Pavel Pokorný

Jak budu splácet hypotéku

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 95 (2020), No. 3, 25–29

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148459`

Jak budu splácet hypotéku

Pavel Pokorný, VŠCHT Praha

Jak budu splácet hypotéku? To je otázka, kterou by si měl položit (a zodpovědět) každý, kdo uvažuje řešit otázku bydlení hypotékou. Tento článek vám sice neporadí, kde sehnat finanční prostředky na splátky hypotéky, ale podíváme se na matematické souvislosti spojené s výpočtem výše splátek.

Úrok

Hypoteční úvěr (zkráceně hypotéka) je úvěr zajištěný zástavním právem k nemovitosti. Dlužník se s věřitelem dohodnou na výši půjčené částky (jistina), na době, kdy bude půjčka splacena, a na odměně za půjčku. Výše této odměny je obvykle úměrná výši jistiny v jistém poměru a udává se v procentech za rok (latinsky per annum, zkratka p. a.).

Např. když si půjčíme 100 000,– Kč s úrokem 4 % p. a., tak za rok dlužíme $100\,000 \times 1{,}04 = 104\,000$,– Kč. Pokud tuto částku nevrátíme, tak za další rok už dlužíme $104\,000 \times 1{,}04 = 108\,160$,– Kč. Pokud úrokovou míru (např. 4 % p. a.) vyjádříme koeficientem q (zde $q = 1{,}04$), tak po n letech, při počáteční jistině a_0, dlužíme

$$a_n = a_0\, q^n$$

a to je částka, kterou bychom měli věřiteli vrátit, pokud se domluvíme, že dluh splatíme najednou ve stanovenou dobu.

V případě hypotečního úvěru, který banka poskytuje fyzické nebo právnické osobě, se ale splácení většinou provádí v konstantních měsíčních splátkách. Uvažujme tedy časový krok jeden měsíc, půjčenou částku a_0, konstantní pravidelnou (měsíční) splátku s, úrokovou sazbu vyjádřenou (měsíčním) koeficientem q. Na začátku dlužíme bance a_0 korun. Po jednom měsíci naroste dluh v poměru q a klesne o výši splátky s, tedy bude

$$a_1 = a_0 q - s.$$

Po dvou měsících bude dluh

$$a_2 = a_1 q - s = (a_0 q - s)q - s = a_0 q^2 - sq - s.$$

Po třech měsících bude

$$a_3 = a_2 q - s = (a_0 q^2 - sq - s)q - s = a_0 q^3 - sq^2 - sq - s.$$

Po n měsících bude dluh

$$a_n = a_0 q^n - s(1 + q + \cdots + q^{n-1}). \tag{2}$$

Výraz v závorce je součet geometrické posloupnosti, pro který si odvodíme jednoduchý vztah.

Součet geometrické posloupnosti

Označme

$$r = 1 + q + \cdots + q^{n-1}.$$

To lze také zapsat

$$r = \sum_{i=0}^{n-1} q^i.$$

Je-li $q = 1$, je $r = n$. Pro $q \neq 1$ vynásobíme tento vztah hodnotou q

$$rq = q + q^2 + \cdots + q^n,$$

odečteme r a dostaneme (protože většina členů se vyruší)

$$rq - r = q^n - 1$$

a po vydělení nenulovým výrazem $(q - 1)$ dostaneme pro součet geometrické posloupnosti

$$r = \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Výpočet splátky

Tedy výraz (2) pro dluh po n měsících bude

$$a_n = a_0 q^n - s\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Naším cílem je nastavit výši splátky s tak, že po n pravidelných splátkách bude dluh zcela splacen, tedy

$$a_n = 0,$$

tedy

$$a_0 q^n - s\frac{q^n - 1}{q - 1} = 0.$$

Tak dostáváme po jednoduché úpravě vztah mezi počátečním dluhem a_0, výší splátky s, počtem splátek n a úrokem vyjádřeným koeficientem q ve tvaru

$$\boxed{s = a_0 \frac{q - 1}{1 - q^{-n}}.}$$

Např. při půjčené částce $a_0 = 100\,000$,– Kč, době splácení 5 let, tedy $n = 60$ měsíců (zde pro jednoduchost uvažujeme všechny měsíce stejně dlouhé; přesněji bychom tedy místo o měsíci měli hovořit o dvanáctině roku) a úrokové míře 4 % p. a., tedy koeficient odpovídající jednomu měsíci je $q = 1{,}04^{\frac{1}{12}} \doteq 1{,}003\,27$, vychází výše pravidelné měsíční splátky

