Alfred Tauber

Die Zufallsverträge in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. I

Aktuárské vědy, Vol. 5 (1935), No. 1, 1–29

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144619

Die Zufallsverträge in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von Prof. Dr. *Alfred Tauber* (Wien).

Die wahrscheinlichkeitstheoretische Messung des Gewinnes oder Verlustes aus Zufallsverträgen auf die Hypothese zu gründen, daß bei solchen Verträgen Äquivalenz zwischen den Chancen beider Partner zu herrschen habe, wenn alle vertragsmäßigen und eventuell sonst noch bestimmte zur Vertragserfüllung notwendige Leistungen gegeneinander abgewogen werden, widerspricht häufig genug den tatsächlichen Verhältnissen, sodaß es zumindest eine Unvollständigkeit der Problemstellung bedeuten müßte, Verträge auszuschließen, bei denen einer der Partner sich von vornherein im Vorteile befindet, denn die Möglichkeit zufälligen Verlustes besteht ja auch für den begünstigten Partner. Außerdem aber, was das wichtigste ist, vermag ein ganz geringes Übergewicht der Chance dieses Partners, wenn er mit sehr vielen Gegenpartnern Verträge schließt, seine Verlusterwartung bis unter jede beliebige Kleinheit herabzudrücken.

Nun zeigt die kombinatorische Untersuchung des so verallgemeinerten Risikoproblems, daß selbst wofern Äquivalenz besteht, der für diesen Fall aufgestellte Grundsatz[1]) nich etwa auf die Berechnung der kombinierten Verlusterwartung $\hat{R}$ einer zahlreichen Vertragsgruppe (vgl. Abschnitt I) so über tragen werden darf als ob sich $\hat{R}$ aus den durchschnittlichen Verlusterwartungen $R, R', R'', \ldots$ der einzelnen Verträge als die Quadratwurzel $\sqrt{R^2 + R'^2 + R''^2 + \ldots}$ darstellen lasse. Hiebei wird, wenn ein Vertrag Fälligkeiten abhängig von irgendwelchen Zufallsereignissen festsetzt, deren Eintreffen mit den Wahrscheinlichkeiten $w_0, w_1, \ldots$ zu erwarten ist und die finanziellen Effekte $s_0, s_1, \ldots$ zu Lasten eines der beiden Partners herbeiführt, die durchschnittliche Verlusterwartung ebendieses Partners durch $w_0 \overset{[+]}{s_0} + w_1 \overset{[+]}{s_1} + \ldots$ bestimmt, mit der Definition, daß $\overset{[+]}{s_i}$ entweder gleich s_i oder Null sein soll, jenachdem s_i positiv ausfällt oder nicht.

[1]) Vgl. z. B. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung Bd. I. 259 (4) (vierte Auflage).

Der erwähnte Schluß wäre indes unzutreffend, weil für k gleichartige, auf dem Äquivalenzprinzip basierte Verträge, die nur von einer einzigen Wahrscheinlichkeit w (resp. deren Komplement $1 - w$) abhängen und von denen jedem die durchschnittliche Verlusterwartung R zugehört, der Quotient $\hat{R}/R\sqrt{k}$ den Grenzwert $1/\sqrt{2\pi w(1-w)}$ für große k besitzt, nicht aber die Einheit.

Anderseits gilt im Falle der Nichtäquivalenz bei k solchen Zufallsverträgen einfachster Art als Größenordnung der kombinierten Verlusterwartung $\hat{R}$ des begünstigten Partners ein Ausdruck der Form

$$\frac{c\beta^k}{\sqrt{k}} R, \qquad 0 < \beta < 1 \tag{1}$$

(β von k unabhängig, c innerhalb gewisser Schranken), welche ersichtlich macht, daß $\hat{R}$ für eine große Vertragszahl überhaupt nicht wie bei Äquivalenz unbegrenzt groß, sondern beliebig klein wird. Nur hat die Konstante c gerade in dem wichtigen Falle der Fastäquivalenz einen sehr großen Wert, wodurch die alsdann erst für genügend große k richtige Angabe der Größenordnung eine Überschätzung mit sich bringt, solange die Vertragszahl nicht im erforderlichen Grade angewachsen ist. Hier erscheint, um einen kontinuierlichen Übergang zur Äquivalenz zu erzielen, der Ausweg passend, die Dimension (1) durch eine Obergrenze für $\hat{R}$

$$c' k^{\alpha - \frac{1}{2}} \beta^k R, \quad 0 < \alpha \leqq 1 \tag{1a}$$

unter Beibehaltung des Wertes β, aber mit einer immer endlich bleibenden Konstanten c' zu ersetzen, denn so wird auch für große Werte von k die Dimension, bezüglich derer in erster Linie die Hauptkonstante β den Ausschlag gibt, nicht wesentlich alteriert.

Sind aber die zu betrachtenden Zufallsverträge nicht mehr von einfachster Art, dann entsteht die Frage, wie die Schwierigkeit der Berechnung von $\hat{R}$, die alle Möglichkeiten des Zusammentreffens von Ereignissen umfassen muß, bewältigt werden soll. Erfolgreich gelang dies im Falle der Äquivalenz schon vor vielen Jahren, nämlich durch die Einführung des „mittleren" Einzelrisiko's, die eigentlich erst eine übersehbare Rechnung ermöglicht hat, indem der kombinierten Verlusterwartung $\hat{R}$ die Gestalt

$$\hat{R} \backsim \sqrt{\frac{1}{2\pi}(\mathfrak{R}^2 + \mathfrak{R}'^2 + \ldots)} \tag{2}$$

erteilt wird, wenn $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots$ die mittleren Risiko's der einzelnen Verträge vorstellen, und zwar ist für den oben charakterisierten von den Wahrscheinlichkeiten $w_0, w_1, \ldots$ abhängigen Vertrag das mittlere Risiko durch $\sqrt{w_0 s_0^2 + w_1 s_1^2 + \ldots}$ definiert.

