Rozhledy matematicko-fyzikální

Jiří Lach

Ortocentrické čtveřice bodů a trojúhelníků

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 95 (2020), No. 3, 8–13

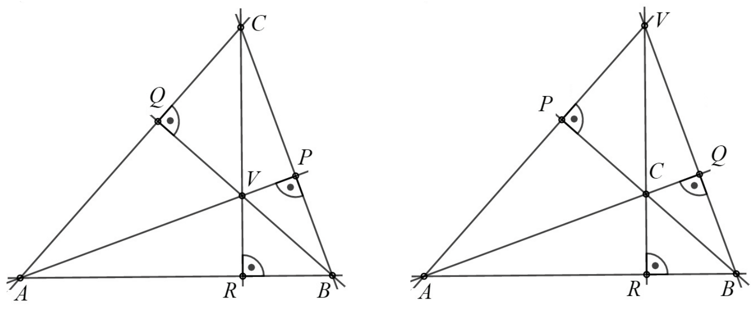
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148457

Ortocentrické čtveřice bodů a trojúhelníků

Jiří Lach, Gymnázium Matyáše Lercha, Brno

Abstrakt. Článek se zabývá vlastnostmi čtveřice bodů, které tvoří vrcholy obecného trojúhelníku a jeho ortocentrum. Těchto vlastností pak využijeme v konstrukční úloze a dále také zjistíme, jakou vlastnost tyto body mají, budeme-li uvažovat ortický trojúhelník k danému trojúhelníku.

Učivo o trojúhelnících je nedílnou součástí každého vzdělávacího programu jak na základních, tak i středních školách. Každý z vás si jistě některou část tohoto učiva vybaví. V našem článku se seznámíme s pozoruhodnými vlastnostmi čtveřic bodů, které dostaneme, když ke trojici vrcholů A, B, C obecného trojúhelníku připojíme jako čtvrtý bod V – průsečík jeho výšek AP, BQ, CR, zvaný *ortocentrum* trojúhelníku ABC. Dva druhy takovýchto čtveřic bodů vidíte na obr. 1, nalevo pro ostroúhlý trojúhelník a napravo pro trojúhelník tupoúhlý, u kterého je třeba chápat výšky jako přímky, nikoliv jako úsečky. Jistě si snadno rozmyslíte, proč v článku o takovýchto čtveřicích bodů pomineme pravoúhlé trojúhelníky.



Obr. 1: Body A, B, C a V v různých pozicích

Ortocentrem každého obecného (dále vždy nepravoúhlého) trojúhelníku ABC je jediný bod V jeho roviny, pro který platí konjunkce tří kolmostí

$$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CV} \wedge \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AV} \wedge \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BV}.$$

Jistě jste si povšimli, že oba náčrtky na obr. 1 jsou až na označení čtveřice bodů písmeny A, B, C a V geometricky shodné. Navíc, jak možná s překvapením zjistíte, na obou z nich je každý ze čtyř bodů A, B, C a V ortocentrem trojúhelníku tvořeného zbylými třemi body. (Doporučujeme, abyste třeba všechny tři výšky trojúhelníku ABV dvojicemi jejich bodů určili.) Rovnocennost rolí bodů A, B, C, V v takové situaci přivedla matematiky k následující definici.

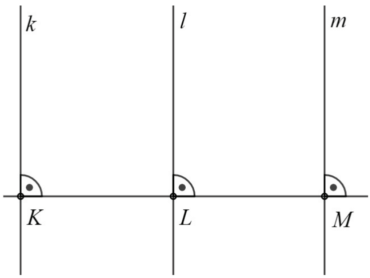
Definice 1. Řekneme, že čtveřice K, L, M, N navzájem různých bodů téže roviny je *ortocentrická*, jestliže jsou navzájem kolmé jak přímky KL a MN, tak přímky KM a LN a také přímky KN a LM. V této situaci čtveřici trojúhelníků KLM, KLN, KMN a LMN, jejichž ortocentra jsou po řadě body N, M, L a K, nazveme *ortocentrickou.*

