Hans Koeppler

Zwei versicherungsmathematische Integralgleichungen

Aktuárské vědy, Vol. 6 (1936), No. 3, 106–114

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144663

we can use the mean value theorem and get finally

$$\overset{<}{\bar{a}}{}_x^{ai(k)} = l_1\, \overset{<}{\bar{a}}{}_x^{ai(k-1)} + \bar{a}^i_{x+m_k}\, \overset{<}{\bar{a}}{}_x^{ai(k-1)}$$

where

$$l_1 = \bar{a}^{aa}_{x+l_1}$$

$$\frac{1}{k}\, m_k = l_1 + \bar{a}^i_{x+m_k}$$

Analogically as formerly, we have the approximate formula:

$$\overset{<}{\bar{a}}{}_x^{ai(k)} = \frac{1}{k!}\, m_1 m_2 \ldots m_k \,.\, \bar{a}^{ai}_x . \tag{10}$$

In order to use the above formula it is necessary to have tabulated the values of annuities acording to the order of active and invalid persons.

The calculation of the non-continuous values is possible owing to the analogous theorem for sums to the mean value theorem of a definite integral. The results are, of course, not so precise. Evans uses for life annuities a correction term. But it is not necessary to introduce a correction owing to the experiences on which the tables are based.

Zwei versicherungsmathematische Integralgleichungen.

Von *Hans Koeppler*, Berlin.

Man kann zwei ganz einfache Integralgleichungen aufstellen, welche von der Anzahl der versicherten Leistungen, beziehungsweise von den verschiedenen statistischen Auflösungsmöglichkeiten eines Versicherungsvertrages vollständig unabhängig sind.

Bei den folgenden Betrachtungen wollen wir von einer erweiterten Versicherungsform ausgehen, deren einmalige Prämie nach der Formel

$$\mathfrak{A}_{x\overline{n|}} = \int_0^n \frac{D_{x+t}}{D_x} \left(\mu^I_{x+t}\, S^I_t + \mu^{II}_{x+t}\, S^{II}_t\right) dt + \frac{D_{x+n}}{D_x}\, S^{III}_n$$

berechnet wird. In dieser bedeuten μ^I_{x+t} und μ^{II}_{x+t} die Intensitäten des Eintreffens der Ereignisse, auf welche die Summen S^I_t und S^{II}_t versichert werden, doch kann auch $S^{II}_t = o$ sein. Die Summe der Intensitäten $\mu^I_{x+t} + \mu^{II}_{x+t} = \mu_{x+t}$ soll die gesamte Ausscheideintensität aus der Dekremententafel für das Alter $x + t$ Jahre sein, so daß die bekannte Beziehung

$$\frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{l_{x+t}}{l_x} v^t = e^{-\int\limits_0^t (\mu_{x+\vartheta}+\delta)d\vartheta} \quad (0 < t < n)$$

besteht. S_n^{III} bedeutet die Summe, welche gezahlt wird, wenn der Versicherte beim Ablauf der Versicherungsdauer noch im versicherten Zustand verharrt. Bei Versicherung gegen kontinuierliche Prämie wird die Differentialgleichung der Prämienreserve durch die Formel

$$\frac{d\,{}_t\overline{V}_x}{dt} = (\mu_{x+t} + \delta)\,{}_t\overline{V}_x + \overline{P}_{x\overline{n}|} - \mu^I_{x+t}S^I_t - \mu^{II}_{x+t}S^{II}_t$$

gegeben. Nach Jörgensen[1]) wird diese Differentialgleichung jetzt meist als von Thiele herrührend bezeichnet, doch hat der Verfasser, der sich auch mit dieser Gleichung beschäftigt hatte, sie auch bei anderen älteren Autoren gefunden.[2]) Aus dieser Differentialgleichung der Prämienreserve kann man durch Umstellung der Glieder auch die Differentialgleichung

$$\overline{P}_{x\overline{n}|}\,dt - \mu^I_{x+t}S^I_t\,dt - \mu^{II}_{x+t}S^{II}_t\,dt = {}_t\overline{Q}_x\,dt - \mu_{x+t}\,{}_t\overline{V}_x\,dt$$

