Rozhledy matematicko-fyzikální

Ľubomíra Dvořáková

Řešení úlohy MO krajského kola kategorie C

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 94 (2019), No. 2, 21–23

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148003`

Řešení úlohy MO krajského kola kategorie C

Ľubomíra Dvořáková, FJFI ČVUT, Praha

Abstrakt. Nejen pro řešitele 68. ročníku matematické olympiády je určen tento příspěvek, v němž představíme řešení 2. úlohy krajského kola kategorie C, které se konalo 2. 4. 2019. Kromě autorského řešení zveřejníme i dvě velmi pěkná studentská řešení. Našli se i další řešitelé, kteří za úlohu získali plný počet bodů. Opravující úlohy, autorka tohoto příspěvku, subjektivně vyhodnotila zde prezentovaná řešení jako nejelegantnější.

Úloha 2: Jaký je nejmenší možný součet čtyř přirozených čísel takových, že dvojice vytvořené z těchto čísel mají největší společné dělitele 2, 3, 4, 5, 6 a 9? Uveďte příklad vyhovující čtveřice s takovým součtem a zdůvodněte, proč neexistuje vyhovující čtveřice s menším součtem.

(*Tomáš Jurík*)

Autorské řešení

Dejme tomu, že máme čtyři čísla s požadovanými vlastnostmi. Protože právě tři dvojice mají sudého největšího společného dělitele, jsou právě tři z nich sudá a jedno liché (nemohou být všechna sudá a dvě sudá jsou na tři sudé společné dělitele málo). Označme tři sudá čísla a, b a c tak, že pro jejich největší společné dělitele s lichým číslem d platí $(d, a) = 3$, $(d, b) = 5$, $(d, c) = 9$. Odtud pak vychází, že sudá čísla a, b, c jsou postupně násobky čísel 6, 10, 18 a číslo d je nutně násobek 45. Čísla a, c mají společného dělitele 6, takže nutně platí $(a, c) = 6$. Hodnoty (a, b) a (b, c) jsou proto v nějakém pořadí čísla 2 a 4. Máme tak dvě možnosti: Čísla a, b jsou násobky 4. Potom čísla a, b, c, d jsou postupně násobky čísel 12, 20, 18, 45. Takováto vyhovující čtveřice má nejmenší součet $12 + 20 + 18 + 45 = 95$. Čísla b, c jsou násobky 4. Potom čísla a, b, c, d jsou postupně násobky čísel $6, 20, 36, 45$. Takováto vyhovující čtveřice má nejmenší součet $6 + 20 + 36 + 45 = 107$. Nejmenší možný součet je tudíž 95, čemuž odpovídá čtveřice 12, 20, 18, 45.

Řešení Filipa Olivera Klimoszka z Gymnázia Jana Keplera

1. Jestliže mají mít dané dvojice největší společné dělitele 2, 3, 4, 5, 6, 9, musí mít vždy dané dvojice společné části prvočíselného rozkladu 2, 3, $2 \cdot 2$, 5, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 3$ a nic jiného.

2. Označme si hledaná čtyři přirozená čísla a, b, c, d.
3. Při bližším zkoumání požadovaných prvočíselných rozkladů zjistíme, že budeme „rozdělovat“ prvočísla 2, 3 a 5. Utvoříme si proto tabulku:

	2	3	5
a	//	0	/
b	//		0
c	/		0
d	0	//	/

Obr. 1: Tabulka, kam doplňujeme počet výskytů prvočísel 2, 3, 5 v prvočíselných rozkladech čísel a, b, c, d

