

Učitel matematiky

Irena Budínová

Vytváření představ základních geometrických pojmů u žáků prvního stupně základní školy: trojúhelník a kruh

Učitel matematiky, Vol. 26 (2018), No. 1, 1–11

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/148569>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2018

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

**VYTVÁŘENÍ PŘEDSTAV ZÁKLADNÍCH
GEOMETRICKÝCH POJMŮ U ŽÁKŮ
PRVNÍHO STUPNĚ ZÁKLADNÍ ŠKOLY:
TROJÚHELNÍK A KRUH**

IRENA BUDÍNOVÁ

Připomeňme, že v prvních dvou dílech seriálu o vývoji představ geometrických pojmů jsme se zabývali částí výsledků testu, který vyplnilo 226 žáků 4. ročníku. Ve druhém dílu seriálu o vytváření představ geometrických pojmů na 1. stupni ZŠ jsme se zaměřili na žákovské představy pro pojmy čtverec a obdélník. Viděli jsme, že u mnoha žáků dochází k nepřesnému či nesprávnému vývoji představ o těchto pojmech. Nemalá skupina žáků 4. ročníku si ponechala mylné představy, přetrvávající z předškolních zkušeností, a za čtverec považují jakýkoli útvar „čtvercového“ tvaru. Jiná skupina se sice zvolna přesouvá z hladiny vizualizace do hladiny analýzy (dle van Hieleho), ale nedostatek příkladů a protipříkladů způsobuje, že si představy utváří nepřesně. Např. mnoho žáků si myslí, že čtverec je „útvarem se stejně dlouhými stranami“, ale zcela pomíjejí vlastnost jeho vnitřních úhlů.

Ve třetím díle se budeme zabývat představami žáků čtvrtého ročníku k pojmům trojúhelník, kruh a kružnice.

Z výzkumů, které byly prováděny u nás i v zahraničí, dlouhodobě vyplývá, že jako prototypický trojúhelník vnímá většina žáků trojúhelník rovnoramenný (více než rovnostranný) stojící na základně (např. Cutugno, Spagnolo, 2014). Žáci v prvních ročnících základního vzdělávání mají navíc tendenci trojúhelníky rozdělovat na „hezčí“ a „méně hezké“. Partová a Žilková (2016) sledovaly děti ve věku 5–6 let, jak si poradí s identifikací různých modelů trojúhelníku (pěnové modely). Děti bez problému vybraly trojúhelníky rovnoramenné a rovnostranné, důležité pro ně ale bylo

otočení trojúhelníku. Pravoúhlý trojúhelník některé děti označily za „ne tak pěkný trojúhelník“, tupoúhlý trojúhelník mnohdy zcela odmítly zařadit do skupiny trojúhelníků.

Bylo by dobré, kdyby se podařilo u žáků eliminovat zatíženost na tvar a otočení trojúhelníku směrem k vyšším ročníkům. Žáci by měli ve výuce získávat dostatek podnětů k tomu, aby přetvářeli své mylné představy (mnohdy pramenící ze zkušeností v předškolním období). Ve 4. ročníku by již měli být schopni model trojúhelníku poznat bez ohledu na tvar a otočení a měli by si také uvědomovat základní vlastnosti trojúhelníku (rovinný útvar, má právě tři strany, právě tři vnitřní úhly).

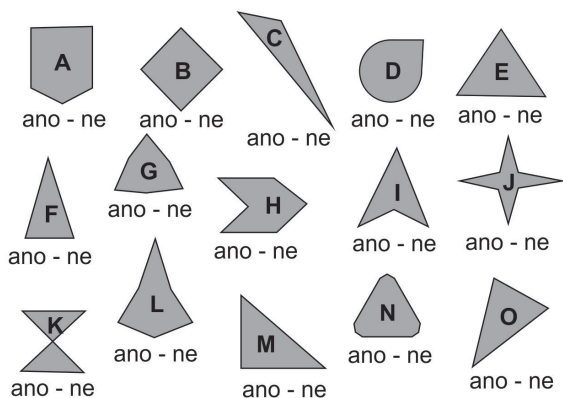
V případě kruhu a kružnice se dlouhodobě setkáváme s neukotvením pojmů a fixací na pojem „kulatý“. Některé výzkumy ukazují, že názor „co je kulaté, to je kruh“ může u některých jedinců přetrvávat až do dospělosti. Mokriš a Scholtzová (2016) uvádí výsledky výzkumu, v němž sledovali miskoncepce v identifikaci rovinných útvarů u budoucích učitelů-elementaristů, kterého se účastnilo 97 respondentů. Přibližně 11 % z nich považovalo elipsu za kruh a 36 % těchto studentů označilo mezikružší za kruh.