herleiten, in welcher ${}_t\overline{Q}_x\,dt = d\,{}_t\overline{V}_x - \delta\,{}_t\overline{V}_x\,dt$ die Sparprämie für das Zeitdifferential t bis $t + dt$ bedeutet.[2]) Multipliziert man diese Differentialgleichung mit dem Faktor $\frac{D_{x+t}}{D_{x+k}}$ $(t < k)$ und integriert darauf nach t zwischen 0 und k, so folgt, da

$$\overline{P}_{x\overline{n}|}\int\limits_0^k \frac{D_{x+t}}{D_{x+k}}\,dt - \int\limits_0^k \frac{D_{x+t}}{D_{x+k}}(\mu^I_{x+t}\,S^I_t + \mu^{II}_{x+t}\,S^{II}_t)\,dt = {}_k\overline{V}_x$$

die retrospektive Form der Prämienreserve darstellt, die echte Volterrasche Integralgleichung der Prämienreserve

$${}_k\overline{V}_x = \int\limits_0^k \frac{D_{x+t}}{D_{x+k}}\,{}_t\overline{Q}_x\,dt - \int\limits_0^k \frac{D_{x+t}}{D_{x+k}}\,\mu_{x+t}\,{}_t\overline{V}_x\,dt.$$

Wird die zum Ausgang gewählte Differentialgleichung, nachdem sie wieder mit dem Faktor $\frac{D_{x+t}}{D_{x+k}}$ $(t > k)$ multipliziert ist, nach t zwischen k und n integriert, so ergibt sich, da

---

[1]) Jahrbuch für Versicherungsmathematik, Berlin 1914. — Einige Bemerkungen über die Thielesche Differentialgleichung der Prämienreserve.

[2]) Assekuranz-Jahrbuch, Band 44, Wien 1924. Die mathematische Theorie der Versicherung minderwertiger Leben in kontinuierlicher Behandlung. Von Hans Koeppler, Berlin.

$$\overline{P}_{x\overline{n}|}\int_k^n \frac{D_{x+t}}{D_{x+k}}\,dt - \int_k^n \frac{D_{x+t}}{D_{x+k}}\cdot(\mu_{x+t}^I S_t^I + \mu_{x+t}^{II} S_t^{II})\,dt -$$

$$-\frac{D_{x+n}}{D_{x+k}} S_n^{III} = -{}_k\overline{V}_x$$

die prospektive Form der Prämienreserve mit negativem Vorzeichen darstellt, die prospektive Integralgleichung

$${}_k\overline{V}_x = \left(\frac{D_{x+n}}{D_{x+k}} S_n^{III} - \int_k^n \frac{D_{x+t}}{D_{x+k}}\,{}_t\overline{Q}_x\,dt\right) + \int_k^n \frac{D_{x+t}}{D_{x+k}}\,\mu_{x+t}\,{}_t\overline{V}_x\,dt.$$

In einer Arbeit, welche im Jahre 1917 vom Deutschen Verein für Versicherungs wissenschaft angenommen, aber infolge der ungünstigen Zeiten seinerzeit nicht veröffentlicht wurde, hatte der Verfasser auch Untersuchungen mit dem Ausdruck

$${}_x\overline{\Gamma}_{(t,u)} = \int_t^u \frac{D_{x+\tau}}{D_{x+t}}\,{}_\tau\overline{Q}_x\,d\tau$$

angestellt, welcher den Erwartungswert der innerhalb des Zeitramus $u - t$ anzulegenden Reserveprämien darstellt. Dieser hat zwar bisher keine größere Bedeutung gefunden, doch führt seine Umformung zu interessanten Ergebnissen, Wird nämlich, wie vorhin schon erwähnt,

$${}_\tau\overline{Q}_x\,d\tau = d\,{}_\tau\overline{V}_x - \delta\,{}_\tau\overline{V}_x\,d\tau$$

gesetzt, so ergibt sich durch Anwendung partieller Integration

$${}_x\overline{\Gamma}_{(t,u)} = \int_t^u \frac{D_{x+\tau}}{D_{x+t}}(d\,{}_\tau\overline{V}_x - \delta\,{}_\tau\overline{V}_x\,d\tau) = \int_t^u \frac{D_{x+\tau}}{D_{x+t}}\,d\,{}_\tau\overline{V}_x -$$

