Heinrich Jecklin

Retrospektive Reserveberechnung nach Gruppen gleichen Acquisitionsjahres

Aktuárské vědy, Vol. 6 (1936), No. 1, 21–28

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144649

Retrospektive Reserveberechnung nach Gruppen gleichen Acquisitionsjahres.

Von Dr. *Heinrich Jecklin*, Zürich.

Es läßt sich nicht leugnen, daß die in der Praxis der Lebensversicherung heute gebräuchlichen diversen Methoden zur gruppenweisen Reservebestimmung insofern unbefriedigend sind, als die für diesen Zweck erforderliche Gruppierung des Policenbestandes nach gewissen gemeinsamen Merkmalen (z. B. gleiches erreichtes Alter, oder gleiche restliche Dauer) in jeder andern Hinsicht zumeist sinnlos und störend ist.

Die neuerdings von Smolensky auf Grund der sog. Kompakttafeln vorgeschlagene Gruppenrechnung weist nun diesen Übelstand nicht auf, indem bei dieser Methode nach gleicher verflossener Dauer gruppiert wird. Smolensky hat die Kompakttafel-Methode dem X. internationalen Aktuarkongreß in Rom 1934 vorgelegt, und in den Kongreßschriften befindet sich eine eingehende Darstellung seiner Vorschläge, weshalb sich hier eine nähere Beschreibung erübrigt. Verfasser hat in No 2, 1934 des „Versicherungsarchiv" die Kompakttafeln einer kritischen Würdigung unterzogen, dabei allerdings auch gewisse Mängel namhaft gemacht.

Die Gruppierung der Policen zwecks Reserveberechnung nach gleicher verflossener Dauer, d. h. also nach gleichem Acquisitionsjahr, ist sicherlich vorteilhaft, indem einfach jedes Zugangsjahr eine Gruppe bildet, und sie ist sinnvoll, weil hiedurch ermöglicht wird, die einzelnen Acquisitionsjahre in ihrer Weiterentwicklung zu verfolgen. Neben diesem offensichtlichen Vorteil haben jedoch die Kompakttafeln auch zwei Mängel, die nicht übersehen werden dürfen. Einesteils bleibt nämlich die richtige Alters- resp. Summenverteilung des Portefeuilles unberücksichtigt, und anderseits muß die Kompakttafel immer aus einer Selekttafel abgeleitet werden. Die erstere Tatsache kann zu ziemlich starken Abweichungen der gruppenmäßig bestimmten Reserve vom Total der Einzelreserven führen. Der zweite Umstand sodann macht die Methode überhaupt ungeeignet für Gesellschaften, welche ihre Reserven nach Aggregattafeln zu berechnen pflegen.

Verfasser hat nun genannten Ortes den Vorschlag gemacht, die Reserveermittlung mit Hilfe der retrospektiven Formel nach Gruppen gleicher verflossener Dauer und auf Grund eines mittleren Eintrittsalters vorzunehmen. Im folgenden soll versucht werden, dieser Methode, welche für Aggregat- und Selekttafeln gleichermaßen anwendbar ist, eine feste Begründung zu geben.

Nehmen wir vorerst an, es handle sich um gewöhnliche gemischte Versicherungen. Sei die Versicherungssumme der einzelnen Police mit K_x und das mittlere Eintrittsalter mit ξ benannt, so ergibt sich die Reserve am Ende des t. Versicherungsjahres für eine Gruppe gleichen Zugangsjahres offenbar in bekannter Bezeichnungsweise durch Verwendung folgender Formel:

$$ {}_tV = \frac{N_\xi - N_{\xi+t}}{D_{\xi+t}} \,.\, \Sigma K_x \,.\, P_{x,\overline{n|}} - \frac{M_\xi - M_{\xi+t}}{D_{\xi+t}} \,.\, \Sigma K_x = $$

$$ = \frac{a_{\xi,\overline{t|}}}{E_{\xi,t}} \,.\, \Sigma K_x \,.\, P_{x,\overline{n|}} - \frac{A'_{\xi,\overline{t|}}}{E_{\xi,t}} \,.\, \Sigma K_x. $$