Výzkum vytváření představ o trojúhelníku, kruhu a kružnici u žáků 4. ročníku

Cílem třetího dílu seriálu je sledovat vývoj představ žáků o pojmech trojúhelník a kruh, případně kružnice. Budeme hledat nesprávné představy typické pro žáky 4. ročníku ZŠ. Dvě úlohy testu se týkaly pojmů trojúhelník a dvě úlohy se vztahovaly k pojmům kruh a kružnice.

Úloha 3. Rozhodni, které z následujících útvarů (obr. 1) jsou trojúhelníky¹.

¹V testu nebyly útvary označeny písmeny, zde jsou písmena uvedena pro snadnější orientaci.



Obr. 1: Podklad k úloze na identifikaci trojúhelníku.

Převzato z (Žilková, 2016)

V obrázku jsou dva prototypické modely trojúhelníku – 3E a 3F, jejich úspěšnost byla 99 %. Také pootočený rovnoramenný trojúhelník 3O či pravoúhlý trojúhelník 3M měly vysokou úspěšnost, a to 98 %. Tupoúhlý trojúhelník 3C měl ze zástupců trojúhelníků nejnižší úspěšnost, a to 91 %.

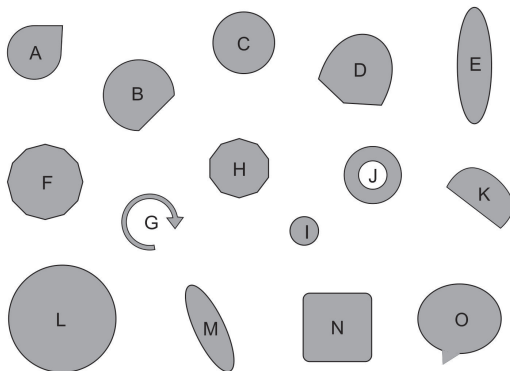
Vysokou úspěšnost nad 95 % měly dále útvary, které nepřipomínají trojúhelník – 3A, 3B, 3D, 3J. Nejproblematictější z ne-trojúhelníků byly útvary 3G, 3H, 3I, 3K, 3L, 3N, jak vidíme v tab. 1.

Útvar	Úspěšnost (v %)
3G	81
3H	94
3I	92
3K	87
3L	82
3N	85

Tab. 1

Útvary 3G, 3L, 3N jsou útvary „trojúhelníkového tvaru“, které opticky připomínají trojúhelníky. Na obrázku 3K jsou vlastně dva trojúhelníky, avšak útvar jako takový trojúhelník není.

Úloha 5. Zakroužkuj, které z následujících útvarů nejsou kruhy (obr. 2).



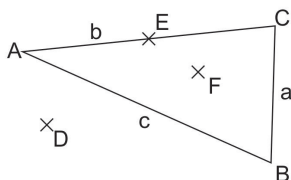
Obr. 2: Podklady na identifikaci modelů a ne-modelů kruhu.
Převzato z (Žilková, 2017)

V případě kruhů 5C, 5I a 5L byla úspěšnost vyšší než 96 %. Stejně vysokou úspěšnost měly útvary, které kruh příliš nepřipomínají – 5A, 5B, 5D, 5K. O něco nižší byla úspěšnost v případě elips 5E a 5M, v obou případech 92 %, a dále útvaru 5O (94 %). Zde možná můžeme shledávat u některých žáků pozůstatek z předškolního období, kdy děti rozlišují tvary kulaté a hranaté. U některých žáků může patrně vzniknout miskoncepce, že „co je kulaté, to je kruh“. Poměrně nízkou úspěšnost měl dvanáctiúhelník 5F, desetiúhelník 5H a šipka 5G, ve všech třech případech 81 %.