$$-\delta\int_t^u \frac{D_{x+\tau}}{D_{x+t}}\,{}_\tau\overline{V}_x\,d\tau =$$

$$= \left[\frac{D_{x+\tau}}{D_{x+t}}\,{}_\tau\overline{V}_x\right]_t^u + \int_t^u \frac{D_{x+\tau}}{D_{x+t}}(\mu_{x+\tau} + \delta)\,{}_\tau V_x\,d\tau - \delta\int_t^u \frac{D_{x+\tau}}{D_{x+t}}\,{}_\tau\overline{V}_x\,d\tau.$$

Bei der weiteren Vereinfachung verschwindet der Ausdruck

$$\delta\int_t^u \frac{D_{x+\tau}}{D_{x+t}}\,{}_\tau\overline{V}_x\,d\tau,$$

welcher den Erwartungswert der rechnungsmäßigen Zinserträgnisse während der Zeitstrecke $u - t$ darstellt, und es bleibt

$$\int_t^u \frac{D_{x+\tau}}{D_{x+t}} {}_\tau\overline{Q}_x \, \mathrm{d}\tau = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} {}_u\overline{V}_x - {}_t\overline{V}_x + \int_t^u \frac{D_{x+\tau}}{D_{x+t}} \mu_{x+\tau} {}_\tau\overline{V}_x \, \mathrm{d}\tau.$$

Aus dieser Gleichung kann man aber sowohl die retrospektive, als die prospektive Integralgleichung herleiten. Die erste ergibt sich für $t = o$ und ${}_0V_x = o$, wenn man die ganze Gleichung noch mit $\dfrac{D_x}{D_{x+u}}$ multipliziert. Die zweite findet man, wenn man für u die ganze Versicherungsdauer n setzt und berücksichtigt daß ${}_n\overline{V}_x = S_n^{III}$ ist.

Schreibt man andrerseits

$${}_x\overline{\Gamma}_{(t,u)} = \int_t^u \frac{l_{x+\tau}}{l_{x+t}} v^{\tau - t} {}_\tau\overline{Q}_x \, \mathrm{d}\tau = \int_t^u \frac{l_{x+\tau}}{l_{x+t}} \mathrm{d} \int_t^\tau v^{\vartheta - t} {}_\vartheta\overline{Q}_x \, \mathrm{d}\vartheta,$$

so kann man durch Anwendung partieller Integration zu der interessanten Beziehung

$${}_x\overline{\Gamma}_{(t,u)} = \left[\frac{l_{x+\tau}}{l_{x+t}} \int_t^\tau v^{\vartheta - t} {}_\vartheta\overline{Q}_x \, \mathrm{d}\vartheta \right]_t^u - \int_t^u \frac{\mathrm{d}l_{x+\tau}}{l_{x+t}} \int_t^\tau v^{\vartheta - t} {}_\vartheta\overline{Q}_x \, \mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{l_{x+u}}{l_{x+t}} \int_t^u v^{\vartheta - t} {}_\vartheta\overline{Q}_x \, \mathrm{d}\vartheta + \int_t^u \frac{l_{x+\tau}}{l_{x+t}} \mu_{x+\tau} \int_t^\tau v^{\vartheta - t} {}_\vartheta\overline{Q}_x \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\tau$$

gelangen, welche auch die Form einer Integralgleichung hat. Da man die Differentialgleichung der Prämienreserve auch unformen kann in

$$\overline{P}_{x\overline{n}|} \, \mathrm{d}t - \mu_{x+t}^{I} S_t^{I} \, \mathrm{d}t - \mu_{x+t}^{II} S_t^{II} \, \mathrm{d}t = \mathrm{d} \, {}_t\overline{V}_x - (\mu_{x+t} + \delta) \, {}_t\overline{V}_x \, \mathrm{d}t,$$