Vor allem ist natürlich die Bestimmung des Hilfsalters ξ von Wichtigkeit. Wir können hier wörtlich wiedergeben, was Berger in seinem Aufsatz „Zur Begründung von Lidstones Z-Methode" in den „Blättern für Versicherungsmathematik" No 8, 1930, treffend sagt: „Praktisch brauchbar wird nur eine Methode sein, welche die jährliche Berechnung der Hilfsalter an ein Minimum von Arbeitsaufwand knüpft und überdies Werte ergibt, die den aus den kurzen Renten, unter Benutzung der Summen, bezw. Prämien als Gewicht durch Mittelbildung erhaltenen möglichst nahe kommen. Beides leistet die Methode von Lidstone."

Bei der Methode von Lidstone wird bekanntlich nach gleicher restlicher Dauer gruppiert und man erhält das Hilfsalter H einer Gruppe, wenn die Terminalter der Einzelversicherung mit M bezeichnet werden, aus:

$$ c^H = \frac{\Sigma c^M \,.\, K_x}{\Sigma K_x}, $$

wobei c die bekannte Makeham'sche Konstante ist.

Es ist nun leicht einzusehen, daß ganz analoge Überlegungen, wie sie nach Lidstone zur Ermittlung des mittleren Endalters einer Gruppe mit gleicher restlicher Dauer dienen, auch gemacht werden können bezüglich der Bestimmung des mittleren Eintrittsalters einer Gruppe mit gleicher verflossener Dauer. Wir sollen nämlich ein Alter ξ finden, für welches gilt:

$$ \frac{N_\xi - N_{\xi+t}}{D_{\xi+t}} \,.\, \Sigma K_x = \Sigma \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} \,.\, K_x. $$

Setzen wir das Einzelalter nach Ablauf von t Versicherungsjahren $x + t = z$ und entsprechenderweise das Hilfsalter $\xi + t = \zeta$, und nehmen wir üblicherweise an, daß die Sterblichkeitstafel dem Gesetz von Makeham folge, so haben wir, indem wir uns ganz der Berger'schen Darstellungsweise l. c. anschließen:

$$ l_z = k \,.\, s^z \,.\, g^{c^z}, $$

$$ \frac{l_{z-t}}{l_z} = s^{-t} \,.\, g^{c^z.(c^{-t}-1)} $$

$$ v^{-t} \,.\, \frac{l_{z-t}}{l_z} = v^{-t} \,.\, s^{-t} \,.\, g^{c^z.(c^{-t}-1)}. $$

Durch Entwicklung in eine Exponentialreihe erhalten wir:

$$v^{-t} \cdot \frac{l_{z-t}}{l_z} = v^{-t} \cdot s^{-t} \cdot \Big[1 + c^z \cdot (c^{-t} - 1) \cdot \gamma + \\ + \frac{1}{1 \cdot 2} c^{2z} \cdot (c^{-t} - 1)^2 \cdot \gamma^2 + \ldots\Big].$$

Hierin bedeutet $\gamma = \ln g$. Setzen wir weiter:

$$(v \cdot s)^{-1} = v_0, \ (v \cdot s \cdot c)^{-1} = v_1, \ (v \cdot s \cdot c^2)^{-1} = v_2, \ldots,$$

so ergibt sich:

$$v^{-t} \cdot \frac{l_{z-t}}{l_z} = v_0{}^t + c^z \cdot \gamma \cdot [v_1{}^t - v_0{}^t] + \\ + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot c^{2z} \cdot \gamma^2 \cdot [v_2{}^t - 2v_1{}^t + v_0{}^t] + \ldots$$

Bezeichnen wir weiter:

$$\sum_1^n v_0{}^t \text{ mit } a_0, \quad \sum_1^n v_1{}^t \text{ mit } a_1 \text{ usw.},$$

so haben wir:

$$\sum_1^n v^{-t} \cdot \frac{l_{z-t}}{l_z} = \frac{N_{z-t} - N_z}{D_z} = a_0 + c^z \cdot \gamma\,[a_1 - a_0] + \\ \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot c^{2z} \cdot \gamma^2\,[a_2 - 2a_1 + a_0] + \ldots$$