Nejnižší úspěšnost měl útvar 5J (50 %). Žáci 4. ročníku se v ýuce nesetkávají s pojmem mezikruží. Proto není divu, že polovina z nich vyhodnotila útvar 5J jako kruh. Je však otázkou, zda je vhodné, aby velká část žáků byla ještě ve 4. ročníku podporována (tím, že se nesetkávají s protipříklady) v této miskoncepti.

Úloha 6. Podle obrázku doplň do tabulky znaky:

ano ne



Obr. 3: Zdroj: Žilková et al. (2018)

	A	a	B	b	C	c	D	E	F
Body, které patří trojúhelníku ABC , jsou:									
Vrcholy trojúhelníku ABC jsou:									
Strany trojúhelníku ABC jsou:									

Úloha 6 měla velmi nízkou úspěšnost, jak je patrné z tab. 2.

Úloha	Úspěšnost (v %)
6A	12
6B	66
6C	59

Tab. 2

V odpovědích na otázku 6A se vyskytovaly různé chyby: žáci nevěděli, zda bod trojúhelníku zapsat velkým nebo malým písmenem; někteří žáci se domnívali, že vrcholy nejsou body trojúhelníku; jiní žáci naopak soudili, že pouze vrcholy jsou body trojúhelníku. Nejčastější chybou bylo, že žáci jako body trojúhelníku označili body ležící na hranici (body A, B, C, E), ale nikoli bod F . Tato chyba se vyskytla ve 40 % případů. Mnoho žáků 1. stupně se ve výuce setká s tím, že modelují „trojúhelníky“ z dřivek nebo na geodesce z gumíčky. Zde může vznikat nesprávná představa o tom, že trojúhelník je pouze hraniční čára. Jiná možná příčina může být v obrázcích vyskytujících se v učebních materiálech, které většinou také obsahují pouze hranici trojúhelníku a ne jeho vnitřek.

V části 6B jsem očekávala daleko vyšší úspěšnost. Žáci ale jako v části 6A dělali nejružnější chyby, nebo nechali tabulku zcela nevyplněnou. V tom případě je možné, že neporozuměli způsobu vyplňování tabulky a pokud by byla úloha jinak zadána, dokázali by správně odpovědět. I tak ale bylo patrné, že mnoho žáků nemá jasnou představu o tom, co to vrchol trojúhelníku je.

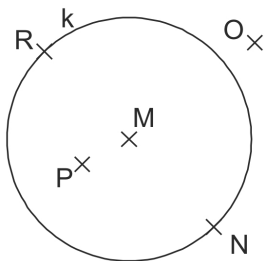
V případě části 6C bylo nejčastější chybou zapsání stran pomocí velkých písmen, tj. „ A, B, C “, nebo vynechání řešení. Někteří žáci se ve výuce doposud nesetkali s označením strany pomocí malého písmena, jsou zvyklí ji zapisovat pomocí krajních bodů.

Úloha 7. Na obrázku je kružnice se středem v bodě M .

- Zapiš všechny body, které patří kruhu.
- Zapiš všechny body, které patří kružnici.
- Zakroužkuj úsečky, které jsou poloměrem kružnice.

MP MN ON RN RM

- Doplň: Průměrem kružnice je úsečka _____.



Obr. 4: Zdroj: Žilková et al. (2018)

Úspěšnost úlohy 7 je uvedena v tab. 3.

Úloha	Úspěšnost (v %)
7A	40
7B	58
7C	44
7D	49

Tab. 3

V případě kružnice označilo 6 % žáků bod M jako bod kružnice. Úlohy o kružnici bývají velmi často uváděny takto: Je dána kružnice se středem M . U některých žáků vzniká přesvědčení, že střed kružnice je bodem kružnice. 8 % žáků zaměnilo kružnici za kruh. 16 % žáků označilo jako body kruhu pouze jeho vnitřní body (P a M). Pojmy poloměr a průměr kružnice a kruhu mají žáci obvykle spojeny spíše s délkou (např. „kružnice o poloměru 5 cm“), nežli s úsečkou. To byl patrně jeden z důvodů malé úspěšnosti částí 7C a 7D. Část žáků (5 %) na volné místo pro průměr kružnice (kam měli zapsat „ RN “) doplnila „3,5 cm“.