so läßt sich derselben auch die Form

$$\mathrm{d} \, {}_t\overline{V}_x - (\mu_{x+t} + \delta) \, {}_t\overline{V}_x \, \mathrm{d}t = {}_t\overline{Q}_x \, \mathrm{d}t - \mu_{x+t} \, {}_t\overline{V}_x \, \mathrm{d}t$$

geben, welche ebenfalls mit dem normalen Integrationsfaktor $\dfrac{D_{x+t}}{D_{x+k}}$ zu integrieren ist, um zu den beiden aufgestellten Integralgleichungen zu gelangen. Diese lassen sich übrigens noch auf mechanische Weise aus den einfachen Formeln der Prämienreserve herleiten, indem man zu der natürlichen Risikoprämie (assesment) des Zeitdifferentials t bis $t + \mathrm{d}t$

$$(\mu_{x+t}^{I} S_t^{I} + \mu_{x+t}^{II} S_t^{II}) \, \mathrm{d}t$$

das Glied

$$(\mu_{x+t} \, {}_t\overline{V}_x - \mu_{x+t} \, {}_t\overline{V}_x) \, \mathrm{d}t$$

hinzufügt und sodann berücksichtigt, daß

$$(\mu^{I}_{x+t}\, S^{I}_{t} + \mu^{II}_{x+t}\, S^{II}_{t} - \mu_{x+t}\, {}_{t}\overline{V}_{x})\, dt = {}_{t}\overline{\Pi}_{x}\, dt$$

die Risikoprämie und

$$\overline{P}_{x\overline{n}|}\, dt - {}_{t}\overline{\Pi}_{x}\, dt = {}_{t}\overline{Q}_{x}\, dt$$

die Sparprämie des Zeitraums t bis $t + dt$ ist.

Der lösende Kern der retrospektiven Integralgleichung lautet

$$\Gamma_{(k,t)} = \frac{D_{x+t}\, l_{x+k}}{D_{x+k}\, l_{x+t}}\, \mu_{x+t} = r^{k-t}\, \mu_{x+t} \qquad (r = 1 + i = e^{\delta}),$$

und mithin ihre Lösung

$${}_{k}\overline{V}_{x} = \int\limits_{0}^{k} \frac{D_{x+t}}{D_{x+k}}\, {}_{t}\overline{Q}_{x}\, dt - \int\limits_{0}^{k} r^{k-t}\, \mu_{x+t} \int\limits_{0}^{t} \frac{D_{x+\vartheta}}{D_{x+t}}\, {}_{\vartheta}\overline{Q}_{x}\, d\vartheta\, dt.$$

Für die prospektive Integralgleichung heißt der lösende Kern

$$\Gamma_{(t,k)} = \frac{D_{x+t}\, l_{x+k}}{D_{x+k}\, l_{x+t}}\, \mu_{x+t} = v^{t-k}\, \mu_{x+t}$$

und daher ihre Lösung

$${}_{k}\overline{V}_{x} = \left(\frac{D_{x+n}}{D_{x+k}}\, S^{III}_{n} - \int\limits_{k}^{n} \frac{D_{x+t}}{D_{x+k}}\, {}_{t}\overline{Q}_{x}\, dt\right) + \\ + \int\limits_{k}^{n} v^{t-k}\, \mu_{x+t} \left(\frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}\, S^{III}_{n} - \int\limits_{t}^{n} \frac{D_{x+\vartheta}}{D_{x+t}}\, {}_{\vartheta}\overline{Q}_{x}\, d\vartheta\right) dt.$$

Der Subtrahendus der Lösung der retrospektiven Gleichung läßt sich umformen in

$$l_{x+k} \int\limits_{0}^{k} d\left(\frac{1}{l_{x+t}}\right) \int\limits_{0}^{t} \frac{D_{x+\vartheta}}{D_{x+k}}\, {}_{\vartheta}\overline{Q}_{x}\, d\vartheta\, dt.$$

Wendet man num noch die partielle Integration an, so ergibt sich

$$\int\limits_{0}^{k} \frac{D_{x+\vartheta}}{D_{x+k}}\, {}_{\vartheta}\overline{Q}_{x}\, d\vartheta - \int\limits_{0}^{k} r^{k-t}\, {}_{t}\overline{Q}_{x}\, dt.$$

Man erhält somit

$${}_{k}\overline{V}_{x} = \int\limits_{0}^{k} r^{k-t}\, {}_{t}\overline{Q}_{x}\, dt,$$

d. h. die Prämienreserve der alternativen Versicherungen ist gleich der Summe der aufgezinsten Sparprämien, die bisher den Prämien entnommen wurden.

