Rozhledy matematicko-fyzikální

Pavel Pokorný

Pod jakým úhlem a z jaké výšky lze dostříknout nejdále

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 95 (2020), No. 2, 37–41

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148449`

Pod jakým úhlem a z jaké výšky lze dostříknout nejdále

Pavel Pokorný, VŠCHT Praha

Ukážeme, jak hledáním extrému funkce dvou reálných proměnných lze vyřešit praktickou fyzikální úlohu.

V předchozím článku [1] jsme se zabývali otázkou, v jaké výšce má být dírka ve svislé stěně nádrže, aby voda stříkající touto dírkou ve vodorovném směru dopadla co nejdále (při neměnné výšce hladiny). A dospěli jsme k závěru, že dírka má být v polovině výšky hladiny nad podlahou a voda potom dostříkne do vzdálenosti rovné výšce hladiny.

Uvažujme nyní obecnější úlohu, kdy máme možnost nastavit dvě nezávislé veličiny: výšku dírky nad podlahou a také směr, kterým voda stříká ven z nádrže.

Uvažujme tedy opět vodorovnou podlahu a na ní nádrž, která je do výšky H naplněna vodou, viz obr. 1. Nádrž má svislou stěnu, ve které vytvoříme malou dírku ve výšce h. Tuto dírku opatříme krátkou trubičkou, která zajistí, že voda stříká ve směru, který svírá s vodorovným směrem úhel α. Tento úhel α měříme tak, že záporné hodnoty odpovídají směru dolů, nulová hodnota vodorovnému směru a kladné hodnoty odpovídají směru nahoru. Krajní hodnoty jsou $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ (směr svisle dolů) a $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (směr svisle nahoru). Budeme uvažovat hodnoty $0 \le h \le H$ a $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Hodnota $h = 0$ by odpovídala dírce zcela dole, hodnota $h = H$ zcela nahoře u hladiny.

Položme si otázku: Jak vysoko má být tato dírka a jakým směrem má voda stříkat z trubičky, aby voda dostříkla na podlahu co nejdále, předpokládáme-li, že hladina je stále stejně vysoko?

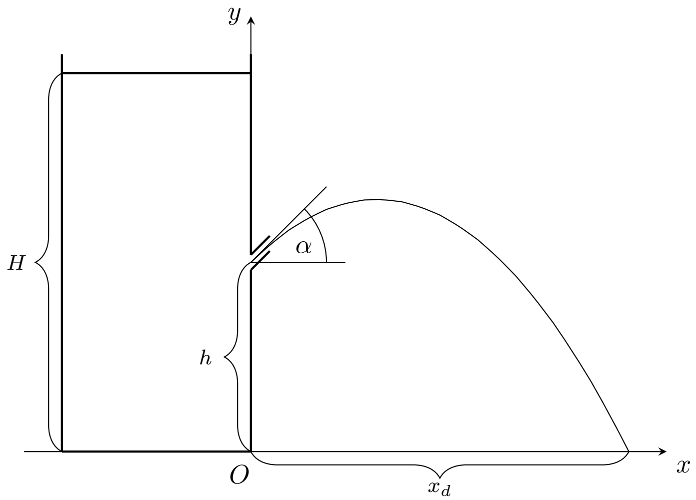
Na základě Bernoulliovy rovnice (a za předpokladu, že v nádrži se voda nepohybuje, což lze, pokud je dírka velmi malá), můžeme pro element vody o hmotnosti m psát

$$mg(H-h) = \frac{1}{2}mv^2,$$

tedy

$$v = \sqrt{2g(H-h)},$$

kde v je velikost rychlosti vody stříkající z trubičky a g je velikost tíhového zrychlení.



Obr. 1: Nádrž s vodou, s dírkou v pravé stěně, kde voda vytéká ven ve směru určeném malou trubičkou

Element vody koná pohyb, který si můžeme představit jako složený z rovnoměrného pohybu ve vodorovném směru s počáteční polohou $x = 0$ a rychlostí $v \cos \alpha$ a z rovnoměrně zrychleného pohybu ve svislém směru dolů se zrychlením o velikosti g, s počáteční polohou $y = h$ a počáteční rychlostí $v \sin \alpha$.

Element vody bude mít tedy v čase t souřadnice

$$x = tv \cos \alpha$$

a

$$y = h + tv \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Element vody, který dopadne na podlahu, má $y = 0$. Z této podmínky,

$$h + tv \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 = 0,$$

určíme čas dopadu (vyřešením této kvadratické rovnice, přičemž vezmeme jen kladné řešení, které je jediné fyzikálně možné)

$$t_d = \left(v \sin\alpha + \sqrt{v^2 \sin^2\alpha + 2gh}\right)/g.$$

Souřadnice (vzdálenost) místa dopadu pak je

$$x_d = v\cos\alpha\, t_d = v\cos\alpha\left(v \sin\alpha + \sqrt{v^2 \sin^2\alpha + 2gh}\right)/g.$$

Použitím dříve odvozeného $v = \sqrt{2g(H-h)}$ a po úpravě dostaneme

$$\frac{x_d}{2H} = \sqrt{1-\frac{h}{H}}\cos\alpha\left(\sqrt{1-\frac{h}{H}}\sin\alpha + \sqrt{\left(1-\frac{h}{H}\right)\sin^2\alpha + \frac{h}{H}}\right).$$

Výrazem $2H$ dělíme, abychom na pravé straně dostali jednodušší výraz.