Es handelt sich also um die Generalisierung der Formel (2) für den Fall der Nichtäquivalenz oder, wenn eine exakte Angabe der Größenordnung von $\hat{R}$ allzu komplizierte Rechnungen erfordern sollte, neben näherungsweisen Abschätzungen vornehmlich und wohl zur Genüge orientierend um Ermittlung einer Obergrenze für den ohnehin mit dem Anwachsen der Vertragszahl k beliebig klein werdenden Betrag von $\hat{R}$, am einfachsten etwa durch eine Ungleichung

$$\hat{R} < \beta^k \sqrt{\frac{1}{2\pi}(\mathfrak{R}^2 + \mathfrak{R}'^2 + \ldots)}, \quad \beta < 1, \tag{2a}$$

sei es unter Verwendung der, durch geeignete Generalisierung für den Nichtäquivalenzfall zu bildenden, Werte des mittleren Risiko's der einzelnen Verträge, sei es ähnlich gebauter Ausdrücke.

Die Aufgabe eine solche Ungleichung wie (2a) aufzustellen, deren Giltigkeit für alle, nicht bloß für große k zu fordern wäre, reduziert sich somit auf die Bestimmung einer (nicht überflüssig hohen) Konstante $\beta < 1$. Dazu erscheint ein Näherungs- und Durchschnittsverfahren dienlich, verbunden mit der Angabe genauer Formeln für die Hauptkonstante β in einfacheren typischen Fällen, da sonst eine Beurteilung des Grades der Annäherung nicht möglich wäre. Diese genauere Rechnung gestaltet sich auch bei Zufallsverträgen, die von zwei verschiedenen Ereignissen abhängen, noch unkompliziert und verschafft schon Einblick in die mathematische Seite der Frage.

Keineswegs will die kombinierte Verlusterwartung mit der sich das Folgende unter Anwendung kombinatorischer Methoden befaßt, als der allein entscheidende Maßstab für das Risiko figurieren, das hieße auch wegen der Isolierung der Verlustmöglichkeiten, welche dabei nur in summarischen Zusammenhang mit den Gewinnmöglichkeiten geraten, einseitig gedacht, aber eine instruktive Bedeutung darf man dem Betrage von $\hat{R}$ wohl nicht absprechen. Die Risikotheorie muß sich eben darauf beschränken, Wahrscheinlichkeits-Konjekturen verschiedener Art vorzubringen, ohne die Wahrscheinlichkeit bis zur Gewißheit treiben zu können.

Daß sich vom mathematischen Standpunkte manche interessante Probleme bei Untersuchung von $\hat{R}$ darbieten, wäre vielleicht erwähnenswert.

I. Durchschnittliche und kombinierte Verlusterwartung bei gleichartigen Verträgen.

Die Fälligkeiten eines Zufallsvertrages seien vom Eintreffen bestimmter Ereignisse abhängig, so zwar, daß n einander ausschließende Ereignisse, für deren Eintreffen die Wahrscheinlichkeiten $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ bestehen, über die Zahlungen entscheiden. Beim Eintreffen des ersten, zweiten, . . ., n-ten Ereignisses ist der Preis $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}$ vereinbart, ferner der Preis $\mathfrak{B}_0$ im Falle des Nichteintreffens des ersten Ereignisses und allgemein $\mathfrak{B}_i$, wenn weder das erste, noch das zweite, . . ., noch das $(i+1)$-te Ereignis eingetreten ist ($i = 0$ bis $n - 1$). Als Einsätze sollen geleistet werden: Sofort bei Vertragsbeginn $\mathfrak{C}_0$, außerdem $\mathfrak{C}_1$ wenn das erste Ereignis nicht eingetroffen ist, $\mathfrak{C}_2$ wenn weder das erste noch das zweite Ereignis eingetroffen ist usf.

Eigentlich, dem finanziellen Effekte nach, käme es hier nicht auf alle die $(2n - 2)$ Beträge $\mathfrak{C}_1$ bis $\mathfrak{C}_{n-1}$, $\mathfrak{B}_0$ bis $\mathfrak{B}_{n-2}$ an, sondern nur auf die Differenzen $\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{C}_{n-1} - \mathfrak{B}_{n-2}$, aber weil diese Differenzen sowohl positiv als negativ ausfallen können und es bei Nichtäquivalenz zweckmäßig ist, den Hoffnungswert der Preise mit dem Einsatzwert ins Verhältnis zu setzen, erscheint die Getrennthaltung der Beträge $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$ vorzuziehen.

