Rozhledy matematicko-fyzikální

Tamara Nedevová

Řešení úloh ze str. 17 [Mocnost bodu ke kružnici]

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 87 (2012), No. 2, 27–28

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146469

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2012

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Shechtmanovi z Izraele. Kvazikrystaly patří do fyziky kondenzovaných látek. Kvazikrystaly nemají periodické uspořádání jednotek jako krystaly. Mají však uspořádání na dlouhé vzdálenosti a postrádají translační souměrnost. Jeví také anomálie v souměrnosti a lze u nich zjistit pětičetné osy souměrnosti, které odporují zákonům krystalografie. Podobně je tomu i u látek biologických. Udělení NC za chemii z fyziky kondenzovaných látek svědčí o sbližování fyziky a chemie.

Literatura

[1] *Před šedesáti lety se zrodil velký třesk.* `www.astro.cz`, článek ze dne 31. 3. 2008.

[2] `google/Stephen Hawking`

[3] Sodomka, L.: *Základy fyziky pro aplikace a nanotechnologii, díl 3.* Adhesiv, Liberec, 2011.

[4] `google/kvazikrystaly`

[5] `nobelprizes.org/physics_chemistry`

Řešení úloh ze str. 17

1. Označme k, l, m kružnice opsané trojúhelníkům ABM, ADM, BCD a O průsečík úhlopříček AC a BD, který je půlí. Z mocnosti bodu O ke kružnici m dostáváme

$$|MO| \cdot |OA| = |MO| \cdot |OC| = |OD| \cdot |OB| = |OB|^2 = |OD|^2.$$

Díky mocnosti bodu O ke kružnici k vyplývá z rovností, že OB je tečna ke kružnici k, a z mocnosti bodu O ke kružnici l, že OD je její tečna. Celkově dostáváme, že přímka BD je společnou tečnou kružnic k a l.

2. Tvrzení dokážeme v ekvivalentní podobě: přímka OK prochází bodem L. Označme L_1, L_2 průsečíky přímky OK po řadě s kružnicemi k_1 a k. Použitím mocností bodu O ke kružnicím k_1, k získáme rovnosti

$$|OL_1| \cdot |OK| = |OM| \cdot |ON| = |OM|^2 = |OK| \cdot |OL_2|,$$

z čehož plyne rovnost $|OL_1| = |OL_2|$. Bod L_2 leží tedy na kružnici k_1 i na kružnici k_2, takže kružnice jsou souměrně sdružené podle středu O jejich společné tětivy. Tím je rovnost $L = L_2$ dokázána.

3. Označme X průsečík přímky KL s úsečkou OA. Z podobnosti trojúhelníků KOX a OLX (podle věty *uu*: $|\sphericalangle XKO| = |\sphericalangle XOL|$, $|\sphericalangle OXK| = |\sphericalangle LXO|$) dostáváme

$$\frac{|OX|}{|KX|} = \frac{|LX|}{|OX|}, \quad \text{tedy} \quad |OX|^2 = |LX| \cdot |KX|.$$

Použitím mocnosti bodu X ke kružnici k získáme jiné vyjádření téhož součinu: $|AX|^2 = |LX| \cdot |KX|$. Porovnáním levých stran předchozích dvou rovností obdržíme $|OX| = |AX|$.

4. Označme X patu výšky z vrcholu A. Úsečka AX má mít délku h, z čehož vyplývá, že bod X musí ležet na kružnici l o poloměru h se středem A. Dále vidíme, že z mocnosti bodu X plyne

$$|BX| \cdot |CX| = r^2 - |OX|^2$$

a z Eukleidovy věty pro trojúhelník ABC dostáváme $|BX| \cdot |CX| = h^2$. Porovnáním pravých stran rovností vyjádříme

$$|OX| = \sqrt{r^2 - h^2}.$$

Bod X tedy leží na kružnici m o poloměru $\sqrt{r^2 - h^2}$ se středem O.

Konstrukci trojúhelníku započneme proto nalezením bodu X jako průsečíku kružnic l a m. Bodem X pak vedeme kolmici a k úsečce AX. Konečně vrcholy B, C určíme jako průsečíky kružnice k s přímkou a. Řešitelnost úlohy závisí na počtu průsečíku kružnic m a l.

5. Ze souměrnosti podle přímky OB je zřejmá rovnost $|TE| = |TD|$. Protože bod C je průsečík tětiv AB a ED, použijeme vztah pro mocnost bodu ke kružnici k:

$$|AC| \cdot |CB| = |EC| \cdot |CD|.$$

Použitím Eukleidovy věty pro pravoúhlý trojúhelník BCT dostáváme rovnost

$$|CS| \cdot |CB| = |TC|^2.$$

Přihlédneme-li navíc k rovnostem

$$|AC| + |CS| = |AS|, \quad |TE| + |TC| = |EC|, \quad |TD| - |TC| = |CD|,$$

jež plynou ze zadání, získáme dokazovanou rovnost.