Aktuárské vědy

Ferdinand Šamonil

Sur la généralisation des certaines formules de sommation

Aktuárské vědy, Vol. 5 (1935), No. 3, 129–133

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144633

Sur la généralisation des certaines formules de sommation.

Ferdinand Šamonil.

Le besoin d'évaleur la somme

$$f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots + f(b)$$

est le cas très fréquent dans la pratique de l'actuaire. Cette opération, à première vue très innocente, exige parfois beaucoup de temps et de travail penible. Les difficultés croissent avec la complexité de fonction $f(x)$ et le nombre des valeurs quelles faut calculer.

C'est pourquoi les formules qui peuvent faciliter cette opération ont pour l'actuaire un interêt particulier.

Parmi la multitude des formules semblables, l'une des plus commodes et des plus utiles est cette due à Lubbock.

Deux formules également avantageuses étaient données par prof. Steffensen.[1])

La formule de Lubbock était généralisée par prof. Tauber.[2])

Je veux maintenant montrer, que la forme générale, donnée par M. Tauber, peut être modifiée d'une telle manière, qu'elle contient aussi les formules de Steffensen comme les cas particuliers.

I.

Supposons l'éxistence des développement

$$f(x+c) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x)\,\pi_k(c) + \varrho_n(x, c), \tag{1}$$

$$\pi_k(a+h) = \sum_{l=0}^{n} \bar{g}_e(h)\,\pi_{k+l}(a) + \sigma_{k,n}(a, h). \tag{2}$$

Au lieu de (1), on peut aussi écrire

$$f(x+c) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x+p)\,\pi_k(a) + \varrho_n(x, c), \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} c &= a+p \\ d &= a+q \end{aligned}\right\}.$$

Multiplions l'équation (3) par l'expression $\frac{1}{h}\Phi(x+c)$ et posons successivement

$$x = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ h-1.$$

---

[1]) Steffensen: The interpolation, p. 138—148, Baltimore, USA.

[2]) Tauber: Über die Veralgemeinerung der Sätze von Laplace und Euler, Acta mathematica. 1931, tome 57,

La sommation des ces équations donne

$$\frac{1}{h}\sum_{x=0}^{h-1}\Phi(x+c)\,f(x+c)=\frac{1}{h}\left[\sum_{k=0}^{n}\pi_k(a)\sum_{x=0}^{h-1}\Phi(x+c)\,g_k(x+p)+\right.$$
$$\left.+\sum_{x=0}^{h-1}\Phi(x+c)\;\varrho_n(x,c)\right]. \tag{4}$$

Ajoutons maintenant aux deux membres de (4) l'expression

$$\sum_{k=0}^{n}[P_k(a,h)\,\pi_k(a)-P_k(a+h,h)\,\pi_k(a+h)].$$

Les fonctions $P_k(a, h)$ sont indeterminées. Nous obtenons

$$\frac{1}{h}\sum_{k=0}^{h-1}\Phi(x+c)\,f(x+c)+\sum_{k=0}^{n}[P_k(a,h)\,\pi_k(a)-P_k(a+h,h)\,\pi_k(a+h)]=$$
$$=\sum_{s=0}^{n}A_s\,\pi_s(a)+r_n(a,h), \tag{5}$$

avec

$$A_s=P_s(a,h)-\sum_{l=0}^{n}P_e(a+h,h)\,\overline{g}_{n-e}(h)+\frac{1}{h}\sum_{x=0}^{h-1}\Phi(x+c)\,g_s(x+p), \tag{6}$$

et $$r_n(a,h)=\frac{1}{h}\sum_{x=0}^{n}\Phi(x+c)\,\varrho_n(x,c)-\sum_{k=0}^{n}P_k\,(a+h,h)\,\sigma_{k,n-k}(a,h).$$

Pour simplifier autant que possible, nous fixons les fonctions $P_k(a, h)$ d'une manière suivante:

$$A_k=\Phi(d)\,g_k(a) \tag{7}$$

$k = 0, 1, \ldots n.$

Nous obtenons

$$\frac{1}{h}\sum_{x=0}^{h-1}\Phi(x+c)\,f(x+c)+\sum_{k=0}^{n}[P_k(a,h)\,\pi_k(a)-P_k(a+h,h)\,\pi_k(a+h)]=$$
$$=\Phi(d)\,f(d)+r_n(a,h)-\varrho_n(a,d). \tag{8}$$