Der Hoffnungswert U aller Preise ist, wenn zur Abkürzung $w'_0 = 1 - w_0$, $w'_1 = 1 - w_0 - w_1$, $w'_2 = 1 - w_0 - w_1 - w_2 \ldots$ gesetzt wird

$$\begin{aligned} U = (w_0\mathfrak{A}_0 + w_1\mathfrak{A}_1 + \ldots + w_{n-1}\mathfrak{A}_{n-1}) + \\ + (w'_0\mathfrak{B}_0 + w'_1\mathfrak{B}_1 + \ldots + w'_{n-1}\mathfrak{B}_{n-1}), \end{aligned} \tag{3}$$

anderseits der Wert aller Einsätze

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 + w'_0\mathfrak{C}_1 + w'_1\mathfrak{C}_2 + \ldots + w'_{n-2}\mathfrak{C}_{n-1} \tag{3a}$$

und die Differenz S, um welche der Einsatzwert $\mathfrak{C}$ den Hoffnungswert U der Preise übersteigt, werde als Überentgelt desjenigen Partners, der die Einsätze zu leisten hat, des „Spielers" bezeichnet. Bei Äquivalenz reduziert sich S auf Null. (Zeitunterschiede der Fälligkeiten sind zu berücksichtigen, indem man den Beträgen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ den Sinn von Zeitwerten, berechnet für den Vertragsbeginn, beilegt.)

Der finanzielle Effekt zu Lasten des „Unternehmers", des Partners, dem die Auszahlung der Preise obliegt, beläuft sich beim Eintreffen des ersten, zweiten, . . ., n-ten Ereignisses auf

$$\begin{gathered} s_0 = \mathfrak{A}_0 - \mathfrak{C}_0, \; s_1 = \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{C}_0 - (\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{B}_0) \ldots \\ s_{n-1} = \mathfrak{A}_{n-1} - \mathfrak{C}_0 - (\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{B}_0) - \ldots - (\mathfrak{C}_{n-1} - \mathfrak{B}_{n-2}) \end{gathered}$$

und falls keines der n Ereignisse eingetroffen ist, auf

$$s_n = \mathfrak{B}_{n-1} - \mathfrak{C}_0 - (\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{B}_0) - \ldots - (\mathfrak{C}_{n-1} - \mathfrak{B}_{n-2}).$$

Sämtliche Werte der finanziellen Effekte lassen sich in der einen Formel zusammenfassen

$$s_\nu = \mathfrak{A}_\nu - \sum_{i=0}^{\nu} (\mathfrak{C}_i - \mathfrak{B}_{i-1}), \; \mathfrak{A}_n = 0, \; \mathfrak{B}_{-1} = 0, \; \mathfrak{C}_n = 0, \; \nu = 0 \text{ bis } n. \tag{4}$$

Eine weitere Vereinfachung in mancher Hinsicht kommt hinzu, wenn man die Differenzen der finanziellen Effekte einführt

$$r_\nu = s_\nu - s_n = \mathfrak{A}_\nu + \sum_{i=\nu+1}^{n} (\mathfrak{C}_i - \mathfrak{B}_{i-1}),\ \nu = 0 \text{ bis } n-1 \tag{5}$$

aus welchen der **erste Einsatzbetrag** $\mathfrak{C}_0$ **eliminiert** ist, dann erhält nämlich s_ν die Form

$$s_\nu = r_\nu - \mathfrak{r} - S,\ \mathfrak{r} = w_0 r_0 + w_1 r_1 + \ldots + w_{n-1} r_{n-1}, \tag{5a}$$

wo $\mathfrak{r}$, der sogenannte wahrscheinlichkeitstheoretische Mittelwert der Beträge $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}, r_n = 0$, auftritt. Diese Gleichung (5*a*) oder was dasselbe besagt, die Gleichung $s_n + \mathfrak{r} + S = 0$ wird verifiziert, indem man

$$s_n + \mathfrak{r} = s_n + w_0 (s_0 - s_n) + w_1 (s_1 - s_n) + \ldots + w_{n-1} (s_{n-1} - s_n)$$

durch Verwendung der komplementären Wahrscheinlichkeit $w_n = w'_{n-1}$, daß keines der n Ereignisse eintritt, in die Form $s_n + \mathfrak{r} = \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu s_\nu$ bringt und es bleibt nur zu zeigen, daß

$$S = -(w_0 s_0 + w_1 s_1 + \ldots + w_n s_n) \tag{6}$$

ist, das heißt $(-S)$ den Mittelwert der s repräsentiert. Nun ergibt die Subtraktion von (3), (3*a*) für $\mathfrak{U} - \mathfrak{C} = -S$ den Wert

$$(w_0 \mathfrak{A}_0 + \ldots + w_{n-1} \mathfrak{A}_{n-1}) - \mathfrak{C}_0 - w'_0 (\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{B}_0) - \ldots$$
$$\ldots - w'_{n-2} (\mathfrak{C}_{n-1} - \mathfrak{B}_{n-2}) + w'_{n-1} \mathfrak{B}_{n-1}$$

und dessen Übereinstimmung mit $(w_0 s_0 + w_1 s_1 + \ldots + w_n s_n)$ oder mit

$$w_0 [\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{C}_0] + w_1 [\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{C}_0 - (\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{B}_0)] + \ldots +$$
$$+ w_{n-1} [\mathfrak{A}_{n-1} - \mathfrak{C}_0 - (\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{B}_0) - \ldots - (\mathfrak{C}_{n-1} - \mathfrak{B}_{n-2})] +$$
$$+ w_n [\mathfrak{B}_{n-1} - \mathfrak{C}_0 - (\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{B}_0) - \ldots - (\mathfrak{C}_{n-1} - \mathfrak{B}_{n-2})]$$

ersieht man beim Vergleich der Koeffizienten von $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{C}_0, (\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{B}_0), (\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{B}_1), \ldots$

Um nun die „durchschnittliche" Verlusterwartung aus so charakterisierten Verträgen zu definieren, müssen die **finanziellen Effekte nach ihrem Vorzeichen unterschieden** werden, was durch die Bezeichnungsweise