Závěr

V částech testu týkajících se pojmů trojúhelník, kruh a kružnice jsme se nejčastěji setkali s těmito chybami:

1. Tupouhlý trojúhelník není částí žáků 4. ročníku vnímán jako trojúhelník.
2. Útvary, jejichž tvar připomíná trojúhelník (útvary se zaoblenými stranami, se zaoblenými rohy) jsou pro některé žáky 4. ročníku zástupci trojúhelníku. Žáci by se ve výuce měli setkávat s příklady a protipříklady trojúhelníku, aby postupně z úrovně vizualizace přecházeli do úrovně analýzy a začali si uvědomovat vlastnosti trojúhelníku.
3. Žáci nemají jasnou představu o pojmech *vrchol trojúhelníku* a *bod trojúhelníku*. Velká část z nich nepovažuje vnitřní body trojúhelníku za body trojúhelníku. V této souvislosti pro ně může být matoucí práce se dřívky nebo s geodeskou. Tím nechci říci, že by žáci neměli s těmito pomůckami pracovat – určitě měli, protože pomůcky rozvíjí některé důležité představy. Je však žáky třeba upozornit, že nemodelujeme trojúhelník, ale pouze jeho hranici. Žáci by se souběžně měli setkávat také s modely trojúhelníku vystřiženými z papíru.
4. Kruhem je podle určité části žáků cokoli, co má zaoblený tvar (např. elipsa). Poměrně velká část žáků za kruh považuje dokonce některé mnohoúhelníky.
5. Někteří žáci zaměňují pojmy kruh a kružnice.

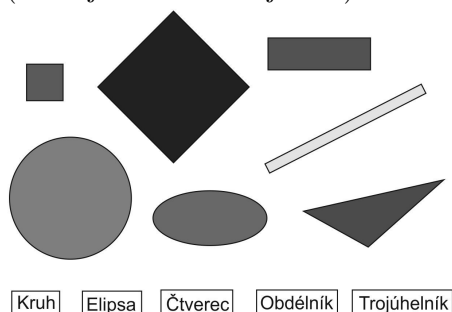
Uvedená výzkumná sonda, týkající se základních geometrických útvarů, se kterými se žáci setkávají na 1. stupni ZŠ (čtverec, kruh, trojúhelník, obdélník, kosočtverec), ukázala riziková místa, se kterými se ve výuce setkáváme. Viděli jsme řadu miskoncepcí, které u žáků přetrvávají během prvního stupně.

Při výuce geometrie bychom si neměli pokládat otázku, co má žák 4. ročníku umět podle RVP, ale co vše by mohl umět podle svých možností. Vhodné jsou například následující otázky:

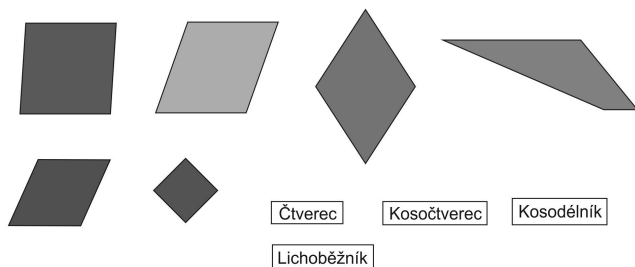
1. Je žák schopen rozpoznat na obrázku čtverec, trojúhelník, kruh, kružnici, obdélník, kosočtverec (a rovněž lichoběžník, kosodélník a elipsu), a to bez ohledu na jeho tvar, velikost a otočení?
2. Je žák schopen používat přesnou terminologii k označení geometrických útvarů a jejich částí?
3. Je žák schopen uvažovat o vlastnostech geometrických útvarů (např. čtverec – má právě čtyři shodné strany, právě čtyři shodné vnitřní úhly)?
4. Je možné, aby žák měl přesně vymezené pojmy, jako jsou strana mnohoúhelníku, vrchol, bod, úhlopříčka, poloměr kružnice, průměr kružnice?
5. Je možné, aby žáci 4. ročníku vytvářeli vlastní (zatím neformální) definice geometrických pojmů?