Brechen wir nun die Reihe beim zweiten Glied ab und setzen die Werte ein in unsere Bestimmungsgleichung für ζ

$$\frac{N_{\zeta-t} - N_\zeta}{D_\zeta} \cdot \Sigma K_x = \Sigma\,\frac{N_{z-t} - N_z}{D_z}\,K_x$$

so haben wir:

$$[a_0 + c^\zeta \cdot \gamma\,(a_1 - a_0)] \cdot \Sigma K_x = \Sigma\,[a_0 + c^z \cdot \gamma\,(a_1 - a_0)] \cdot K_x,$$

$$c^\zeta \cdot \gamma\,(a_1 - a_0)] \cdot \Sigma K_x = (a_1 - a_0) \cdot \gamma \cdot \Sigma c^z \cdot K_x,$$

also:

$$c^\zeta \cdot \Sigma K_x = \Sigma c^z \cdot K_x,$$

$$c^\zeta = \frac{\Sigma c^z \cdot K_x}{\Sigma K_x}.$$

Setzen wir nun, wenn t die verflossene Dauer der betreffenden Gruppe bedeutet

$$c^{\zeta-t} = \frac{\Sigma c^{z-t} \cdot K_x}{\Sigma K_x},$$

so ist $\zeta - t = \xi$ das gesuchte mittlere Eintrittsalter, $z - t = x$ das

Eintrittsalter der Einzelpolice der Gruppe, mithin also

$$c^{\xi} = \frac{\Sigma c^{x} \, . \, K_x}{\Sigma K_x},$$

womit auch ξ gegeben ist. Die Größe $c^x \, . \, K_x$ ist während der ganzen Versicherungsdauer konstant und kann als Hilfswert für jeden Einzelposten notiert werden.

Wir können also zur Bestimmung des für unsern Zweck erforderlichen mittleren Eintrittsalters ganz analog vorgehen wie bei der Ermittlung des mittleren Endalters nach Lidstone. Die Lidstone'schen Koeffizienten sind, sofern eventuell bereits tabelliert, auch für unsere Methode ohne weiteres verwendbar!

Berger hat sodann, ebenfalls in der zitierten Arbeit, gezeigt, daß die Lidstone'sche Ermittlung der Hilfsalter eigentlich auf Grund einer vermittels der Versicherungssummen gewogenen Mittelbildung aus den Sterbeintensitäten erfolgt. Denn setzen wir

$$\mu_{\xi} \, . \, \Sigma K_x = \Sigma \mu_x \, . \, K_x$$

oder auch, unter Voraussetzung des Makeham'schen Gesetzes,

$$(A + B \, . \, c^{\xi}) \, . \, \Sigma K_x = \Sigma \, (A + B \, . \, c^{x}) \, . \, K_x,$$

so folgt wieder:

$$c^{\xi} = \frac{\Sigma c^{x} \, . \, K_x}{\Sigma K_x}.$$

Es ist nun noch auf die von Berger in vorgenanntem Zusammenhange bewiesene und auch für uns wichtige Tatsache zu verweisen, daß im Sinne dieser Mittelbildung das Alter $\xi + t$ ebenso korrekt wie ξ nach den gewogenen Sterbeintensitäten der entsprechenden Verteilung der Summen K_x gefunden wird.

Natürlich hat unsere Methode der Reservebestimmung die nämlichen Schwächen wie die Lidstone'sche. So wird u. a. die Ermittlung des Hilfsalters mittels der gewogenen Sterbeintensitäten nicht den gleichen Wert ergeben, wie er auf Grund einer Mittelbildung aus den gewogenen Rentenendwerten richtiger aber viel zu umständlich erfolgen würde. Auch kann man sich die Frage vorlegen, ob das mit den Summen als Gewichte erhaltene Hilfsalter einigermaßen übereinstimmt mit dem Hilfsalter, das man auf Grund der Prämien als Gewichte erhalten würde. Hierüber können, wie bei der Lidstone'schen Methode, nur numerische Untersuchungen Aufschluß geben. Doch ist zu erwarten, daß praktisch der Unterschied im allgemeinen nur unbedenklich ist. Unser Vorschlag wird sich praktischerweise unbedingt als ein sehr gutes Nährungsverfahren erweisen, sofern nur ein Portefeuille, resp. das einzelne Zugangsjahr als Gruppe, einen beachtlichen Umfang hat, und auch die Zusammensetzung nach Versicherungsarten für eine gruppenweise Reservebestimmung geeignet ist. Nochmals sei nachdrücklich bemerkt, daß sich das Verfahren, wegen der Gruppierung nach gleicher verflossener Dauer sowohl bei Aggregat- als Selekttafeln anwenden läßt.