Nyní se nabízí zavést substituci (jednoduše označit opakující se výraz)

$$b = \sqrt{1-\frac{h}{H}},$$

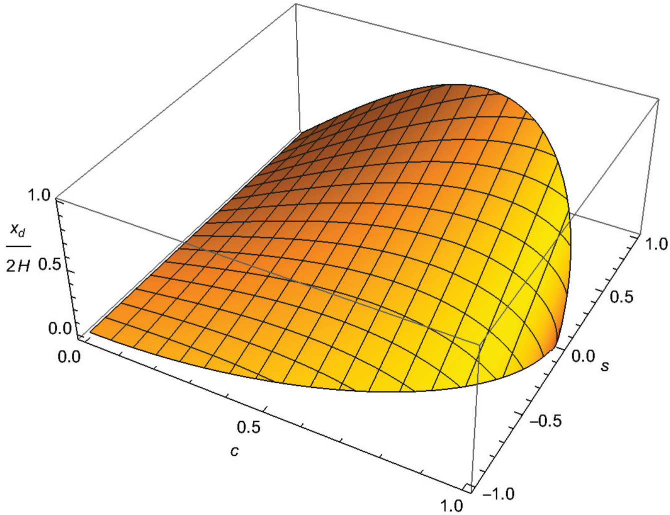
protože potom dostaneme (po použití vztahu $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$)

$$\frac{x_d}{2H} = b\cos\alpha\left(b\sin\alpha + \sqrt{1-b^2\cos^2\alpha}\right).$$

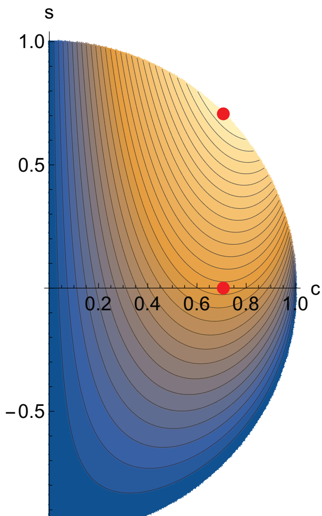
My hledáme maximum tohoto výrazu, který závisí na dvou proměnných: b a α. Z podmínky $0 \le h \le H$ plyne podmínka $0 \le b \le 1$.

Nyní se nabízí zavést další substituce: $c = b\cos\alpha$ a $s = b\sin\alpha$. Proměnné c a s můžeme chápat jako kartézské souřadnice, proměnné b a α jako polární souřadnice (nejsou to ale přímo souřadnice bodů, kam dopadá voda apod.). Protože $c^2 + s^2 = b^2 \le 1$, hledáme maximum x_d za podmínek $c^2 + s^2 \le 1$ a $c > 0$. Tedy hledáme maximum funkce dvou reálných proměnných na půlkruhu. Grafem této funkce je dvourozměrná plocha v trojrozměrném prostoru, viz obr. 2.

Hodnoty této funkce lze znázornit pomocí vrstevnic (podobně jako se znázorňuje nadmořská výška na mapě). Vrstevnice je zde křivka, která spojuje místa se stejnou funkční hodnotou. Pro naši funkci jsou vrstevnice zobrazeny na obr. 3.



Obr. 2: Graf funkce dvou proměnných, pro kterou hledáme maximum. Obrázek ukazuje, že maximum nastává na okraji



Obr. 3: Vrstevnice funkce, jejíž maximum hledáme, ukazují, že extrém nenastává uvnitř, ale na okraji dané oblasti

Vrstevnice ukazují, že maximum nenastává uvnitř uvažované oblasti, ale na kraji, kde $b = 1$ a $\alpha > 0$. Za těchto podmínek se nám uvažovaná funkce zjednoduší na tvar

$$\frac{x_d}{2H} = \sin 2\alpha.$$

Maximum x_d tedy nastává, když $b = 1$ a $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Na obr. 3 je tento bod o souřadnicích $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $s = \frac{\sqrt{2}}{2}$ vyznačen horním červeným puntíkem na okraji studované oblasti. Z podmínky $b = 1$ plyne $h = 0$. Maximální hodnota je pak

$$x_d = 2H.$$

A co značí ten dolní červený puntík o souřadnicích $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $s = 0$? Tento bod odpovídá maximu dostřiku, pokud uvažujeme pouze vodorovnou polohu trubičky, když voda stříká z nádrže ve vodorovném směru, tedy $\alpha = 0$. Tuto úlohu jsme řešili v předchozím článku [1]. Tam jsme dospěli k závěru, že dostříkneme nejdále, pokud dírka bude v polovině výšky hladiny, tedy $h = \frac{H}{2}$. Pak bude $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $s = 0$.

Na tomto příkladu je vidět, jak užitečné vrstevnice jsou. Dnes si lze vrstevnice i pro složité funkce nakreslit rychle a snadno na počítači. Užitečným softwarovým nástrojem je např. počítačový algebraický systém *Mathematica* (`en.wikipedia.org/wiki/Wolfram_Mathematica`) – k přípravě obr. 3 jsme použili příkaz `ContourPlot` (`https://reference.wolfram.com/language/ref/ContourPlot.html`).

Závěr: Bude-li dírka ve stěně dole u podlahy (tj. $h = 0$) a bude-li voda stříkat šikmo vzhůru pod úhlem $\alpha = 45°$, pak voda dostříkne nejdále, a to do vzdálenosti $x_d = 2H$.

Poděkování

Za inspiraci k této úvaze jsem vděčný svému příteli Tomáši Mouchovi.

Literatura

[1] Pokorný, P.: Jak dostříknout co nejdále. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 95 (2020), č. 1, s. 50–51.