Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 88 (2013), No. 4, 57–60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146553

NAŠE SOUTĚŽ

Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže*. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *31. března 2014* na adresu redakce.

Úloha 37. V libovolném čtyřúhelníku $ABCD$ označme ν_{Ab} vzdálenost bodu A od strany b, dále ν_{Bc} vzdálenost bodu B od strany c atd. Dokažte, že platí:

$$\nu_{Ab} \cdot \nu_{Bc} \cdot \nu_{Cd} \cdot \nu_{Da} = \nu_{Ac} \cdot \nu_{Bd} \cdot \nu_{Ca} \cdot \nu_{Db}$$

(*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 36. *Cyklista*

Cyklista vyšlapal kopec, na vrcholu se otočil a po téže trase se vrátil zpět. Na vrcholu na svém computeru zjistil průměrnou rychlost $v_1 = 15{,}32\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, computer vynuloval a v cíli opět přečetl průměrnou rychlost jízdy z kopce $v_2 = 42{,}15\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Druhý cyklista jel stejnou trasu, ale na vrcholu computer nevynuloval. Na vrcholu mu computer ukázal průměrnou rychlost $v_1' = 14{,}35\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a v cíli průměrnou rychlost $v_\mathrm{p}' = 21{,}85\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

a) Určete průměrnou rychlost v_p jízdy prvního cyklisty.

b) Určete průměrnou rychlost v_2' jízdy z kopce druhého cyklisty.

c) Určete pro každého cyklistu poměr doby jízdy do kopce a jízdy z kopce.

(*Josef Jírů*)

Řešení úloh z čísla 1/2013

Úloha 33. Určete počet všech pětimístných čísel tvaru $\overline{ab0ab}$, která jsou rovna součinu různých prvočísel. (*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Přepíšeme dané číslo jako

$$\overline{ab0ab} = \overline{ab} \cdot 1\,001 = \overline{ab} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

Hledáme tedy dvojmístné číslo $\overline{ab}$, které je součinem různých prvočísel různých od 7, 11, 13.

Jednak číslo $\overline{ab}$ může být kterýmkoli dvojmístným prvočíslem větším než 13, tedy číslem 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 87, 89, 97. Těchto čísel je 20.

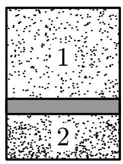
Jednak číslo $\overline{ab}$ může být součinem dvou nebo tří různých prvočísel různých od 7, 11, 13. Přehledně jsou tyto možnosti zapsány v tabulce:

$\overline{ab} = 2 \cdot 5 = 10$	$\overline{ab} = 2 \cdot 37 = 74$	$\overline{ab} = 3 \cdot 19 = 57$
$\overline{ab} = 2 \cdot 17 = 34$	$\overline{ab} = 2 \cdot 41 = 82$	$\overline{ab} = 3 \cdot 23 = 69$
$\overline{ab} = 2 \cdot 19 = 38$	$\overline{ab} = 2 \cdot 43 = 86$	$\overline{ab} = 3 \cdot 29 = 87$
$\overline{ab} = 2 \cdot 23 = 46$	$\overline{ab} = 2 \cdot 47 = 94$	$\overline{ab} = 3 \cdot 31 = 93$
$\overline{ab} = 2 \cdot 29 = 58$	$\overline{ab} = 3 \cdot 5 = 15$	$\overline{ab} = 5 \cdot 17 = 85$
$\overline{ab} = 2 \cdot 31 = 62$	$\overline{ab} = 3 \cdot 17 = 34$	$\overline{ab} = 5 \cdot 19 = 95$
	$\overline{ab} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$	

Těchto čísel je 19.

Celkový hledaný počet čísel $\overline{ab0ab}$ je $20 + 19 = 39$.

Úloha 34. *Válec rozdělený pístem*



V uzavřeném válci se svislou osou odděluje hladký válcový píst od sebe dvě stejná látková množství téhož plynu (obr.). Při teplotě $T = 300$ K jsou objemy oddělených částí v poměru $V_1 : V_2 = 3 : 1$. Jaký bude poměr $V_1' : V_2'$ při teplotě $T' = 400$ K? (*Martin Kapoun*)

Autorské řešení:

Rozdíl tlaků plynu v dolní a horní části válce je vyvolán tíhou pístu:

$$p_2 - p_1 = p_2' - p_1' = \frac{mg}{S},$$

kde m je hmotnost pístu a S plošný obsah průřezu válce.

