^2 + y^2 \le \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right\}$$
$$E = \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; (x-\pi)^2 + y^2 = \pi^2\right\}$$

Výsledná množina:

$$M = \{[(A \cap B) \setminus D] \cup C\} \cup E$$

Kružnice, resp. kruh či jeho části, byly u těchto typů obrázků využívány nejvíce. V případě Jing a jang jsem ocenila začlenění goniometrické funkce. Tím se odlišoval od sjednocení a průniků mnoha kružnic různých poloměrů, které tvořily výše zmíněné sněhuláky a panáčky.





Úloha 2 – Deštník.

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; y \geq |\sin x| \wedge x \in \langle -2; 2\rangle\right\}\\
B &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; y \leq 4 - \frac{x^2}{\pi^2}\right\}\\
C &= A \cap B\\
D &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; |y-2| \leq 1\right\}\\
E &= C \setminus D\\
F &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; y = (x+1)^2 - 5 \wedge x \in \langle -2; 0\rangle\right\}\\
G &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x = 0 \wedge y \in \langle -4; 0\rangle\right\}
\end{aligned}
$$

Výsledná množina:

$$M = E \cup F \cup G$$

Obrázek deštníku také patřil k těm zdařilým. Jde o originální nápad opět s malým množstvím množin. V původní verzi však student použil ke kreslení deštníku místo funkce sinus části parabol, které na sebe navazovaly. Konstanty všech potřebných parabol si vypočítal na počítači. Pak ale všechny množiny pouze sjednotil, takže nesplnil zadání.

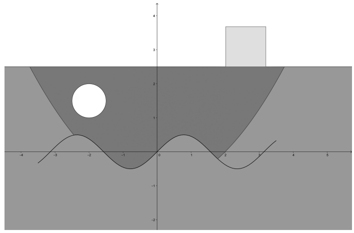
Úloha 3 – Lodička.

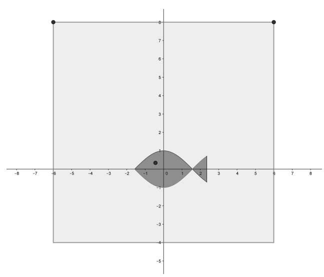
$$
\begin{aligned}
A &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; y \geq \sin x\right\}\\
B &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; y \geq \frac{x^2}{4} - 1\right\}\\
C &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; y \leq 3\right\}\\
D &= A \cap B \cap C\\
E &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; (x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}\right\}\\
F &= D \setminus E\\
G &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x \in \langle 3;4\rangle\ y \in \langle 3;4\rangle\right\}\\
H &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; y = \sin x\right\}
\end{aligned}
$$

Výsledná množina:

$$M = F \cup G \cup H$$

Tato úloha se mi zalíbila na první pohled – je jednoduchá, přehledná, jiná než ostatní. Obrázek lodičky je skoro v původní verzi. Rozměry však byly jiné a v popisech množin se občas vyskytly chyby. Tento typ obrázků zastupuje skupinu autíček, letadel, domečků atd., kterých jsem dostala téměř tolik jako sněhuláků. V tomto případě jsem ocenila pestrost a kombinaci různých typů množin – parabola, sinus, kružnice. Množina G by šla popsat také například pomocí absolutních hodnot. Mimochodem, zjistila jsem, že vytvořit obdélník či čtverec pomocí absolutních hodnot téměř nikoho ze studentů nenapadne. Obvykle použijí dva intervaly jako v případě množiny G.





Úloha 4 – Akvárium.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; y \leq \cos x \wedge x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \right\} \\
A_2 &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; y \geq \cos x \wedge x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle \right\} \\
B_1 &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; y \geq -\cos x \wedge x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \right\} \\
B_2 &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; y \leq -\cos x \wedge x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle \right\} \\
C &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x = \frac{3\pi}{4} \wedge |y| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \\
D &= (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) \cup C \\
E &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{16} \right\} \\
F &= D \setminus E \\
G &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 8 \wedge |y| \leq 6 \right\} \\
H &= F \setminus G \\
O &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x \in \langle 3; 4\rangle \wedge y \in \langle 3; 4\rangle \right\} \\
N_1 &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x \in \langle -4; -3\rangle \wedge y \in \langle -7; -6\rangle \right\} \\
N_2 &= \left\{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x \in \langle 3; 4\rangle \wedge y \in \langle -7; -6\rangle \right\}
\end{aligned}
$$

Výsledná množina:

$$M = H \cup O \cup N_1 \cup N_2$$

Pomocí výše uvedených množin vytvoříme základní rybičku. Tu pak můžeme podle libosti využitím lineárních transformací v akvárium namnožit. Akvárium bylo v původní studentské verzi ve tvaru obdélníku s nožičkami (opět bez absolutních hodnot) a rybiček bylo více. Obrázek však byl vytvořen pomocí několika desítek množin, takže u něj jsem ocenila nápad.

Závěr

Během let jsem získala spoustu různých námětů. Výše uvedené příklady jsou jen malou ukázkou. Námět není úplně původní, jen zadání bylo upřesněno. Ráda bych inspirovala kolegy, jak lze například studentům zatraktivnit (díky minimálnímu času) pro ně často nezáživnou látku.

S kreslením obrázků mi pomohl student učitelství matematiky a informatiky na Fakultě přírodovědně-humanitní a pedagogické Technické univerzity v Liberci Ondřej Vraštil.

Příspěvek nebyl dosud publikován ani není v současnosti zaslán do jiného časopisu pro posouzení.

Literatura

[1] Bittnerová, D. & Plačková, G. (2013). *Louskáček 1 – Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné (sbírka úloh)*. 4. vydání. Liberec: Technická univerzita v Liberci.

[2] Veselý, J. (1997). *Matematická analýza pro učitele 1*. Praha: MATFYZPRESS.

[3] Klůfa, J. & Coufal, J. (2000). *Matematika pro ekonomické fakulty 1*. Praha: EKOPRESS.

Abstract

In the paper, a sample of examples concerned on the teaching of the foundation set theory and the logic symbols in the context of a repeat of real functions and other commonly known relations at the level of secondary school mathematics.

Daniela Bittnerová
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
Studentská 2
461 17 Liberec
e-mail: daniela.bittnerova@tul.cz