Rozhledy matematicko-fyzikální

Tomáš Holan

Rozdělení dětí do skupin

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 88 (2013), No. 2, 1–6

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146519

Rozdělení dětí do skupin

Tomáš Holan, MFF UK, Praha

Abstract. The article deals with a mathematical problem which was some time ago included in the entrance examination to MFF UK. The problem is analysed and two possible approaches to its solution are presented.

1. Úloha

Součástí přijímací zkoušky na MFF UK byla před časem následující úloha:

Určete počet způsobů, jimiž je možno rozdělit šest pojmenovaných dětí do tří skupin. Skupiny přitom nejsou nijak očíslovány a dva způsoby rozdělení jsou různé, pokud nějaké dítě je v jednom způsobu ve skupině s dítětem, se kterým ve druhém způsobu ve skupině není. Žádná skupina nesmí být prázdná.

2. První způsob řešení

Tuto úlohu, jako ostatně i řadu jiných úloh figurujících v přijímacích zkouškách na MFF UK, je možno řešit přinejmenším dvěma způsoby.

První způsob je tak trochu mechanický, pracný, s možností něco přehlédnout nebo udělat početní chybu. V přijímacích zkouškách tuto úlohu většina uchazečů řešila právě tímto pracnějším způsobem.

Druhý způsob je sice trochu náročnější na představivost, ale vlastní výpočet je potom naopak velice jednoduchý, a to i pro zadání větších rozměrů, např. kdybychom chtěli rozdělovat deset dětí do pěti skupin.

Podívejme se nejprve na první způsob, který bychom mohli nazvat „postup rozborem případů“.

Máme-li rozdělit 6 dětí do 3 skupin (počty budeme zapisovat čísly, bude to přehlednější), kde přitom žádná skupina nesmí být prázdná, existuje jen málo případů podle počtu členů jednotlivých skupin:

Případ 1-1-4: ve dvou skupinách po jednom dítěti, ve zbývající skupině 4 děti

Případ 1-2-3: v jedné skupině 1 dítě, ve druhé 2 děti a ve třetí zbývající 3 děti

Případ 2-2-2: 2 děti v každé skupině

Máme-li za úkol spočítat počet možností, jak 6 konkrétních (pojmenovaných, očíslovaných) dětí rozdělit do 6 skupin, spočteme počet možností, jak děti rozdělit v jednotlivých případech a součet nám dá celkový počet možností.

Nejjednodušší bude výpočet u případu 1-2-3, začněme tedy jím: Jedna skupina bude obsahovat jediné dítě. Ze šesti dětí máme tedy šest možností, které dítě to bude. Druhá skupina bude obsahovat dvě děti ze zbývajících pěti; počet možností, jak je vybrat [1], bude pro znalce kombinatoriky $\binom{5}{2}$, což je $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$.

Pro neznalce kombinatoriky: Když máme vybírat dvě děti z pěti, máme pět možností, jak vybrat první dítě (kterékoliv z těch pěti), a potom čtyři možnosti, jak vybrat druhé dítě (jedno ze zbývajících čtyř). Ale při tomto výběru každou dvojici dětí vybereme dvakrát, jednou jako prvního vybereme prvního člena dvojice a podruhé tutéž dvojici vybereme v opačném pořadí, proto musíme takto nalezených 20 možností ještě vydělit dvěma.

Pro výběr dítěte do první skupiny jsme měli 6 možností, pro výběr dětí do druhé skupiny máme 10 možností (a tyto výběry jsou na sobě nezávislé), děti do prvních dvou skupin tedy můžeme vybrat $6 \cdot 10 = 60$ možnostmi. Do třetí skupiny už můžeme vybrat jediným způsobem, a to tak, že tam umístíme zbývající 3 děti.

Pro případ 1-2-3 tedy existuje 60 možností, jak 6 dětí rozdělit do skupin daných velikostí. (Zkuste si, jestli dostaneme stejný počet, kdybychom obsazovali skupiny v jiném pořadí!)

V případu 1-1-4 máme 6 možností, jak vybrat první dítě. Potom 5 možností, jak vybrat jedno dítě do druhé skupiny, ale protože skupiny nejsou nijak pojmenovány nebo očíslovány, případy, které se budou lišit pouze tím, které dítě ze stejné dvojice jsme vybrali do první skupiny a které do druhé, nám splynou, proto musíme počet možností $6 \cdot 5$ vydělit dvěma (každé obsazení prvních dvou skupin dvěma dětmi při postupném obsazování započítáme dvakrát).

