Rozhledy matematicko-fyzikální

Antonín Čejchan

O jedné vlastnosti prvočísel – totální ciferné součty

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 93 (2018), No. 4, 7–10

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/147569`

O jedné vlastnosti prvočísel – totální ciferné součty

Antonín Čejchan, FZÚ AV ČR, Praha

Abstract. The article gives a definition of a term "total digit sum of prime numbers" and discusses the interesting distribution of its values.

Obsahem následujícího textu je několik zajímavostí týkajících se totálního ciferného součtu prvočísel. (Termín bude definován v následujícím odstavci.) Proč se věnovat právě prvočíslům, je zřejmě zbytečné příliš rozebírat. Za oblast teorie stačí jmenovat například *základní větu aritmetiky*, která říká, že každé přirozené číslo větší než 1 lze jednoznačně rozložit na součin prvočísel [1], z čehož je vidět, že prvočísla jsou jakýmisi základními kameny čísel přirozených. Za oblast praxe je v dnešní době velkého rozvoje počítačů a počítačových sítí využívána pro bezpečný přenos zpráv *metoda RSA*, při níž se pracuje s tzv. *tajným a veřejným klíčem*, které jsou vytvořeny na základě velkých prvočísel [2].

Stručný přehled terminologie

Připomeňme nejprve některé základní pojmy.

Prvočíslo je *přirozené číslo*, které je dělitelné právě dvěma různými přirozenými čísly, číslem 1 a sebou samým. A protože mají být tito dělitelé různí, není z tohoto důvodu číslo 1 prvočíslo. Počátek posloupnosti prvočísel je tedy 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

Ciferný součet přirozeného čísla je součtem jeho číslic, tedy např. ciferný součet čísla 139 je $1 + 3 + 9 = 13$.

Zaveďme ještě funkci $\mathrm{tcs}(n)$ pro přirozená čísla n takto (mnemotechnicky *totální ciferný součet*): Spočítejme pro číslo n jeho ciferný součet. Jestliže výsledek bude menší nebo roven 9, jsme u konce a hodnotou $\mathrm{tcs}(n)$ bude tento ciferný součet. Jestliže výsledek bude větší než 9, spočítáme ciferný součet obdrženého čísla a vracíme se k rozhodnutí výše. Je-li nyní výsledek (tedy „ciferný součet ciferného součtu původního čísla") menší nebo roven 9, položíme $\mathrm{tcs}(n)$ rovno tomuto výsledku. V opačném případě rekurzivně pokračujeme. Je zřejmé, že tento proces je konečný. Platí totiž, že pro každé přirozené číslo větší než 9, je $\mathrm{tcs}(n) < n$. Důkaz bychom mohli vést přes první platnou číslici čísla n. Ta stojí na řádu 10^j, kde $j \geq 1$, kdežto u ciferného součtu ji započteme pouze s řádem 10^0. Každý další krok tedy poskytne číslo menší, ale množina přirozených čísel je zdola omezená. Proto je proces výpočtu $\mathrm{tcs}(n)$ pro každé n konečný a funkce je korektně definována.

Spočtěme jako příklad tcs(139). Tedy ciferný součet je $1+3+9=13$. Výsledek je větší než 9. Počítáme dále $1+3=4$. Výsledek je již menší než 10, a tedy $\mathrm{tcs}(139)=4$.

Globální rozložení hodnot $\mathrm{tcs}(p)$

Věnujme se prvočíslům p menším než 5 mld. Zajímá nás, jak jsou hodnoty funkce tcs pro prvočísla globálně rozloženy.

Hodnota $\mathrm{tcs}(p)$	Počet prvočísel s danou hodnotou $\mathrm{tcs}(p)$	Porovnání hodnot ze druhého sloupce v procentech
1	39158474	100
2	39160023	100.0039557
3	1	*
4	39158782	100.0007866
5	39158600	100.0003218
6	0	0.
7	39158653	100.0004571
8	39159690	100.0031053
9	0	0.

Tab. 1

Z tab. 1 vyplývá, že hodnoty $\mathrm{tcs}(p)$ jsou rozloženy velmi rovnoměrně a „náhodnost“ výskytu prvočísel nečiní jejich rozptyl rozhodně velkým; ve třetím sloupci tabulky je porovnání hodnot z druhého sloupce v procentech, přičemž za základ jsme vzali hodnotu z prvního řádku (počet prvočísel s tcs hodnotou 1). Samozřejmě jsme vynechali singulární příklad pro hodnotu 3 (označeno hvězdičkou), kterou splňuje pouze právě prvočíslo 3. U hodnot 6 a 9 se již objevují nuly, protože podle známého pravidla jsou přirozená čísla s ciferným součtem (a tedy i s totálním ciferným součtem) rovným těmto hodnotám dělitelná třemi, resp. devíti. Kdo má rád matematickou statistiku, může si přesně např. střední hodnotu nebo rozptyl hodnot $\mathrm{tcs}(p)$ spočítat.