Bei Verwendung der μ_x zur Mittelbildung kann die Methode übrigens unbedenklich auch bei nicht nach Makeham ausgeglichenen Tafeln Verwendung finden. Auch wird der Fehler nur klein sein, wenn an Stelle der μ_x die einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x verwendet werden. Dies würde der Hilfsalterbestimmung entsprechen, wie sie vom Verfasser in No 5, 1934 des „Versicherungsarchiv" vorgeschlagen wurde; es sei nämlich das mittlere Eintrittsalter ξ einer Gruppe zu ermitteln aus

$$q_\xi = \frac{\Sigma q_x \,.\, K_x}{\Sigma K_x}.$$

Die Durchführung der Reserveberechnungen würden sich dann, namentlich wenn statistische Maschinen nach dem Lochkartenverfahren zur Verfügung stehen, äußerst einfach gestalten. Auf jeder Reservekarte sind die drei konstanten Größen K_x, $K_x \,.\, P_{x,\overline{n|}}$ und $K_x \,.\, q_x$ zu notieren. Bei der jährlichen Reservebestimmung werden für jede Gruppe gesondert die drei Summen dieser Größen gebildet, sodann das mittlere Eintrittsalter jeder Gruppe ausgerechnet und sodann mit dessen Hilfe der Reservebetrag nach der anfangs genannten retrospektiven Formel ermittelt.

Wir können die letztvorgeschlagene Art der Hilfsalterbestimmung auf Grund der q_x auch noch auf anderem Wege begründen. Ausgehend von der retrospektiven Reserveformel setzen wir die Existenz eines Hilfsalters ξ voraus, sodaß bezüglich einer Gruppe von Versicherungen mit gleicher verflossener Dauer gilt:

$$\frac{N_\xi - N_{\xi+t}}{D_{\xi+t}} . \Sigma K_x \,.\, P_{x,\overline{n|}} - \frac{M_\xi - M_{\xi+t}}{D_{\xi+t}} . \Sigma K_x =$$

$$= \Sigma \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} K_x \,.\, P_{x,\overline{n|}} - \Sigma \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} . K_x.$$

Wir haben dann insbesondere bezüglich der ersten Reserve, d. h. für $t = 1$:

$$\frac{r}{1-q_\xi} . \Sigma K_x \,.\, P_{x,\overline{n|}} - \frac{q_\xi}{1-q_\xi} . \Sigma K_x = \Sigma \frac{r}{1-q_x} . K_x \,.\, P_{x,\overline{n|}} - \Sigma \frac{q_x}{1-q_x} . K_x.$$

Setzen wir, in bekannter binomialer Reihenentwicklung:

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots \backsim 1 + q$$

und

$$\frac{q}{1-q} = q + q^2 + q^3 + \ldots \sim q,$$

so folgt:

$$r \,.\, \Sigma K_x \,.\, P_{x,\overline{n}|} + r \,.\, q_\xi \,.\, \Sigma K_x \,.\, P_{x,\overline{n}|} - q_\xi \,.\, \Sigma K_x =$$
$$= r \,.\, \Sigma K_x \,.\, P_{x,\overline{n}|} + r \,.\, \Sigma q_x \,.\, K_x \,.\, P_{x,\overline{n}|} - \Sigma q_x \,.\, K_x,$$

also ist nährungsweise

$$q_\xi = \frac{\Sigma q_x \,.\, K_x\,(1 - r \,.\, P_{x,\overline{n}|})}{\Sigma K_x\,(1 - r \,.\, P_{x,\overline{n}|})}$$

oder, unter der Annahme, daß $r \,.\, P_{x,\overline{n}|}$ gegen 1 nur klein sei:

$$q_\xi = \frac{\Sigma q_x \,.\, K_x}{\Sigma K_x},$$

womit das Hilfsalter ξ gegeben ist.