Dle van Hielovy stupnice a zkušeností, které máme s žáky, kteří jsou od 1. ročníku ZŠ s geometrickými útvary seznamováni zrakem i hmatem a setkávají se s množstvím příkladů, protipříkladů a rovněž správnou terminologií, je odpověď na každou z výše uvedených otázek „ano“. Cestou k úspěchu je používání názorných modelů, např. tvarů vystřižených z papíru, které reprezentují příklady a protipříklady jednotlivých pojmů. Žáci přiřazují vystřižené papírové modely ke geometrickým názvům, přičemž v 1. a 2. ročníku se zaměřujeme na základní útvary, které žák poznává pouze na základě vizuálního dojmu (obr. 5 – papírové modely rovinných útvarů, žáci přiřazují útvary k názvům), od 3. ročníku přidáváme další pojmy a nutíme žáka k rozpoznávání větších detailů (obr. 6 – papírové modely čtyřúhelníků, žáci je

přirazují k názvům), čímž se musí zabývat také vlastnostmi daného útvaru (nikoli jen vizuálním vjemem).



Obr. 5



Obr. 6

To stejné platí pro prostorovou geometrii, kdy se žáci seznamují zrakem i hmatem s modely útvarů. Od začátku lze útvarům přiřazovat správné (nezjednodušované) termíny. Žák sice nemusí pojem přijmout ihned (např. krychli může nazývat „kostkou“ nebo „čtvercem“ i poté, co mu byl sdělen správný název), avšak postupem času termíny přijme a začne používat.

Literatura

- [1] Arnas Aktas, Y., Aslan, A. G. D. (2010). *Children's Classification Of Geometric Shapes*. Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi.

- [2] Budínová, I. (2017). Vytváření představ základních geometrických útvarů u žáků prvního stupně základní školy. *Učitel matematiky*, 25(2), 65–82.
- [3] Clements, D. H. (1999). Geometric and spatial thinking in young children. In J. V. Copley (Ed.), *Mathematics in the early years* (66–79). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- [4] Cutugno, P., Spagnolo, F. (2014). Misconceptions about triangle in Elementary school. *Diakses tanggal*, 24.
- [5] Hannibal, M. A. Z., Clements, D. H. (2000). *Young children's understanding of basic geometric shapes*. National Science Foundation, Grant number: ESI-8954644.
- [6] Kopáčová, J., Žilková, K. (2016). Predstavy a milné predstavy žiakov o obdĺžnikoch. In *Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae Universitas Catholica Ružomberok*. Ružomberok: Verbum.
- [7] Mokriš, M., Scholtzová, I. (2016). Miskoncepce v identifikácii rovinných geometrických útvarov u budúcich učiteľov-elementaristov. In *Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae Universitas Catholica Ružomberok*. Ružomberok: Verbum.
- [8] Partová, E., Žilková, K. (2016). Uvažovanie detí predškolského veku o polohe a tvare rovinných útvarov. In *Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae Universitas Catholica Ružomberok*. Ružomberok: Verbum.
- [9] van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: a theory of mathematics education*. Orlando: Academic Press.
- [10] Žilková, K. (2016). *Preferencia modelov a ne-modelov trojúhelníkov žiakmi primárního vzdělávání*. Elementary mathematics education. Olomouc.
- [11] Žilková, K. (2017). *Analýza představ štvrtákov o kruhoch*. Elementary mathematics education. Tále.
- [12] Žilková, K., Partová, E., Kopáčová, J., Mokriš, M., Tkačík, Š., Gunčaga, J., Budínová, I. (2018). *Young Children's Concepts of Geometric Shapes*. (v tisku)

Abstract

Geometric shapes are one of the first subjects in mathematics education during the early stage of elementary school. Children form conceptions about the concepts on the basis of their experience. Some of these early conceptions about geometric shapes might be incorrect, which might negatively impact children's further understanding of geometric shapes. For that reason, exploring how children recognize and classify geometric shapes is important in determining the content of early mathematics education. Developing geometric thinking is a long-term path and requires an informal encounter of pupils with geometric concepts and their properties. The first years of education are essential because the intuitive perception of the world is developed. In this study, we show some ways of forming conceptions of the concept triangle and circle in children of the fourth grade.

Irena Budínová

Katedra matematiky

Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity

Pořičí 31

603 00 Brno

e-mail: irena.budinova@seznam.cz