$\overset{[+]}{s_i} = s_i$ oder Null, jenachdem s_i positiv ist oder nicht

$\overset{[-]}{s_i} = s_i$ oder Null, jenachdem s_i negativ ist oder nicht

geschehen soll. Für eine große Zahl von Vertragsgruppen, deren jede die ebenfalls große Zahl k solcher Verträge umfaßt, weist aber die Eintreffenszahl des $(\nu + 1)$-ten Ereignisses den wahrscheinlichen Durchschnitt $k w_\nu$ auf, und so versucht man, ohne Rücksicht auf die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von Ereignissen, als Maß der Verlusterwartung einer Vertragsgruppe von k gleichartigen Verträgen die Summe $\sum\limits_{\nu=0}^{n} (kw_\nu) \overset{[+]}{s_\nu}$ zu erklären, daher als Maß für die durchschnittliche Verlusterwartung, oder kürzer, das durchschnittliche Risiko R des einzelnen Vertrages den k-ten Teil dieser Summe aufzustellen:

$$R = w_0 \overset{[+]}{s_0} + w_1 \overset{[+]}{s_1} + \ldots + w_n \overset{[+]}{s_n}, \tag{7}$$

wie analog $G = -\sum\limits_{\nu=0}^{n} w_\nu \overset{[-]}{s_\nu}$ als Maß der durchschnittlichen Gewinnerwartung. In Wirklichkeit aber sind G und R lediglich Hilfsgrößen zur Konstruktion eines geeigneten Maßstabes. Durch Differenzbildung ergibt sich noch $G - R = -\sum\limits_{\nu=0}^{n} w_\nu s_\nu = S$ oder, daß Gewinn- und Verlustchance durchschnittlich um das Überentgelt differieren.

Ähnlichen Charakter bezüglich der künftigen Verlusterwartung besitzt, wenn bereits die Entscheidung über das Eintreffen der ersten i Ereignisse vollzogen ist, der noch nicht abgewickelte Teil des Vertrages, außer wenn bei der restlichen Abwicklung ein negativer Wert von S oder eventuell die Verlusterwartung Null resultieren sollte.

Neben und an Stelle der Berechnung von R ist aber auch die des Gauß'schen Ausdruckes

$$T = \sqrt{\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu s_\nu^2} = \sqrt{\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu (r_\nu - \mathfrak{r} - S)^2} \tag{8}$$

erforderlich, der im Äquivalenzfalle $S = 0$ das „mittlere“ Einzelrisiko des Vertrages vorstellt. Hiezu eignet sich die Formel

$$\begin{aligned} T^2 - S^2 = {} & (w_0 r_0^2 + w_1 r_1^2 + \ldots + w_{n-1} r_{n-1}^2) - \\ & - (w_0 r_0 + w_1 r_1 + \ldots + w_{n-1} r_{n-1})^2, \end{aligned} \tag{8a}$$

denn zunächst entsteht durch Ausquadrieren von (8)

$$T^2 = \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu (r_\nu - \mathfrak{r})^2 - 2S \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu (r_\nu - \mathfrak{r}) + S^2 \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu,$$

wegen $r_n = 0$ verschwindet rechts der Koeffizient von S und wegen $\sum\limits_{\nu=0}^{n} w_\nu = 1$ ergibt sich hieraus

$$T^2 - S^2 = \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu (r_\nu - \mathfrak{r})^2 \tag{8b}$$

sowie durch nochmaliges Ausquadrieren

$$T^2 - S^2 = \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu r_\nu^2 - 2\mathfrak{r} \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu r_\nu + \mathfrak{r}^2 = \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu r_\nu^2 - \mathfrak{r}^2,$$

d. h. die Richtigkeit von (8a). In Formel (8b) liegt ein kurzer Beweis für $T^2 > S^2$, dies wieder zeigt $2R + S = \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu \mid s_\nu \mid < T$.

Als lineare Funktionen der Wahrscheinlichkeiten w sind somit R und T^2 von sehr einfacher Struktur. Anders verhält sich dies bei der „kombinierten“ Verlusterwartung, dem „kombinierten“ Risiko $\hat{R}$ von k gleichartigen Verträgen, jeder wie oben charakterisiert, dann müssen eben alle Möglichkeiten des Zusammentreffens von Ereignissen berücksichtigt werden:

Das erste Ereignis treffe bei $(k - \nu)$ Verträgen ein, was auf $\binom{k}{\nu}$-fache Weise geschehen kann, daher bei ν Verträgen nicht ein. Unter den letzteren treffe das zweite Ereignis in $(\nu - \nu')$ Fällen ein, wofür eine $\binom{\nu}{\nu'}$-fache Möglichkeit besteht, also in ν' Fällen nicht ein. Das dritte Ereignis finde in $(\nu' - \nu'')$ Fällen statt usf. Finanziell wird so der $(k - \nu)$-malige Effekt s_0 kombiniert mit dem $(\nu - \nu')$-maligen Effekt s_1, dem $(\nu' - \nu'')$-maligen Effekt $s_2, \ldots$ zu dem Gesamteffekt

$$s_{\nu,\nu',\nu''} = (k - \nu)\, s_0 + (\nu - \nu')\, s_1 + (\nu' - \nu'')\, s_2 + \ldots \tag{9}$$

und die Wahrscheinlichkeit für diese kombinierte Ereignung ist das korrespondierende Produkt von Potenzen der Wahrscheinlichkeiten w_0 bis w_n mit der Exponentensumme k