Bei dieser Herleitung sind die beiden schon genannten vereinfachenden Annahmen besonders gut ersichtlich. Erstens stützen wir unsere Mittelbildung dadurch, daß wir speziell nur von der ersten Reserve ausgehen, bewußt auf die Sterbenswahrscheinlichkeit und nicht auf die Rentenendwerte. Sodann ist ohne weiteres zu ersehen, daß das Resultat bei Benutzung der Summen als Gewichte nur dann einer Mittelwertbestimmung mit den Prämien als Gewichten genau gleichkommen kann, wenn das Verhältnis von $r \,.\, P_{x,\overline{n}|}$ zu 1, d. h. von Prämie zur Summe, konstant ist. Man sieht aber auch deutlich, daß es für die Errechnung des Hilfsalters im allgemeinen durchaus genügen wird, allein die Summen als Gewichte zu berücksichtigen, indem der sowohl der Summen- als Prämienverteilung Rechnung tragende Wert nur wenig von ersterem abweichen kann. Am besten orientieren hierüber, wie bemerkt, numerische Proben von Fall zu Fall.

Nehmen wir z. B., um das Letztgesagte kurz zu illustrieren, drei gemischte Versicherungen (Rechnungsgrundlagen O^M $3\frac{1}{2}\%$).

x	n	$q_x\,^0/_{00}$	K_x	$P_{x,\overline{n}\vert}$	${}_1V$
20	10	4,04	1000,—	84,54	83,80
35	20	7,38	1000,—	39,80	34,06
50	20	15,04	1000,—	47,55	34,70

Es ist dann für diesen Fall:

$$\frac{\Sigma q_x \,.\, K_x}{\Sigma K_x} = 8{,}82\,^0/_{00}, \qquad \frac{\Sigma q_x \,.\, P_{x,\overline{n}|}}{\Sigma K_x} = 7{,}86\,^0/_{00},$$

jedoch
$$\frac{\Sigma q_x \,.\, K_x \,.\, (1 - r \,.\, P_{x,\overline{n}|})}{\Sigma K_x\,(1 - r \,.\, P_{x,\overline{n}|})} = 8{,}88\,^0/_{00},$$

also nur sehr wenig vom ersten Wert verschieden. Rechnen wir nun die erste Reserve für die Gruppe der drei Versicherungen zusammen nach der Formel

$$ {}_1V = \frac{r}{1 - q_\xi} \Sigma K_x \,.\, P_{x,\overline{n|}} - \frac{q^2_\xi}{1 - q'_\xi} \Sigma K_x, $$

so erhalten wir unter Verwendung von

1. $q_\xi = 7{,}86,\ q'_\xi = 8{,}82:\ {}_1V = 152{,}62$
2. $q_\xi = q'_\xi = 8{,}88\quad :\ {}_1V = 152{,}62$
3. $q_\xi = q'_\xi = 8{,}82\quad :\ {}_1V = 152{,}79$

und individuell gerechnet: ${}_1V = 152{,}56.$

Es sei nun demonstrationsweise am Beispiele einer ad hoc gebildeten Jahresgruppe eines aus gemischten Versicherungen bestehenden Portefeuilles nur geringen Umfanges die Leistungsfähigkeit unserer Methode dargelegt. (Rechnungsgrundlagen O^M $3\frac{1}{2}\%$.)