Posons successivement

$$a=a,\ a+h,\ a+2h,\ldots,a+\overline{m-1}h.$$

La sommation donne

$$\frac{1}{h}\sum_{x=0}^{mh-1}\Phi(x+c)f(x+c)+\sum_{k=0}^{n}[P_k(a,h)\pi_k(a)-P_k(a+mh,h)\pi_k(a+mh)]=$$
$$=\sum_{x=0}^{m-1}\Phi(d+hx)\,f(d+hx)+R_n, \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} c &= a + p \\ d &= a + q \end{aligned}\right\}$$

avec le reste

$$R_n = \sum_{\nu=0}^{m-1} [r_n(a + \nu h, h) - \varrho_n(a + \nu h, h)].$$

L'équation (9) est une formule de sommation d'une généralité particulière. Elle contient tous les formules de Lubbock, Woolhouse et Steffensen comme les cas spéciales.

II.

Pour montrer comment on peut procéder dans un cas spécial, choisisons

$$g_k(x) = \bar{g}_k(x) = \left[\begin{matrix} \dfrac{x}{h} \\ k \end{matrix}\right] = \frac{\left(\dfrac{x}{h}\right)^{[k]}}{k!}$$

$$\pi_k(a) = \delta_h{}^k f(a)$$

$$x^{[k]} = x\,(x + \tfrac{1}{2}k - 1)\,(x + \tfrac{1}{2}k - 2) \ldots (x - \tfrac{1}{2}k + 1).$$

$$\begin{cases} \delta_h{}^k\, f(a) = \delta_h\, [\delta_a{}^{k-1}\, f(a)] \\ \delta_h\, F(x) = F(x + \tfrac{1}{2}h) - F(x - \tfrac{1}{2}h). \end{cases}$$

Posons aussi

$$\left.\begin{aligned} c &= a + \tfrac{1}{2} \\ d &= a + \tfrac{1}{2}h \end{aligned}\right\}.$$

Les conditions (7) donnent

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ k \end{matrix}\right] \Phi(a + \tfrac{1}{2}h) = P_k(a, h) - \sum_{l=0}^{n} P_e(a + h, h) \left[\begin{matrix} 1 \\ k - l \end{matrix}\right] + \\ + \frac{1}{h} \sum_{x=\frac{1}{2}}^{h-\frac{1}{2}} \Phi(x + a) \left[\begin{matrix} \dfrac{x}{h} \\ k \end{matrix}\right], \end{aligned} \tag{10}$$

$k = 0,\ 1,\ 2, \ldots n.$

Faisons maintenant une convenance! Nous considéreront ceulement ces fonctions $P_k(a, h)$ pour quelles converge la serie

$$P(a, h, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(a, h)\,(-\varepsilon)^k \qquad |\,\varepsilon\,| < 1.$$

La fonction $P(a, h, \varepsilon)$ est la fonction génératrice des coefficients $P_k(a, h)$.

Multiplions les conditions (10) successivement par

$$1,\ -\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ -\varepsilon^3, \ldots$$

et sommons. Avec égard à

$$(\tfrac{1}{2}\varepsilon + \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2})^{2x} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} \varepsilon^k,$$

nous obtenons

$$\Phi(a + \tfrac{1}{2}h)\,(-\tfrac{1}{2}\varepsilon + \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2}) = P(a, h, \varepsilon) - (-\tfrac{1}{2}\varepsilon +$$
$$+ \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2})^2 P(a + h, h, \varepsilon) + \frac{1}{h} \sum_{x=\frac{1}{2}}^{h-\frac{1}{2}} \Phi(x + a)\,(-\tfrac{1}{2}\varepsilon + \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2})^{\frac{2x}{h}}. \tag{11}$$

C'est une équation aux différences de la fonction génératrice.