Největší, čtyřčlennou skupinu potom zase můžeme obsadit jediným způsobem čtyřmi zbylými dětmi a počet možností rozdělení dětí do skupin velikostí 1-1-4 bude proto $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$.

Jako poslední jsme si nechali případ 2-2-2. Dvě děti do první skupiny můžeme vybrat $\binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$ způsoby. Dvě děti do druhé skupiny můžeme vybrat ze zbývajících čtyř $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$ způsoby. A dvě děti do třetí skupiny nám zbydou, takže jediný způsob. To máme dohromady

$15 \cdot 6 \cdot 1 = 90$ možností. Stejně velké dvoučlenné skupiny jsou mezi sebou nerozlišitelné a dvěma kamarádům je jedno, jestli spolu budou ve skupině číslo jedna nebo ve skupině číslo dva nebo ve skupině číslo tři (obzvlášť když skupiny žádná čísla nemají). Takže jsme vlastně každou možnost rozdělení započítali tolikrát, kolika způsoby můžeme zpřeházet pořadí tří skupin. Znalci kombinatoriky vědí, že to je 3! neboli 6. Celkový počet možností v případu 2-2-2 tedy musíme dělit šesti a dostaneme $\frac{90}{6} = 15$.

Rozdělili jsme řešení na jednotlivé případy, spočítali počty řešení v jednotlivých případech a když je sečteme, vyjde nám, že celkový počet možností, jak rozdělit šest dětí do skupin, je $60 + 15 + 15 = 90$.

3. Druhý způsob řešení

Druhý způsob, jak již bylo řečeno, je možná trochu namáhavější na představivost a ještě si ho trochu zkomplikujeme sami. Nespokojíme se totiž s rozdělováním šesti dětí do tří skupin, ale zamyslíme se nad tím, kolika způsoby se dá rozdělit jakýkoliv počet dětí do jakéhokoliv počtu skupin.

Vzoreček! Kdo zklamaně čeká, že teď vytáhneme z rukávu kouzelný vzoreček, který jsme našli v tlustých knihách, ten může být v klidu! Budeme jen trochu přemýšlet a aby se nám lépe přemýšlelo (a abychom nemuseli psát dlouhé věty), zavedeme si označení: Počet možností, jak lze d dětí rozdělit do s skupin, označíme $P_{d,s}$.

Úloha, kterou máme vyřešit, znamená určit $P_{6,3}$.

Jakou hodnotu může mít takové $P_{d,s}$? To záleží na d a na s. Tak třeba když $s > d$, tak $P_{d,s} = 0$, protože skupiny nesmí být prázdné a děti se půlit nesmí! Zajímavý fakt o $P_{d,s}$, zapišme si ho:

$$P_{d,s} = 0, \quad \text{pro } s > d$$

Co ještě můžeme říci o $P_{d,s}$? Když bude skupin tolik, kolik dětí, tak bude muset být v každé skupině jedno dítě a protože ty skupiny budou stejně veliké (velikost 1), tak je od sebe nedokážeme odlišit, takže to vlastně bude jediná možnost, jak d dětí do d ($d = s$) skupin rozdělit. Zapsáno formálně:

$$P_{d,s} = 1, \quad \text{pro } s = d$$

Také můžeme napsat: $P_{d,d} = 1$.

Nakonec, když bude jediná skupina, tak máme také jedinou možnost, jak děti rozdělit, neboli

$$P_{d,s} = 1, \quad \text{pro } s = 1.$$

Známe tak hodnoty $P_{d,s}$ pro několik okrajových případů. Ale co ty ostatní?

Představte si, že máte rozdělit d dětí do s skupin a přitom to není žádný z těch okrajových případů, ty už máme vyřešené. Třeba si představte, že přijde nové dítě na hřiště, kde už ty ostatní děti jsou nějak rozdělené. Kolik má možností?

Tak jednak si může hrát samo. To znamená, že bude mít vlastní jednočlennou skupinu a pokud celý ten případ označujeme jako $P_{d,s}$, tak to znamená, že zbylých $d-1$ dětí se rozdělí do (zbylých) $s-1$ skupin. A to mohou udělat $P_{(d-1),(s-1)}$ způsoby.

Druhá možnost pro dítě, které přijde na hřiště, je, že se prostě přidá do některé skupiny. Kolik skupin má na výběr? Přece s. A kolik je možností, jak ostatní děti mohou být rozděleny v s skupinách? No přece $P_{(d-1),s}$. Jinou možnost naše příchozí dítě nemá.