$$w_0^{k-\nu} w_1^{\nu-\nu'} w_2^{\nu'-\nu''} \ldots = w_0^k \left(\frac{w_1}{w_0}\right)^{\nu} \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\nu'} \ldots,$$

daher folgt für die kombinierte Verlusterwartung die n-fache Summe

$$\hat{R} = w_0^k\, \Sigma^{(n)} \binom{k}{\nu} \binom{\nu}{\nu'} \binom{\nu'}{\nu''} \ldots \left(\frac{w_1}{w_0}\right)^{\nu} \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\nu'} \ldots \overset{[+]}{s}_{(\nu,\nu',\nu'',\ldots)}, \tag{10}$$

die Summation ausgedehnt über alle Werte $\nu, \nu', \nu'', \ldots$, welche dem finanziellen Effekt (9) das positive Vorzeichen erteilen, in welchem Falle sein Betrag mit $\overset{[+]}{s}_{\nu,\nu'\ldots}$ bezeichnet werden soll. Analog wäre zwar auch die kombinierte Gewinnchance G zu definieren, aber deren gesonderte Betrachtung erübrigt sich, weil die Differenz

$$\hat{G} - \hat{R} = - w_0^k\, \Sigma^{(n)} \binom{k}{\nu} \binom{\nu}{\nu'} \binom{\nu'}{\nu''} \ldots \left(\frac{w_1}{w_0}\right)^{\nu} \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\nu'} \ldots s_{(\nu,\nu',\ldots)}$$

gleich kS nachzuweisen ist.

II. Das durchschnittliche Risiko von Zufallsverträgen einfachster Art.

Bezieht sich ein Zufallsvertrag auf ein einziges Ereignis, und soll beim Eintreffen oder Nichteintreffen dieses mit der Wahrscheinlichkeit w zu erwartenden Ereignisses der Preis $\mathfrak{A}$, resp. $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$ ausbezahlt werden, wogegen der Einsatz $\mathfrak{C}$ zu leisten ist, so erwächst zu Lasten des Unternehmers ein finanzieller Effekt $\mathfrak{A} - \mathfrak{C}$ resp. $\mathfrak{B} - \mathfrak{C}$, jenachdem das Ereignis eintrifft oder nicht. Nun darf angenommen werden, daß die beiden Beträge $\mathfrak{A} - \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} - \mathfrak{C}$ nicht einerlei Vorzeichen haben, daher sind bloß die zwei Möglichkeiten zu unterscheiden

$$\mathfrak{A} > \mathfrak{C} > \mathfrak{B} \text{ und } \mathfrak{A} < \mathfrak{C} < \mathfrak{B}. \tag{11}$$

Allerdings könnte man hier, wo nur die einzige Wahrscheinlichkeit w in Frage kommt, von vornherein einen der beiden Preise gleich Null ansetzen, denn genau denselben Effekt erzielt ein Vertrag, der

bei $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ die Preise $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ und Null gegen den Einsatz $\mathfrak{C} - \mathfrak{B}$

bei $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ die Preise Null und $\mathfrak{B} - \mathfrak{A}$ gegen den Einsatz $\mathfrak{C} - \mathfrak{A}$

vereinbart, aber der Vergleich allgemeiner Zufallsverträge mit solchen einfachster Art wäre dann jedenfalls mit einer Inkongruenz behaftet.

Für die erste der beiden Möglichkeiten (11) wird das durchschnittliche Risiko R gleich $w(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})$, für die zweite $(1 - w)(\mathfrak{B} - \mathfrak{C})$, wenn also der Hoffnungswert der Preise

$$U = w\mathfrak{A} + (1 - w)\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A} \neq \mathfrak{B} \tag{12}$$

um ein gewisses Überentgelt S von dem Einsatz $\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{C} = w\mathfrak{A} + (1 - w)\,\mathfrak{B} + S, \quad S \geqq 0 \tag{13}$$

übertroffen wird, so resultiert je nach $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$

$$R = w\,(1 - w)\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) - wS \text{ resp. } w\,(1 - w)\,(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) - (1 - w)\,S \tag{14}$$

Dagegen braucht man bezüglich des Maßstabes (8) für die finanziellen Effekte des Vertrages

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{w\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{C})^2 + (1 - w)\,(\mathfrak{B} - \mathfrak{C})^2} = \\ &= \sqrt{S^2 + w\,(1 - w)\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})^2} \end{aligned} \tag{15}$$

keine Unterscheidung zwischen den beiden Möglichkeiten (11) zu machen.

Charakterisiert wird dieser Zufallsvertrag auch durch die drei positiven **Verhältniszahlen**

$$\gamma = \frac{w\mathfrak{A}}{w\mathfrak{A} + (1 - w)\mathfrak{B}}, \quad \varepsilon = \frac{S}{U}, \quad \vartheta = \frac{S}{R}, \tag{16}$$

deren erste den Hoffnungswert im Eintreffensfall als Bruchteil des gesamten Hoffnungswertes darstellt. Den Quotienten ε könnte man das relative Überentgelt und ϑ den Sicherheitskoeffizienten nennen. Durch Einführung der Größen (16) ergibt sich für die durchschnittliche Verlusterwartung eine der beiden Formen

$$R = U\,(\gamma - w - \varepsilon w) \text{ resp. } U\,(w + \varepsilon w - \gamma - \varepsilon), \tag{17}$$

die sich durch Substitution von $1 - \gamma$, $1 - w$ statt γ, w in einander verwandeln. Positiv kann R nur ausfallen wenn w nicht in dem Intervall zwischen $\frac{\gamma}{1+\varepsilon}$ und $\frac{\gamma+\varepsilon}{1+\varepsilon}$ liegt.