Diese Eigenschaft hat Prof. Insolera in seinem Aufsatz „Die Prämienreserve und die Veränderungen der Sterblichkeit in der Zeit“ (Blätter für Versicherungsmathematik und verwandte Gebiete, 2 Band, 4. Heft) zur Aufstellung der Integralgleichung

$$ {}_k\overline{V}_x = \int_0^k {}_t\overline{Q}_x \, dt + \delta \int_0^k r^{k-t} \, {}_t\overline{Q}_x \, dt \, dt $$

und ihrer Lösung

$$ \int_0^k {}_t\overline{Q}_x \, dt = {}_k\overline{V}_x - \delta \int_0^k {}_t\overline{V}_x \, dt $$

verwendet. Auf diese Beziehung kommt man aber auch unmittelbar, wenn man die Definitionsgleichung

$$ {}_t\overline{Q}_x \, dt = d \, {}_t\overline{V}_x - \delta \, {}_t\overline{V}_x \, dt $$

zwischen 0 und k integriert. Multipliziert man aber die Gleichung

$$ \int_0^t {}_t\overline{Q}_x \, dt = {}_t\overline{V}_x - \delta \int_0^t {}_t\overline{V}_x \, dt $$

mit dem Faktor r^{k-t} und integriert darauf zwischen 0 und k, so erhält man die bemerkenswerte Beziehung

$$ \int_0^k \int_0^t {}_t\overline{Q}_x \, dt \, r^{k-t} \, dt = \int_0^k \left(r^{k-t} \, d \int_0^t {}_t\overline{V}_x \, dt + d r^{k-t} \int_0^t {}_t\overline{V}_x \, dt \right) = $$

$$ = \int_0^k d \left(r^{k-t} \int_0^t {}_t\overline{V}_x \, dt \right) = \int_0^k {}_tV_x \, dt. $$

Hiernach besteht auch die Gleichung

$$ \int_0^k {}_t\overline{Q}_x \, dt = {}_k\overline{V}_x - \delta \int_0^k \int_0^t {}_t\overline{Q}_x \, dt \, r^{k-t} \, dt, $$

aus welcher sich durch Umstellung der Glieder die von Prof. Insolera aufgestellte Gleichung ergibt.

Durch Anwendung der Beziehung

$$ {}_t\overline{Q}_x \, dt = \overline{P}_{x\overline{n}|} \, dt - {}_t\overline{\Pi}_x \, dt. $$

nimmt unser Ergebniß die Form an

$$ {}_k\overline{V}_x = \overline{P}_{x\overline{n}|} \int_0^k r^{k-t} \, dt - \int_0^k r^{k-t} \, {}_t\overline{\Pi}_x \, dt. $$

D. h., die Prämienreserve ist gleich der Summe der aufgezinsten Durchschnittsprämien abzüglich der Summe der aufgezinsten, bisher verbrauchten Risikoprämien. Bei Risikoversicherungen gilt die gleiche

Betrachtung, doch dienen bei den Risikoversicherungen die Sparprämien zur Auffüllung der späteren Risikoprämien, welche höher als die Durchschnittsprämie sind. Man kann dieses auch aus der Bedingungsgleichung

$$\int_0^n \frac{D_{x+t}}{D_x} (\mu^I_{x+t} S^I_t - /_n\overline{P}_x)^2 \, dt + \int_0^n \frac{D_{x+t}}{D_x} (\mu^{II}_{x+t} S^{II}_t - /_n\overline{P}_x)^2 \, dt = \mathrm{Min}$$

erkennen, welche nach Differentiation nach $/n\overline{P}_x$ und nach Nullsetzen für die Durchschnittsprämie die bekannte Formel liefert.