To znamená, že pro celkový počet možností $P_{d,s}$ platí, že

$$P_{d,s} = P_{(d-1),(s-1)} + s \cdot P_{(d-1),s}.$$

Ale... Když chceme vědět, kolik je $P_{6,3}$, tak tenhle vzoreček nám neřekne číslo, jenom nás odkáže na $P_{5,2}$ a na $P_{5,3}$, jako v té pohádce o kohoutkovi a slepičce nebo v písničce o Líze a Lojzovi, který má přinést vodu a nechce se mu. Nebo to tak není?

Není! Protože vzoreček nás sice odkáže na stejný vzoreček, ale s jinými parametry d a s. Ty parametry budou stále menší a menší, a na konci čeká naše záchranná síť v podobě pravidel:

$$\begin{aligned} P_{d,s} &= 0, \quad \text{pro } s > d \\ P_{d,s} &= 1, \quad \text{pro } s = d \\ P_{d,s} &= 1, \quad \text{pro } s = 1 \end{aligned}$$

Takže můžeme počítat od konce a výsledky si zapisovat do tabulky (sloupečky odpovídají hodnotě s, řádky hodnotě d):

	1	2	3
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Na začátku můžeme vyplnit sloupeček pro $s = 1$ podle vzorečku-zarážky $P_{d,s} = 1$, pro $s = 1$:

	1	2	3
1	1		
2	1		
3	1		
4	1		
5	1		
6	1		

Potom jedničky na diagonálu podle vzorečku $P_{d,s} = 1$, pro $s = d$, a nuly nad ni podle vzorečku $P_{d,s} = 0$, pro $s > d$ (ale ty bychom ani vyplňovat nemuseli):

	1	2	3
1	1	0	0
2	1	1	0
3	1		1
4	1		
5	1		
6	1		

A pak vyplňovat nevyplněná políčka podle našeho vzorečku

$$P_{d,s} = P_{(d-1),(s-1)} + s \cdot P_{(d-1),s}.$$

Jenom potřebujeme, abychom hodnoty, na které se vzoreček odvolává, tedy $P_{(d-1),(s-1)}$ (o řádek a sloupec šikmo nahoru a doleva) a $P_{(d-1),s}$ (o řádek nahoru) už měli spočtené a vyplněné.

Takže můžeme začít třeba s $P_{3,2}$. Když dosadíme za d a za s, dostaneme:

$$P_{3,2} = P_{(3-1),(2-1)} + 2 \cdot P_{(3-1),2} = P_{2,1} + 2 \cdot P_{2,2} = 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

	1	2	3
1	1	0	0
2	1	1	0
3	1	3	1
4	1		
5	1		
6	1		

A stejně můžeme pokračovat až do konce tabulky, například po řádcích shora dolů a každý řádek zleva doprava:

	1	2	3
1	1	0	0
2	1	1	0
3	1	3	1
4	1	7	6
5	1	15	25
6	1	31	90

Hodnota, která nás zajímá, je $P_{6,3}$. Pohled do tabulky říká, že je to 90, tedy stejný výsledek, jaký vyšel při řešení úlohy rozborem případů. Je tu jen jeden rozdíl, kdyby se nás teď někdo zeptal, kolika způsoby lze rozdělit třeba 10 dětí do 5 skupin, budeme jen o chvíli déle vyplňovat o něco větší tabulku, zatímco při řešení stejné úlohy rozborem případů by se i znalci kombinatoriky nejspíš dostali do potíží.

Kdybyste se o takovémto řešení úloh chtěli dozvědět více, hledejte pod heslem *dynamické programování*.

Literatura

[1] Calda, E., Dupač, V.: *Matematika pro gymnázia: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* 5. vyd., Prometheus, Praha, 2008.

Zamyšlení nad jednou úlohou Diofanta

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Abstract. This is a little note concerning a relation between the area and the perimeter of a right-angled triangle.

Diofantos Alexandrijský ve své sbírce úloh nazvané *Arithmetica* (viz např. [1]) vyžaduje v šesté kapitole pod číslem 22 určit strany pravoúhlého trojúhelníku, jehož obsah je 7 a obvod 12. Snadno se přesvědčíme, že délka jedné z odvěsen y takového trojúhelníku musí splňovat kvadratickou podmínku $6y^2 - 43y + 84 = 0$ (Diofantos uvádí ekvivalentní podmínku s kladnými koeficienty $172x = 336x^2 + 24$ pro $x = y^{-1}$),