Der Sicherheitskoeffizient ϑ steht nach (17) mit ε in dem Zusammenhang

$$\vartheta = \frac{\varepsilon}{\gamma - w - \varepsilon w} \text{ resp. } \frac{\varepsilon}{w + \varepsilon w - \gamma - \varepsilon}, \tag{17a}$$

er nimmt mit ε zu, bleibt aber immer größer als ε. Umgekehrt ist

$$\varepsilon = \vartheta\,\frac{\gamma - w}{1 + \vartheta w} \text{ resp. } \vartheta\,\frac{w - \gamma}{1 + \vartheta\,(1 - w)}, \tag{17b}$$

Ebenso kann T durch Elimination der Preise $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ umgeformt werden, aus (15) wird

$$T = \sqrt{S^2 + \frac{U^2\,(\gamma - w)^2}{w\,(1 - w)}} = U\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{1}{w\,(1 - w)}\,(\gamma - w)^2}, \tag{18}$$

was sich für $\gamma = 1$ (gleichbedentend mit $\mathfrak{B} = 0$) vereinfacht zu

$$T = \sqrt{S^2 + \frac{1 - w}{w}\,U^2} = U\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{1 - w}{w}}. \tag{18a}$$

Nunmehr ist die Beziehung zwischen den beiden Maßstäben R und T anzugeben, um nach Willkür einen von ihnen als Basis der weiteren Entwicklungen wählen zu können. Den Quotienten R/T liefert die erste Gleichung (17), kombiniert mit (18)

$$\frac{R}{T} = (\gamma - w - \varepsilon w)\sqrt{\frac{w\,(1 - w)}{(\gamma - w)^2 + \varepsilon^2 w\,(1 - w)}}$$

und dies geht durch Einsetzung des Wertes (17b) für ε, wobei schließlich γ herausfällt, über in

$$\frac{R}{T} = \sqrt{\frac{w\,(1 - w)}{1 + w\,(2\vartheta + \vartheta^2)}}, \quad \mathfrak{A} > \mathfrak{B}. \tag{19}$$

Der korrespondierende Wert im Fall $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ entsteht durch Substitution von $1 - w$ statt w

$$\frac{R}{T} = \sqrt{\frac{w\,(1 - w)}{1 + (1 - w)\,(2\vartheta + \vartheta^2)}}, \quad \mathfrak{A} < \mathfrak{B}. \tag{19a}$$

Weil aber der Ausdruck T im Äquivalenzfall auch als Maß einer Verlusterwartung, als mittleres Risiko gedacht werden kann, so hätte eine Generalisierung dieses letzteren Begriffes für den Fall der Nichtäquivalenz folgenden Bedingungen zu genügen: Für $S = 0$ denselben Wert $U\sqrt{\frac{(\gamma - w)^2}{w(1-w)}}$ anzunehmen wie T, zweitens mit wachsendem Überentgelt S kleiner zu werden und drittens, wenn S einen solchen Wert S^* erreicht, welcher die Verlusterwartung R zum Verschwinden bringt, ebenfalls zu verschwinden oder wenigstens einen sehr kleinen Wert anzunehmen. Diesen Forderungen entspricht das mittlere Risiko $\mathfrak{R}$ durch den Ansatz als lineare Funktion von S, T

$$\mathfrak{R} = T - \frac{S}{\sqrt{1-w}} \text{ resp. } T - \frac{S}{\sqrt{w}}, \tag{20}$$

dann verschwindet $\mathfrak{R}$ für den Wert $S^* = (1-w)(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$ resp. $w(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})$, welcher R zu Null macht, und das zugehörige $T^* = \sqrt{S^{*2} + w(1-w)(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})^2}$. Auch die Forderung, mit wachsendem S abzunehmen, erfüllt der Ansatz (20), wie aus dem negativen Vorzeichen von

$$\frac{d\mathfrak{R}}{dS} = \frac{S}{T} - \frac{1}{\sqrt{1-w}} \text{ resp. } \frac{S}{T} - \frac{1}{\sqrt{w}}$$

ersichtlich ist. Es erscheint indes einfacher statt des Wertes (20) eine Obergrenze $\mathfrak{R}^*$ von $\mathfrak{R}$ einzuführen, welche, direkt proportional T

$$\mathfrak{R}^* = \left(1 - \frac{w\varepsilon}{\gamma - w}\right) T \text{ resp. } \left(1 - \frac{1-w}{w-\gamma}\,\varepsilon\right) T \tag{20a}$$

ebenfalls mit R verschwindet, allerdings der Forderung, mit wachsendem Überentgelt kleiner zu werden nur solange entspricht, als dieses unter einer gewissen Schranke bleibt. Daß $\mathfrak{R}^*$ wirklich immer größer als der Ansatz (20) bleibt, oder

$$\frac{w\varepsilon}{\gamma - w} T < \frac{S}{\sqrt{1-w}} \text{ resp. } \frac{1-w}{w-\gamma}\,\varepsilon\, T < \frac{S}{\sqrt{w}}$$

statthat, welche Bedingung wieder nach (18) mit

$$\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{1}{w(1-w)}(\gamma - w)^2} < \frac{\gamma - w}{w\sqrt{1-w}} \text{ resp. } \frac{w-\gamma}{(1-w)\sqrt{w}} \tag{20b}$$