Vzájemné rozložení hodnot tcs(p)

Podívejme se nyní na to, zda posloupnost prvočísel nepřináší některé závislosti v posloupnosti jejích tcs hodnot (zůstaneme u prvočísel menších než 5 mld.). Spočítáme tabulku četností pro každou z možných hodnot funkce tcs (1 až 9), které budou představovat záhlaví každého řádku tabulky, ve sloupcích potom bude počet prvočísel, která dané prvočíslo bezprostředně následují a mají příslušnou tcs hodnotu odpovídající danému sloupci. Tedy v políčku (j, k) tab. 2 bude počet prvočísel p, která mají hodnotu funkce tcs$(p) = k$, přičemž hodnota tcs prvočísla bezprostředně předcházejícího je j. Např. počet prvočísel s hodnotou tcs rovnou dvěma, která následují (bezprostředně) za prvočísly s tcs hodnotou rovnou jedné, je 7950826 (políčko $(1, 2)$).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4105123	7950826	0	5904627	8897536	0	7559034	4741328	0
2	6749224	4110039	1	9197102	5901908	0	5641760	7559989	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0	0
4	7557324	4740939	0	4102674	7953866	0	5902801	8901178	0
5	5644804	7555838	0	6748740	4106339	0	9200863	5902016	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	5902562	8899299	0	7562566	4738129	0	4104600	7951497	0
8	9199437	5903081	0	5643073	7560821	0	6749596	4103682	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tab. 2

Zde již vidíme, že rovnoměrnost rozložení prvočísel podle jejich tcs hodnot, se kterou jsme se setkali v tab. 1, zcela zmizela. Podívejme se na obsah tab. 2 po řádcích. Protože čísla jsou v ní hodně velká, přepočteme je na procentuální podíl v rámci každého řádku (tab. 3).

Pokusme se vyčíst z tab. 2, resp. tab. 3 nějaký vztah. Začněme v prvním řádku, tedy s tcs(1). Nalezneme v něm maximální hodnotu, která je v pátém sloupci. Máme tedy zatím posloupnost 1, 5. Jdeme na pátý řádek a opět v něm vyhledáme maximum. Zde se nachází v sedmém sloupci (posloupnost 1, 5, 7). Stejným způsobem pokračujeme dále přes všechny řádky. Tím dostaneme posloupnost 1, 5, 7, 2, 4, 8, 1, která je nejpravděpodobnější při výskytu za sebou jdoucích prvočísel s příslušnými tcs hodnotami.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10.483	20.304	0	15.079	22.722	0	19.304	12.108	0
2	17.235	10.495	*	23.486	15.071	0	14.407	19.305	0
3	0	0	0	0	100**	0	0	0	0
4	19.299	12.107	0	10.477	20.312	0	15.074	22.731	0
5	14.415	19.295	0	17.234	10.486	0	23.496	15.072	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	15.073	22.726	0	19.313	12.100	0	10.482	20.306	0
8	23.492	15.074	0	14.410	19.308	0	17.236	10.479	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

*) Zde se nachází číslo řádově 10^{-6} za singulární trojku z tab. 2.

**) Jednička v tab. 2 v tomto políčku je jediným nenulovým číslem v řádku.

Tab. 3

Při pohledu na tab. 3 vidíme, že rozdíly některých čísel z různých řádků jsou relativně velmi malé. V tab. 4 srovnáme hodnoty v jednotlivých řádcích sestupně, třetí, šestý a devátý řádek i sloupec vynecháme. Čísla v závorkách označují čísla sloupců z tab. 3.

1	22.722 (5)	20.304 (2)	19.304 (7)	15.079 (4)	12.108 (8)	10.483 (1)
2	23.486 (4)	19.305 (8)	17.235 (1)	15.071 (5)	14.407 (7)	10.495 (2)
4	22.731 (8)	20.312 (5)	19.299 (1)	15.074 (7)	12.107 (2)	10.477 (4)
5	23.496 (7)	19.295 (2)	17.234 (4)	15.072 (8)	14.415 (1)	10.486 (5)
7	22.726 (2)	20.306 (8)	19.313 (4)	15.073 (1)	12.100 (5)	10.482 (7)
8	23.492 (1)	19.308 (5)	17.236 (7)	15.074 (2)	14.410 (4)	10.479 (8)

Tab. 4

Z tab. 4 je velmi pravděpodobné, že odpovídající si hodnoty v řádcích 1, 4 a 7 jsou (v limitách k nekonečnu) skutečně totožné. A totéž platí i pro tcs hodnoty v trojici řádků 2, 5 a 8. To je další zajímavá vlastnost týkající se tcs hodnot prvočísel.

Literatura

[1] Křížek, M., Somer, L., Šolcová, A., A.: *Kouzlo čísel.* Academia, Praha, 2011.

[2] Křížek, M.: Má ryze teoretická matematika uplatnění v technické praxi? *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 44 (1999), č. 1, s. 14–24.