Auch für den anderen Grenzfall, welcher die reine Beharrungsversicherung (Versicherung auf den Erlebensfall ohne Rückgewähr) betrifft, gilt diese Formel. Man hat sich nur zu vergegenwärtigen, daß für diese Versicherungsart die Sparprämie gleich der Durchschnittsprämie vermehrt um die riskierte Ergänzungsprämie ist, welche letztere zur Auffüllung der Prämienreserve erforderlich ist. Es ist also

$$_t\overline{Q}_x \, dt = \overline{P}_{x\overline{n|}}^{\;\;1} \, dt + \mu_{x+t} \, {}_t\overline{V}_x \, dt \, .$$

Mit dieser Beziehung geht die obige Formel über in

$$_k\overline{V}_x = \overline{P}_{x\overline{n|}}^{\;\;1} \int_0^k r^{k-t} \, dt + \int_0^k r^{k-t} \, \mu_{x+t} \, {}_t\overline{V}_x \, dt.$$

Das zweite Integral der prospektiven Integralgleichung kann auf die Form

$$\int_k^n d\left(\frac{1}{l_{x+t}}\right) (l_{x+n} \, v^{n-k} S^{III}_n) - \int_k^n d\left(\frac{1}{l_{x+t}}\right) \int_t^n l_{x+\vartheta} \, v^{(\vartheta-k)} \, {}_\vartheta\overline{Q}_x \, d\vartheta$$

gebracht werden, die sich nach Anwendung partieller Integration noch umgestalten läßt in

$$\left(v^{n-k} - \frac{D_{x+n}}{D_{x+k}}\right) S^{III}_n - \int_k^n v^{t-k} \, {}_t\overline{Q}_x \, dt + \int_k^n \frac{D_{x+t}}{D_{x+k}} \, {}_t\overline{Q}_x \, dt.$$

Führt man nun diesen Ausdruck in die Lösung ein, so bekommt man

$$_k\overline{V}_x = v^{n-k} S^{III}_n - \int_k^n v^{t-k} \, {}_t\overline{Q}_x \, dt.$$

Hiernach ist das Deckungskapital alternativer Versicherungen gleich dem diskontierten Wert der im Beharrungsfall fällig werdenden Versicherungssumme abzüglich der Summe der Barwerte der bis zum Ende der Versicherungsdauer anzulegenden Sparprämien.

Drückt man die Sparprämien durch die Differenz der Durchschnittsprämien und der Risikoprämien aus, so entsteht die Formel

$$ {}_k\overline{V}_x = v^{n-k} S_n^{III} - \overline{P}_{x\overline{n}|} \int_k^n v^{t-k}\, dt + \int_k^n v^{\,t-k}\, {}_t\overline{\Pi}_x\, dt, $$

die sich ebenfalls leicht in Worte kleiden läßt.

Da für Risikoversicherungen $S_n^{III} = 0$ zu setzen ist, kommt man bei diesen Versicherungen zu dem Ausdruck

$$ {}_k\overline{V}_x = -\int_k^n v^{\vartheta - k}\, {}_\vartheta\overline{Q}_x\, d\vartheta. $$

Nach diesem ist das Deckungskapital der reinen Risikoversicherungen gleich dem negativen Barwert aller künftigen Sparprämien. Demnach ist das Deckungskapital positiv; denn, da die Prämienreserven der Risikoversicherungen gegen Null konvergieren, werden die Sparprämien negativ, sodaß die Summe ihrer diskontierten Werte positiv ist. Setzt man für ${}_\vartheta\overline{Q}_x\, d\vartheta$ den Wert, so wird diese Eigenschaft durch eine einfache Berechnung bestätigt; denn es ergibt mit nicht der Bedingung ${}_n\overline{V}_x = o$

$$ {}_k\overline{V}_x = -\int_k^n v^{\vartheta - k} (d\, {}_\vartheta\overline{V}_x - \delta\, {}_\vartheta\overline{V}_x\, d\vartheta) = -\int_k^n d\, (v^{\vartheta - k}\, {}_\vartheta\overline{V}_x) = {}_k\overline{V}_x. $$

Bemerkenswert ist wohl auch, daß es sich in diesem Fall um eine prospektive Integralgleichung von der Form

$$ \varphi(x) = -f(x) + \int_x^k K(\xi, x)\, \varphi(\xi)\, d\xi $$

handelt, deren Lösung

$$ \varphi(x) = -f(x) - \int_x^k \left(\sum_{i=1}^{i=\infty} K^{(i)}(\xi, x) \right) f(\xi)\, d\xi $$

heißt.