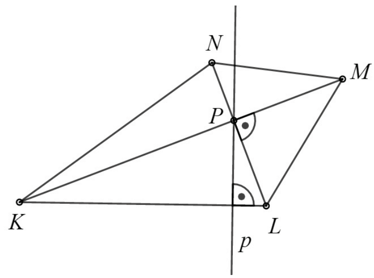
Po zavedení nového pojmu nás při zkoumání vlastností ortocentrické čtveřice trojúhelníků asi nejprve napadne otázka, zda každá ortocentrická čtveřice trojúhelníků KLM, KLN, KMN a LMN vypadá tak, jako na obr. 1: tři z těchto trojúhelníků jsou tupoúhlé a stýkají se podél společných stran tak, že jejich sjednocením je zbývající čtvrtý trojúhelník, který je ostroúhlý. K důkazu kladné odpovědi na tuto otázku, kterou uvedeme vzápětí jako větu 1, využijeme poznatek, který známe z hodin planimetrie ve škole: *Daný trojúhelník je ostroúhlý (resp. tupoúhlý) právě tehdy, když jeho ortocentrum leží uvnitř (resp. vně) daného trojúhelníku.*

Věta 1. *Některý z libovolné ortocentrické čtveřice bodů leží uvnitř trojúhelníku s vrcholy v ostatních třech bodech této čtveřice.*

Důkaz. Stačí ukázat, že žádné tři z bodů K, L, M, N tvořících ortocentrickou čtveřici neleží v jedné přímce a že všechny čtyři body K, L, M, N nejsou vrcholy konvexního čtyřúhelníku. K ověření obou tvrzení sporem využijeme náčrtků z obr. 2. Kdyby např. body K, L, M ležely v jedné přímce, z relací $KN \perp LM$, $LN \perp KM$ a $MN \perp KL$ by vyplynulo, že bod N by musel ležet na každé ze znázorněných kolmic k, l, m, které jsou ovšem rovnoběžky a nemají tedy žádný společný bod.

Kdyby body K, L, M, N byly vrcholy konvexního čtyřúhelníku jako na obrázku, jeho navzájem kolmé uhlopříčky KM a LN by se protťaly v bodě P. Z podmínky $KL \perp MN$ by vyplynulo, že přímka MN by musela být rovnoběžná s přímkou p vedenou bodem P kolmo k přímce KL. Tato přímka však rozděluje pravý úhel KPL, a tedy i k němu vrcholový úhel MPN, a tak body M a N odděluje. Nemůže proto platit $MN \parallel p$. □





Obr. 2: K důkazu věty 1

Dokázaná věta 1 má pro zkoumání ortocentrických čtveřic velký význam. Vždy totiž můžeme předpokládat, že daná ortocentrická čtveřice je tvořena třemi vrcholy ostroúhlého trojúhelníku a jeho ortocentrem. Uplatníme to v dalším textu s velkou výhodou.

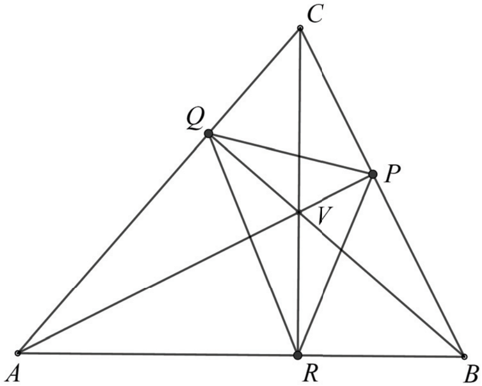
Podívejme se nyní, jak s tématem ortocentrických čtveřic souvisí významné body trojúhelníků, *paty výšek*. Je zřejmé, že pokud průsečíky kolmic KL a MN, KM a LN, respektive KN a LM, o kterých se píše v definici ortocentrické čtveřice K, L, M, N, označíme P, Q, R, pak tyto body jsou patami výšek *všech čtyř* trojúhelníků KLM, KLN, KMN a LMN (připomeňte si obr. 1 s pomyslnou záměnou bodů A, B, C a V čtveřicí K, L, M, N v jakémkoliv pořadí). Protože jeden z trojúhelníků KLM, KLN, KMN a LMN je vždy ostroúhlý, jsou paty výšek P, Q, R vnitřními body jeho stran, což znamená, že neleží v jedné přímce a tvoří tedy vrcholy trojúhelníku. Jsou-li tedy AP, BQ a CR výšky obecného trojúhelníku ABC, pak vždy existuje trojúhelník PQR. Říkáme, že trojúhelník PQR je *ortický trojúhelník* daného trojúhelníku ABC.