$$s \doteq 1\,838,\text{– Kč}.$$

Celková částka, kterou bance zaplatíme bude

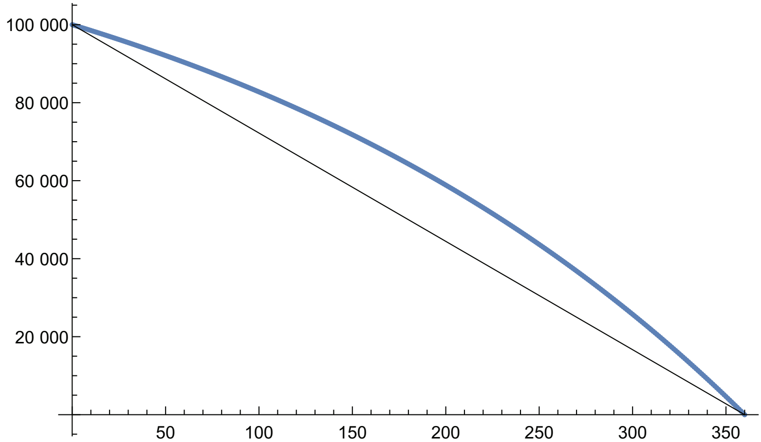
$$ns = 110\,306,\text{– Kč}.$$

Některé banky kromě úroků vyžadují i další platby spojené s poskytnutím úvěru, např. poplatek za vyřízení úvěru, poplatek za vedení účtu, poplatek za odhad ceny nemovitosti, pojištění nemovitosti, pojištění schopnosti splácet. Aby bylo možné porovnávat nabídky úvěrů od různých bank, je rozumné sledovat číslo RPSN (roční procentní sazba nákladů). To je číslo, které udává procentuální podíl z půjčené částky, který musíme celkem zaplatit. Od 1. 1. 2002 jsou poskytovatelé úvěru v České republice povinni RPSN uvádět v nabídce úvěru.

Jaké důsledky bude mít prodloužení doby splácení úvěru? Např. pokud v našem příkladu zvýšíme dobu splácení z 5 na 30 let, tedy z 60 na 360 měsíců, bude měsíční splátka $s \doteq 473$,– Kč, tedy výrazně nižší než splátka 1 838,– Kč. Nepříznivý důsledek je, že celková zaplacená částka bude $ns = 170\,389$,– Kč. S prodlužováním doby splácení úvěru klesá měsíční splátka, ale roste celková splacená částka.

Obr. 1 ukazuje, jak dlužná částka klesá v čase z počáteční hodnoty $a_0 = 100\,000$,– Kč na konečnou hodnotu $a_{360} = 0$. Na obrázku je také zakreslena úsečka spojující krajní body, aby bylo dobře vidět, že časová závislost výše dluhu na čase není lineární, ale je mírně prohnutá nahoru (konkávní). To je dáno tím, že konstantní měsíční splátka se skládá ze splátky úroku a splátky jistiny (úmoru). Na začátku je splátka úroku vyšší a dluh (hodnota nesplacené části jistiny) klesá pomalu, na konci období je splátka úroku nižší a dluh klesá rychleji.

Pro velmi velký počet splátek ($n \to \infty$) se výše splátky blíží hodnotě $a_0(q-1)$, tedy výši samotného úroku, ale celková splacená částka roste do nekonečna. Prostě splácíme pouze úrok, ale výše dluhu zůstává, tedy splácíme stále.



Obr. 1: Závislost výše dluhu v korunách na čase v měsících (silná prohnutá křivka), která ukazuje, že pokles není lineární, ale zpočátku je pomalejší a ke konci období je rychlejší. Pro srovnání je zakreslena ještě úsečka spojující krajní body

Exponenciální růst a exponenciální pokles

Ukázali jsme si, že bez průběžných splátek nám bude dlužná částka v důsledku úroku exponenciálně růst v čase. Takovýto exponenciální růst pozorujeme nejen u dluhu, ale také v řadě biologických, chemických, fyzikálních i společenských jevů.

Např. pokud mají bakterie dostatek živin a příhodné podmínky, tak jejich počet roste exponenciálně s časem. Za určité období se každá buňka rozdvojí a z jedné buňky vzniknou dvě nové. To se v čase opakuje, dokud mají dost potravy.

Na podobném principu pracuje fotonásobič. To je přístroj, který umožňuje detekovat velice slabé elektromagnetické záření. Když dopadající foton uvolní z katody elektron, je tento elektron urychlován vloženým elektrickým polem. Při dopadu na další elektrodu vyrazí větší počet elektronů, které jsou následně opět urychleny, aby vyvolaly emisi ještě většího počtu elektronů. Nakonec proud elektronů dopadá na anodu a je detekován. Celkové zesílení může dosáhnout až 10^8, tak lze detekovat i jednotlivé fotony.

Podobně ve společenských hrách typu letadlo (anglicky Ponzi scheme) se organizátoři snaží přesvědčit účastníky, aby každý získal alespoň dva další účastníky (kteří zaplatí vstupní poplatek), aby inkasovali velké odměny.

Ve všech těchto případech je důležité, že k exponenciálnímu růstu může dojít pouze po přechodné počáteční období, dokud se nevyčerpají zdroje.

Společným rysem těchto systémů je, že časový přírůstek je úměrný stavu systému (počet jedinců nebo koncentrace). Matematicky takový dynamický systém můžeme popsat diferenční rovnicí

$$a_{n+1} = q\, a_n,$$

která má řešení

$$a_n = a_0\, q^n.$$

Nebo diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = ka,$$

která má řešení

$$a(t) = a(0)\mathrm{e}^{kt}.$$

Pro $q > 1$ či $k > 0$ hovoříme o kladné zpětné vazbě. Výsledkem je exponenciální růst. Pro $0 < q < 1$ či $k < 0$ hovoříme o záporné zpětné vazbě a výsledkem je exponenciální pokles. V případě biologického systému dochází k odumírání jedinců. V případě chemického systému jde o rozpad chemickou reakcí prvního řádu. Mezi známé fyzikální systémy s tímto typem chování patří např. radioaktivní rozpad, vybíjení nabitého kondenzátoru přes konstantní odpor, chladnutí horkého předmětu vedením tepla nebo snižování koncentrace látky difuzí. Čas, za který sledovaná veličina $a(t)$ klesne na polovinu, se nazývá poločas rozpadu.

I v případě složitějších dynamických systémů, které nelze popsat jednoduchými lineárními diferenčními nebo diferenciálními rovnicemi, je tento lineární popis užitečný alespoň jako aproximace v okolí rovnovážných stavů např. pro vyšetřování jejich stability.