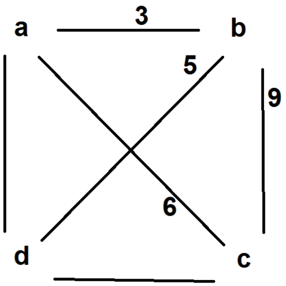
- Víme, že dvě čísla musí mít společnou část $2 \cdot 2$. Nechť jsou to bez újmy na obecnosti čísla a a b.
- Musíme vytvořit společnou část prvočíselného rozkladu nějakých dvou čísel rovnou dvěma. Nemůžeme dát 2 do každého čísla, pak by nešlo vytvořit největší společný dělitel 9. Zároveň nelze použít znova dvojici a, b, proto do jednoho z čísel c, d dáme jednu dvojku. Do druhého nedáme žádnou.
- Obdobně budeme rozdělovat číslo 3. Zde víme, že jedno z čísel, které bude obsahovat $3 \cdot 3$ je d, protože jinak by nebylo možné vytvořit dělitele 9. (V číslech a, b i c je vždy alespoň jedna dvojka.) Zároveň víme, že čísla a a b nemohou obsahovat obě zároveň trojku. (Jinak by neměla největší společný dělitel 4). Nechť bez újmy na obecnosti a neobsahuje 3.
- Číslo a je zatím schopno mít největšího společného dělitele rovného čtyřem s b a rovného dvěma s c. Ale potřebuje ještě jiného největšího společného dělitele s dalším číslem. Jediná možnost je dělitel 5 s číslem d. Žádné další pětky už není zapotřebí.
- Již známe číslo $a = 20$ a $d = 45$. Nyní máme dvě možnosti:
  (a) Číslo b bude obsahovat $3 \cdot 3$ a číslo c bude obsahovat 3, pak $b = 36$ a $c = 6$.
  (b) Číslo b bude obsahovat 3 a číslo c bude obsahovat $3 \cdot 3$, pak $b = 12$ a $c = 18$.
- Jelikož $36 + 6 > 12 + 18$, použijeme pro výpočet nejmenšího součtu $b = 12$ a $c = 18$.

4. Vyhovující čtveřice je 12, 18, 20, 45 a její součet je 95.

Řešení Martina Dedka z Mensa gymnázia

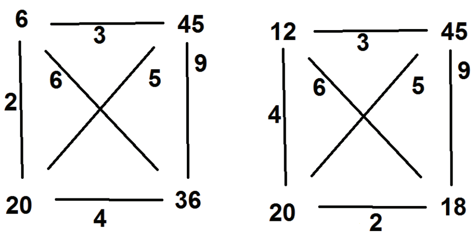
Řešení Martina Dedka je velmi podobné autorskému řešení. Navíc ale vhodně využívá zakreslení situace do grafu.

Jelikož někteří NSD (největší společní dělitelé) jsou lichá čísla, nemohou být všechna hledaná čísla sudá. Tudíž jedno číslo je určitě liché, označme ho b. A zbylá tři čísla? Máme 3 sudé NSD a s lichým číslem nelze mít NSD sudého. Tudíž zbylá tři čísla jsou sudá. Mezi dvěma sudými čísly je NSD také sudý, takže b má NSD s ostatními čísly liché (doplníme 3, 5, 9 do obrázku).



Obr. 2: Graf, kde vrcholy jsou hledaná čísla a hrany jsou označeny NSD příslušných dvojic vrcholů

Jelikož hledáme čísla s minimálním součtem, je b rovno nejmenšímu společnému násobku svých dělitelů 3, 5, 9, tj. $b = 45$. Číslo a je dělitelné 3 a je sudé a číslo c je dělitelné 9 a je sudé. Nutně tedy $\mathrm{NSD}(a, c) = 6$. Nyní už jen zjistíme, zda $a + c$ je větší pro možnost, kdy $\mathrm{NSD}(a, d) = 2$ a $\mathrm{NSD}(d, c) = 4$, nebo $\mathrm{NSD}(a, d) = 4$ a $\mathrm{NSD}(d, c) = 2$.



Obr. 3: Dvě možné čtveřice zakreslené do grafu spolu s odpovídajícími NSD

Nejmenší možný součet je 95, a to pro čísla 12, 18, 20, 45.