V předchozím odstavci jsme vysvětlili, že pokud je trojúhelník PQR ortický k některému trojúhelníku, je dokonce společným ortickým trojúhelníkem alespoň čtyř trojúhelníků. Jak nyní ukážeme, naopak pro *každý* trojúhelník PQR v rovině existují právě čtyři trojúhelníky s patami výšek v daných bodech P, Q, R. Je jasné, že tyto čtyři trojúhelníky tvoří ortocentrickou čtveřici a my v řešení následujícího příkladu ukážeme, jak tuto čtveřici sestrojit.

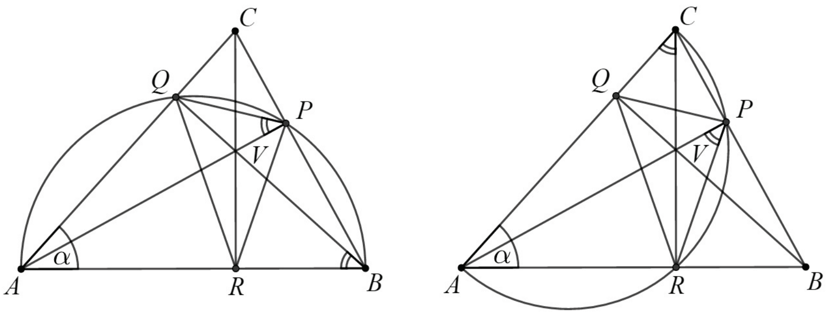
Příklad 1. V rovině jsou dány body P, Q, R, které neleží v jedné přímce. Sestrojte trojúhelník s patami výšek P, Q, R.

Řešení. Na základě předchozích poznatků již můžeme říct, že každým řešením této úlohy bude ortocentrická čtveřice bodů A, B, C, V, kterou tvoří ostroúhlý trojúhelník ABC a tři tupoúhlé trojúhelníky ABV, ACV

a BCV (viz obr. 3). Jejich konstrukční nalezení bude spočívat v následujících úvahách. Vzhledem k tomu, že výšky trojúhelníku jsou vždy na jeho strany kolmé, jsou trojúhelníky ABQ a ABP pravoúhlé s pravými úhly u vrcholů P a Q. Z toho vyplývá, že body P a Q leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB, jak můžeme vidět na obr. 4 vlevo.



Obr. 3: Ortocentrická čtveřice trojúhelníků s patami výšek P, Q, R



Obr. 4: Thaletovy kružnice nad průměry AB a AC

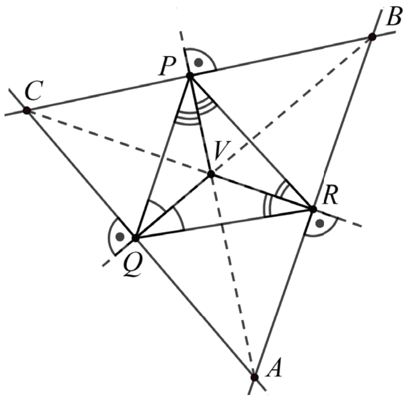
Částí této kružnice je oblouk AQ, jemuž náleží obvodové úhly ABQ a APQ, které mají stejnou velikost. Vyjádříme ji z pravoúhlého trojúhelníku ABQ: $|\sphericalangle ABQ| = |\sphericalangle APQ| = 90° - \alpha$.

Nyní se podívejme na Thaletovu kružnici nad průměrem AC, která je znázorněna na obr. 4 vpravo. Leží na ní oblouk AR, jemuž přísluší obvodové úhly RCA a RPA. Z pravoúhlého trojúhelníku ARC plyne, že

$$|\sphericalangle RCA| = |\sphericalangle RPA| = 90° - \alpha.$$

Dokázali jsme tedy rovnost $|\sphericalangle APQ| = |\sphericalangle RPA|$. Podobně bychom mohli ukázat, že platí rovnosti $|\sphericalangle PQB| = |\sphericalangle BQR|$ a $|\sphericalangle QRC| = |\sphericalangle CRP|$. Tímto jsme dokázali, že výšky AP, BQ a CR hledaného ostroúhlého trojúhelníku ABC leží na osách vnitřních úhlů jeho ortického trojúhelníku PQR.