Reserveformel: $$ {}_tV = \frac{a_{\xi,\overline{t|}}}{E_{\xi,t}} \,.\, \Sigma K_x \,.\, P_{x,\overline{n|}} - \frac{A_{\xi',\overline{t|}}}{E_{\xi,t}} \,.\, \Sigma K_x. $$

x	n	q_x	K_x	$q_x \,.\, K_x$	$P_{x,\overline{n\|}} \,.\, K_x$
25	25	4,81	10.000	48,10	288,90
28	32	5,44	5.000	27,20	112,25
30	20	5,95	15.000	89,25	579,60
31	24	6,20	20.000	124,00	631,40
32	23	6,48	9.000	58,32	300,24
35	20	7,38	25.000	184,50	995,00
38	22	8,38	16.000	134,08	589,28
39	16	8,77	3.000	26,31	156,39
40	20	9,15	10.000	91,50	414,10
45	15	11,53	8.000	92,24	465,12
49	11	14,22	10.000	142,20	822,90
50	15	15,05	5.000	75,20	305,50
		Total	136.000	1.092,90	5.660,69

$$ q_\xi = \frac{1.092{,}90}{136.000} = 8{,}04\,^0/_{00},\quad \xi = 37{,}00 \text{ Jahre.} $$

t:	2	5	8	11
$A_{\xi',\overline{t\|}}/E_{\xi,t}$:	$16{,}92\,^0/_{00}$	$48{,}24\,^0/_{00}$	$88{,}48\,^0/_{00}$	$140{,}37\,^0/_{00}$
$a_{\xi,\overline{t\|}}/E_{\xi,t}$:	2,1328	5,7072	9,8167	14,5868
Gruppenres. ${}_tV$:	9.772,—	25.746,—	43.536,—	63.481,—
Zum Vergleich Summe der individ. Reserven:	9.782,6	25.787,5	43.667,4	63.844,1

Wie wir ersehen, ergibt sich in unserem zahlenmäßigen Beispiel eine gute Übereinstimmung zwischen den individuell und den gruppenmäßig bestimmten Reserven. In der Praxis wird es sich, wenn schon gruppenweise Reserveberechnung zur Anwendung kommt, um Portefeuilles viel größeren Umfanges handeln, wobei sich auch die Verteilung der Summen, Alter und Dauern stärker um ein charakteristisches Eintrittsalter häufen wird, was die Genauigkeit des Verfahrens nicht unwesentlich heben muß.

Es ist klar, daß die Anwendung unserer Methode nicht auf die gemischte Versicherung beschränkt ist. Wir können in einer Jahresgruppe alle Versicherungsarten mit gleichartig stipulierter Prämien- und Todesfallkapitals-Leistung zusammenfassen. Das Hauptkontingent wird aber wohl durch diejenigen Versicherungsarten gestellt, bei welchen Prämien- sowohl als Todesfallsumme konstant ist (gemischte Versicherung, lebenslängliche Todesfallversicherung mit lebenslänglicher oder abgekürzter Prämienzahlung, temporäre Todesfallversicherung) und für welche die retrospektive Reserveformel in der hier mehrfach angeführten Form verwendbar ist. Doch ist die retrospektive Formel in leichter Abänderung auch anwendbar für Gruppen mit nach bestimmtem Gesetze variabler Prämie, nötigenfalls auch für variable Summen usw.

Abschließend möchten wir die Bemerkung nicht unterlassen, daß die hier erklärte und begründete Gruppenrechnungsmethode, so sehr wir von ihrer Leistungsfähigkeit und ihren Vorteilen gegenüber anderen Methoden überzeugt sind, nicht eine unter allen Umständen befriedigende Lösung darstellen kann. Verfasser hat an anderer Stelle („Österreichische Revue", Nos 47 & 48, 1934) Gelegenheit genommen, ganz allgemein über Vor- und Nachteile der Reserveberechnung in Gruppen zu sprechen. In der Frage, ob ein bestimmtes Portefeuille für Gruppenrechnung geeignet sei und welche spezielle Methode gegebenenfalls gewählt werden soll, darf nicht nur von theoretischen Erwägungen aus entschieden werden; denn wenn die Praxis wirklich die erhofften Vorteile und Vereinfachungen bringen soll, dann wird man das letzte Wort in der Entscheidung dem Praktiker, der die Zusammensetzung seines Versicherungsbestandes kennt, überlassen müssen.

L'âge limite.

E. J. Gumbel, Université de Lyon.

1. Définition de l'âge limite comme espérance mathématique du plus grand âge.
2. Application à la formule de Lexis. Le paradoxe de l'âge limite virtuel.
3. Exemples numériques.
4. Une distribution observée des plus grands âges.
5. Conclusions.