zusammenfällt, folgt aus der Übereinstimmung beider Seiten von (20b), wenn der zulässige Maximalwert $\frac{\gamma - w}{w}$ resp. $\frac{w-\gamma}{1-w}$ von ε eingesetzt wird. Nach (17b) ist aber

$$\mathfrak{R}^* = \frac{T}{1 + w\vartheta} \text{ resp. } \frac{T}{1 + (1-w)\vartheta} \tag{20c}$$

und daher der Zusammenhang zwischen R und $\mathfrak{R}^*$ im Falle $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$

$$\frac{R}{\mathfrak{R}^*} = (1 + w\vartheta)\sqrt{\frac{w\,(1-w)}{1 + w\,(2\vartheta + \vartheta^2)}},\ \mathfrak{A} > \mathfrak{B}, \tag{21}$$

anderseits ist w bei $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ durch $1 - w$ zu ersetzen. In beiden Fällen folgt aus (21) noch die Ungleichung

$$R < \mathfrak{R}^* \sqrt{w\,(1-w)\,(1+\vartheta)}. \tag{21a}$$

Man könnte wohl auch ohneweiters das mittlere Risiko $\mathfrak{R}$ durch $R/\sqrt{w\,(1-w)\,(1+\vartheta)}$ definieren, es würde dabei alle oben geforderten Eigenschaften besitzen, aber der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{R}$ und T wäre schon ziemlich kompliziert.

III. Das kombinierte Risiko von gleichcharakterisierten Zufallsverträgen einfachster Art.

Für eine Gruppe von k Verträgen, deren jeder den Preis $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{B}$ beim Eintreffen oder Nichteintreffen eines bestimmten Ereignisses festsetzt, und zwar gegen Leistung des Einsatzes $\mathfrak{C}$, bewirkt die Kombination, daß das entscheidende Ereignis bei $(k - \nu)$ Vertragen eintritt, also ν-mal nicht eintritt, was auf $\binom{k}{\nu}$-fache Weise geschehen kann, den finanziellen Effekt $s_{(\nu)} = (k - \nu)\,\mathfrak{A} + \nu\mathfrak{B} - k\mathfrak{T}$ zu Lasten des Unternehmers. Die kombinierte Verlusterwartung hat somit, wenn w die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses ist, zur Definition

$$\widehat{R} = \sum_{\nu} \binom{k}{\nu} w^{k-\nu}\,(1-w)^{\nu}\,[(k-\nu)\,\mathfrak{A} + \nu\mathfrak{B} - k\mathfrak{T}] \tag{22}$$

die Summe ausgedehnt über jene Zahlen ν, bei denen der Efekt $s_{(\nu)}$ positiv ausfällt, und läßt sich unter der Annahme $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ darstellen durch

$$\widehat{R} = (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) \sum_{\nu < k/\varrho} \binom{k}{\nu} w^{k-\nu}\,(1-w)^{\nu} \left(\frac{k}{\varrho} - \nu\right),\quad \varrho = \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} - \mathfrak{C}}. \tag{22a}$$

Indem man also jene ganze Zahl μ bestimmt, welche der Bedingung

$$\frac{k}{\varrho} = \mu - \delta, \qquad 0 \leqq \delta < 1 \tag{22b}$$

entspricht, erhält man, wenn noch $\sigma = \dfrac{1}{1-w}$ gesetzt wird, als Wert von $\widehat{R}$

$$\widehat{R} = (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma}\right)^{k} \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \binom{k}{\nu} \left(\frac{k}{\varrho} - \nu\right) (\sigma - 1)^{-\nu},\quad \sigma = \frac{1}{1-w}.$$

welcher Ausdruck auf ein Polynom von ϱ, σ

$$\Psi_k(\varrho, \sigma) = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} (k - \nu\varrho) \binom{k}{\nu} (\sigma - 1)^{\mu-1-\nu} \tag{23}$$

mittels der einfachen Beziehung rückführbar ist

$$\hat{R} = \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}}{\varrho} \frac{(\sigma - 1)^{k-\mu+1}}{\sigma^k} \Psi_k(\varrho, \sigma).$$

Da aus (22*a*) für die Größe ϱ

$$\varrho = \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} - [w\mathfrak{A} + (1 - w)\,\mathfrak{B} + S]} = \frac{1}{1 - w - \dfrac{S}{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}}} \tag{23a}$$

(also $\varrho \gtreqqless \sigma$ je nach $S \gtreqqless 0$) sich ergibt, anderseits gemäß (14) auch die durchschnittliche Verlusterwartung durch ϱ ausdrückbar wird

$$R = (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\, w \left(1 - w - \frac{S}{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}}\right) = (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) \frac{\sigma - 1}{\varrho\sigma}.$$

enthält der Quotient $\hat{R}/R$ die Preise $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ nicht mehr explizite

$$\frac{\hat{R}}{R} = \frac{(\sigma - 1)^{k-\mu}}{\sigma^{k-1}} \Psi_k(\varrho, \sigma), \quad \varrho \gtreqqless \sigma \text{ bei } \mathfrak{A} > \mathfrak{B}. \tag{24}$$