Dehnen wir auch hier die Betrachtung auf die reine Beharrungsversicherung (Erlebensfallversicherung ohne Rückgewähr) aus, so liefert die gefundene Formel nach Anwendung der Gleichung für ${}_t\overline{Q}_x\, dt$ das leicht verständliche Ergebniß

$$ {}_k\overline{V}_x = v^{n-k} S_n - \overline{P}^{\,1}_{x\overline{n}|} \int_k^n v^{t-k}\, dt - \int_k^n v^{t-k}\, \mu_{x+t}\, {}_t\overline{V}_x\, dt. $$

Es wäre noch darauf aufmerksam zu machen, daß die Reserveformeln, in welche die Risikoprämien eingeführt worden sind, durch Einsetzen der Ausdrücke für die Risikoprämien (Costs of insurance) in die Integralgleichungen übergehen, welche Dr. Berger[3]) betrachtet hat. Die Lösun-

[3]) Über simultane Versicherungswerte. Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen des Deutschen Vereins für Versicherungswesen in der Tschechoslovakischen Republik 1930, VI. Heft.

gen dieser Integralgleichungen sind aber die üblichen Formen der Prämienreserve.

Sowohl die retrospektive als auch die prospektive Integralgleichung läßt sich auf einfachere Weise lösen. Das einfachste Lösungsverfahren ist jenes der Differentiation. Es wurde zuerst von Prof. Cantelli[4]) angewendet.

Differentiiert man beide Integralgleichungen nach k, so ergibt sich die gemeinsame Differentialgleichung

$$\frac{d\,{}_k\overline{V}_x}{dk} = (\mu_{x+k} + \delta)\,{}_k\overline{V}_x + {}_kQ_x - \mu_{x+k}\,{}_k\overline{V}_x = \delta\,{}_k\overline{V}_x + {}_k\overline{Q}_x,$$

die wir in der Form unserer Definitionsgleichung

$$\frac{d\,{}_k\overline{V}_x}{dk} - \delta\,{}_k\overline{V}_x = {}_k\overline{Q}_x$$

schreiben können. Man braucht nur diese einfache Differentialgleichung retrospektiv und prospektiv zu integrieren, um dieselben Ergebnisse zu erhalten, welche die Lösungen der Integralgleichungen liefern. Mit Anwendung des Diskontierungsfaktors v^k läßt sich die vorstehende Differentialgleichung umformen in

$$d\,({}_k\overline{V}_x\,v^k) = v^k\,{}_k\overline{Q}_x\,dk.$$

Integriert man nun diese Gleichung zwischen 0 und k, so erhält man wegen ${}_0V_x = o$

$${}_k\overline{V}_x = \int_0^k r^{k-t}\,{}_t\overline{Q}_x\,dt.$$

Integriert man diese Gleichung aber zwischen k und n, so erhält man wegen ${}_n\overline{V}_x = S_n^{III}$

$${}_k\overline{V}_x = v^{n-k}\,S_n^{III} - \int_k^n v^{t-k}\,{}_t\overline{Q}_x\,dt.$$

L'âge limite.

E. J. Gumbel, Université de Lyon.

(A suivre.)

Puis on aura le plus grand âge dominant

$$\tilde{\omega} = \overline{\omega} - \frac{\gamma\sqrt{6}\,\sigma}{\pi}$$

---

[4]) Vergl. den Aufsatz von Prof. Dr. Insolera „Rente und Kapitalansammlung" in den Blättern für Versicherungs-Mathematik und verwandte Gebiete. Heft Nr. 7, 1. I. 1930; oder: Prof. Francesco Cantelli, Genesi e Costruzione delle Tavole di Mutualità, Roma 1914; oder: Prof. Dott. Ignazio Messina, Le Probabilità parziali nella Matematica attuariale, Roma 1916.