Nyní již lze konstrukci řešení příkladu 1 snadno popsat. V trojúhelníku PQR sestrojíme osy vnitřních úhlů a jejich průsečík označíme V. V dalším kroku vedeme každým z bodů P, Q, R kolmici k sestrojené ose, která z tohoto bodu vychází (obr. 5). Průsečíky těchto tří kolmic označíme A, B, C. Řešením příkladu 1 pak jsou právě čtyři trojúhelníky: ostroúhlý trojúhelník ABC a tři tupoúhlé trojúhelníky ABV, BCV a ACV.

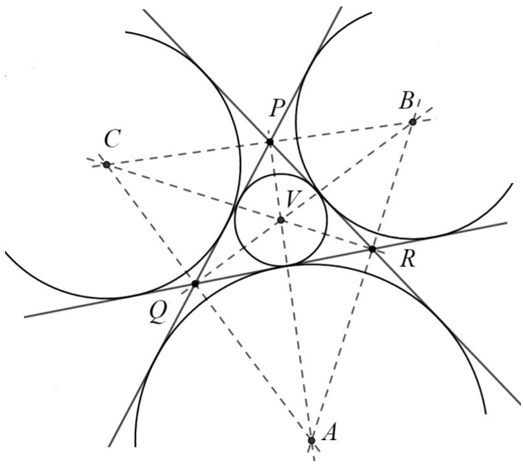


Obr. 5: Konstrukce řešení příkladu 1

Řešení příkladu 1 ukončíme důkazem správnosti konstrukce z obr. 5. Ten provedeme, když ukážeme, že body A, B, C, které jsme určili jako průsečíky tří přímek vedených vrcholy trojúhelníku PQR kolmo k osám PV, QV, RV jeho vnitřních úhlů, leží po řadě na těchto osách. (To pak totiž bude znamenat, že body P, Q, R jsou skutečně patami výšek čtyř sestrojených trojúhelníků.) Vysvětlení je snadné: sestrojené tři kolmice jsou osami *vnějších* úhlů trojúhelníku PQR, takže například bod A má stejnou vzdálenost od přímek PQ a RQ i stejnou vzdálenost od přímek PR a RQ, a tak leží na polopřímce PV. Podobně se vysvětlí potřebné polohy bodů B a C. Tím je úplné řešení příkladu 1 ukončeno.

Podané úplné řešení příkladu 1 přináší ještě jedno významné poučení. Podle konstrukce z obr. 5 je bod V středem kružnice vepsané trojúhelníku PQR, má tedy od přímek PQ, PR a RQ stejnou vzdálenost. Jak jsme v závěru řešení dokázali, tuto vlastnost mají i body A, B, C, takže jsou středy tří dalších kružnic, které se všech tří přímek PQ, PR, RQ dotýkají a kterým říkáme kružnice *připsané* jednotlivým stranám trojúhelníku PQR. Vidíme je na obr. 6, který ilustruje zajímavý a dosti překvapivý pohled na obecnou ortocentrickou čtveřici bodů. Plyne z našeho řešení příkladu 1 a vyjádříme ho závěrečnou větou 2, kterou jsme již vlastně dokázali. Před tím ještě upřesněme, že kružnicí připsanou kupříkladu straně AB daného trojúhelníku ABC rozumíme kružnici, která se dotýká strany AB v jejím vnitřním bodě a současně se dotýká přímek AC a BC vně trojúhelníka ABC.

Věta 2. *Každá ortocentrická čtveřice bodů je tvořena středy čtyř kružnic, z nichž jedna je vepsána některému trojúhelníku PQR a ostatní tři připsány jeho jednotlivým stranám. Naopak každý trojúhelník PQR takto určuje jedinou ortocentrickou čtveřici A, B, C, V (obr. 6).*



Obr. 6: Vepsaná a připsané kružnice

Literatura

[1] Altshiller-Court, N.: *College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*. Dover publications, New York, 2007.

[2] Švrček, J., Vanžura, J.: *Geometrie trojúhelníka*. SNTL, Praha, 1988.