Soit, par exemple

$$\Phi(x) = \varrho^{2x},$$

$$P_k(a, h) = \varrho^{2a}\,\overline{P}_k(h, \varrho),\quad P(a, h, \varepsilon) = \varrho^{2a}\,\overline{P}(h, \varrho, \varepsilon).$$

L'équation (11) donne

$$\overline{P}(\varrho, h, \varepsilon) = \frac{\varrho^h\,(-\tfrac{1}{2}\varepsilon + \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2})}{1 - \varrho^{2h}\,(-\tfrac{1}{2}\varepsilon + \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2})^2} + \frac{1}{h}\,\frac{\varrho\,(-\tfrac{1}{2}\varepsilon + \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2})^{1/h}}{\varrho^2\,(-\tfrac{1}{2}\varepsilon + \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2})^{2/h} - 1}. \tag{12}$$

La formule correspondante (9) est

$$\frac{1}{h} \sum_{x=\frac{1}{2}}^{mh-\frac{1}{2}} \varrho^{2x} f(x) = \sum_{x=\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} \varrho^{2hx} f(hx) + \sum_{k=0}^{n} \overline{P}_k [\varrho^{2mh}\,\delta_h{}^k f(mh) - \delta_h{}^k f(o)] + R_n. \tag{13}$$

Lorsque

$$\varrho = 1$$

nous obtenons une formule très interessante

$$\frac{1}{h} \sum_{x=\frac{1}{2}}^{mh-\frac{1}{2}} f(x) = \sum_{x=\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} f(hx) + \sum_{k=0}^{n} \overline{P}_k\,[\delta_h{}^k f(mh) - \delta_h{}^k f(o)] + R_n.$$

C'est la formule de Steffensen.

Dans ce cas la fonction génératrice (12) devient

$$\overline{P}(h, 1, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\dfrac{1}{h}}{(\tfrac{1}{2}\varepsilon + \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2})^{1/h} - (-\tfrac{1}{2}\varepsilon + \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2})^{1/h}}. \tag{14}$$

C'est une fonction impaire.

Il en résulte

$$\overline{P}_{2k} = 0,\ k = 1, 2, \ldots$$

Écrivons l'équation (14) d'une manière suivante

$$\left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{P}_{2k-1}\,\varepsilon^{2k}\right) \sum_{\nu=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2h} \\ 2\nu - 1 \end{bmatrix} \varepsilon^{2\nu-2} = \frac{1}{2h}.$$

La methode des coefficients indéterminés donne

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2h}\\1\end{bmatrix}\overline{P}_{2\nu-1}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2h}\\3\end{bmatrix}\overline{P}_{2\nu-3}+\ldots+\begin{bmatrix}\frac{1}{2h}\\2\nu-1\end{bmatrix}\overline{P}_1+\begin{bmatrix}\frac{1}{2h}\\2\nu+1\end{bmatrix}=0.$$

Ces relations récurrentes sont très avantageuses pour le calcul des coefficients P.

La plus grande valeur.

E. J. Gumbel, Université de Lyon.

(Suite.)

Dans ce qui suit nous allons calculer l'espérance mathématique d'une autre manière, qui nous mènera à une seconde approximation. La condition à laquelle nous arriverons demandera moins. Donc notre calcul peut être employé pour des distributions qui ne sont pas soumises à la condition (12) et qui en conséquence ne se resserrent pas pour un nombre croissant d'observations. Aussi nous calculerons l'écart type et les moments de la distribution (4).

La forme de la distribution de la plus grande valeur employée jusqu'à présent ne se prête pas à ces calculs. Elle est trop compliquée. Il s'agit donc de savoir vers quelle forme tend la distribution (4) de la plus grande valeur pour de très grands nombres N. Dans ce but nous allons développer $W(x)$ autour de la dominante. On aura la série de Taylor

$$\begin{aligned}W(x)&=W(u+x-u)\\&=W(u)+(x-u)\,w(u)+\frac{(x-u)^2}{2}\,w'(u)+\ldots\\&\qquad\ldots+\frac{(x-u)^\nu}{\nu!}\,w^{(\nu-1)}(u)+\ldots\end{aligned}$$

En employant (7) pour le premier membre et en outre (6) pour le troisième, on obtient en multipliant ces deux membres par N

$$\begin{aligned}W(x)=1-\frac{1}{N}+\frac{1}{N}(x-u)\,Nw(u)-\frac{1}{N}\frac{(x-u)^2}{2}\,N^2w^2(u)+\ldots\\\ldots+\frac{(x-u)^\nu}{\nu!}\,w^{(\nu-1)}(u)+\ldots\end{aligned}$$

Comparons les trois premiers membres avec le développement de la fonction

$$V(x)=1-\frac{1}{N}\,e^{-(x-u)Nw(u)},$$