Protože teplota a látkové množství plynu jsou v obou částech stejné, platí

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_1 + \frac{mg}{S}}{p_1} = 3.$$

Z toho

$$p_1 = \frac{mg}{2S}, \qquad p_2 = \frac{3mg}{2S}.$$

Zahřátím plynu se jeho celkový objem nezměnil:

$$V_1 + V_2 = \frac{4}{3}V_1 = \frac{4}{3}\frac{nRT}{\frac{mg}{2S}} = V_1' + V_2' =$$

$$= \frac{nRT'}{p_1'} + \frac{nRT'}{p_1' + \frac{mg}{S}} = nR \cdot \frac{4}{3}T\left(\frac{1}{p_1'} + \frac{1}{p_1' + \frac{mg}{S}}\right).$$

Z toho

$$\frac{1}{\frac{mg}{2S}} = \frac{1}{p_1'} + \frac{1}{p_1' + \frac{mg}{S}}.$$

Řešením rovnice dostaneme

$$p_1' = \frac{mg}{S\sqrt{2}} = p_1\sqrt{2}.$$

Pak

$$V_1' = \frac{nR \cdot \frac{4}{3}T}{p_1\sqrt{2}} = V_1\frac{2\sqrt{2}}{3}, \qquad V_2' = \frac{4}{3}V_1 - V_1' = V_1\frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\frac{V_1'}{V_2'} = \frac{2\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Stav soutěže po 24 soutěžních úlohách

Anna Zavadilová (Masarykovo G, Říčany) – 29 bodů
Martin Bucháček (G Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů
Michal Řepík (PedF UK, Praha 1) – 17 bodů
Michal Buráň (G, Uherský Brod) – 13 bodů
Ondřej Somič (SPŠ stavební, Opava) – 12 bodů
Tadeáš Kučera (G kpt. Jaroše, Brno) – 10 bodů
Libor Drozdek (G, Holešov) – 9 bodů

David Bainak (G kpt. Jaroše, Brno) – 9 bodů
Ondřej Kincl (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 7,5 bodu
Adam Láf (G Zborovská, Praha 5) – 7 bodů
Tomáš Pavlín (G Parléřova, Praha 6) – 7 bodů
Le Anh Dung (G, Tachov) – 5 bodů
Mark Karpilovský (G kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Jan Krejčí (G, Bílovec) – 5 bodů
Jakub Löwit (G Českolipská, Praha 9) – 5 bodů
Jan Mikal (G, Rožnov pod Radhoštěm) – 5 bodů
Josef Svoboda (G, Frýdlant nad Ostravicí) – 5 bodů
Martin Sýkora (G Nad Alejí, Praha 6) – 5 bodů
Štěpán Šimsa (G, Litoměřice) – 5 bodů
Radovan Švarc (G, Česká Třebová) – 5 bodů
Dominik Teiml (The English College, Praha) – 5 bodů
Jakub Vančura (G kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Martina Chamrová (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 4,5 bodu
Jiří Guth (G Jírovcova, České Budějovice) – 3 body
Václav Skála (G, Klatovy) – 1 bod
Jan Soukup (G, Klatovy) – 1 bod

* * * * *

Zavrženíhodné umění matematické jest zakázáno především!

Kodex císaře Justiniána I. (r. 525)

Dobrý křesťan se má stříci matematiků a všech těch, kteří dělávají prázdné předpovědi, zvláště však tehdy, když se tyto předpovědi splní. Je totiž nebezpečí, že matematici ve spolku s ďáblem matou rozum a zaplétají lidstvo do spárů pekelných.

Sv. Augustin

Jako slunce zastiňuje hvězdy svým jasem, tak i vzdělaný člověk může zastínit slávu druhých lidí, bude-li předkládat matematické úlohy, a dosáhne ještě víc, bude-li je řešit.

Brahmagupta