Hierin bleibt nur noch die Größenordnung von $\Psi_k(\varrho, \sigma)$ zu ermitteln. Wenn hingegen $\mathfrak{A}$ nicht, wie bisher angenommen, größer, sondern kleiner als $\mathfrak{B}$ ist, braucht man nur rechts in (22) die Substitution $(k - \nu)$ statt ν vorzunehmen und

$$\hat{R} = \sum_{\nu} \binom{k}{\nu} w^{\nu} (1 - w)^{k-\nu} [\nu\,\mathfrak{A} + (k - \nu)\,\mathfrak{B} - k\mathfrak{C}]$$

wieder mit der Bedingung für den Summationsbuchstaben ν, daß der Ausdruck in der eckigen Klammer positiv ausfällt, ganz analog wie oben umzuformen: Durch das Herausheben von $\mathfrak{B} - \mathfrak{A}$ wird

$$\hat{R} = (\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) \sum_{\nu} \binom{k}{\nu} w^{\nu} (1 - w)^{k-\nu} \left(\frac{k}{\bar{\varrho}} - \nu\right), \quad \bar{\varrho} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}}{\mathfrak{B} - \mathfrak{C}}, \quad \nu < \frac{k}{\bar{\varrho}} \tag{25}$$

so daß nach Einführung der ganzen Zahl

$$\bar{\mu} = \frac{k}{\bar{\varrho}} + \bar{\delta}, \quad 0 \leqq \bar{\delta} < 1$$

und von $\bar{\sigma} = \dfrac{1}{w}$ eine zu (24) korrespondierende Gleichung für den

Quotienten $\hat{R}/R$ entsteht

$$\frac{\bar{\hat{R}}}{\bar{R}} = \frac{(\bar{\sigma}-1)^{k-\bar{\mu}}}{\bar{\sigma}^{k-1}} \Psi_k(\bar{\varrho}, \bar{\sigma}), \quad \bar{\varrho} \geqq \bar{\sigma} \text{ bei } \mathfrak{A} < \mathfrak{B}. \tag{25a}$$

Gegenüber (24) weist also die Problemstellung keine Änderung auf und es genügt, sich auf den Fall $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ zu beschränken.

Im Falle der Äquivalenz ($S = 0$, $\varrho = \sigma$) existiert aber ein geschlossener Ausdruck für das Polynom Ψ, nämlich

$$\Psi_k(\sigma, \sigma) = \mu \binom{k}{\mu}, \quad \mu = \frac{k}{\sigma} + \delta, \quad 0 \leqq \delta < 1. \tag{26}$$

und zwar folgt dies aus dem Hilfssatze: Bei willkürlichen Werten von g, k besteht für jede ganze Zahl $\mu < k$ die Identität

$$\binom{k-1}{\mu-1} = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \binom{k}{\nu} (1-g\nu)(gk-1)^{\mu-1-\nu}. \tag{27}$$

Zum Beweise von (27) zerlegt man in der Summe rechts

$$1 - g\nu = \frac{k-\nu}{k} - \frac{\nu}{k}(gk-1),$$

was deren Umformung in

$$\sum_{\nu=0}^{\mu-1} \frac{k-\nu}{k} \binom{k}{\nu} (gk-1)^{\mu-1-\nu} - \sum_{\nu=0,1}^{\mu-1} \frac{\nu}{k} \binom{k}{\nu} (gk-1)^{\mu-\nu}$$

bewirkt und ordnet diesen Ausdruck, oder anders geschrieben

$$\sum_{\nu=0}^{\mu-1} \binom{k-1}{\nu} (gk-1)^{\mu-1-\nu} - \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \binom{k-1}{\nu-1} (gk-1)^{\mu-\nu}$$

nach Potenzen von $(gk-1)$. Dann heben sich alle Terme weg bis auf den von $(gk-1)$ freien, im Minuenden für $\nu = \mu - 1$ stehenden Term, welcher mit der linken Seite von (27) übereinstimmt.

Erteilt man nun in (27) der Größe g den Wert σ/k und multipliziert mit k, so resultiert

$$k\binom{k-1}{\mu-1} = \mu \binom{k}{\mu} = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} (k-\nu\sigma) \binom{k}{\nu} (\sigma-1)^{\mu-1-\nu},$$

wie in (26) behauptet, nur daß dort die ganze Zahl μ nicht willkürlich, sondern durch $\frac{k}{\sigma} + \delta$ definiert war. Hiedurch erhält man im Äquivalenzfalle den Quotienten (24) zwischen kombinierter und durchschnittlicher Verlusterwartung

$$\text{bei } S = 0, \quad \frac{\hat{R}}{R} = \frac{\mu(\sigma-1)^{k-\mu}}{\sigma^{k-1}} \binom{k}{\mu}, \quad \mu = \frac{k}{\sigma} + \delta, \quad 0 \leqq \delta < 1. \tag{28}$$

Zur Angabe der Größenordnung dieses Quotienten muß aus der Theorie der Stirling'schen Reihe der Satz herangezogen werden, daß die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(x+1)}{x^{x+\frac{1}{2}}}, \quad x \text{ positiv}$$

für wachsende x abnimmt und sich für große x der Einheit nähert. Dies zeigt für den Binomialkoeffizienten

$$\binom{\lambda}{\mu} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\lambda-\mu+1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\mu^{\mu+\frac{1}{2}}\,(\lambda-\mu)^{\lambda-\mu+\frac{1}{2}}} \frac{\varphi(\lambda)}{\varphi(\mu)\,\varphi(\lambda-\mu)} \tag{29}$$

die Größenordnung an, denn der Ausdruck $\varphi(\lambda)/\varphi(\mu)\,\varphi(\lambda-\mu)$,

$$\text{wegen } \varphi(\mu) > 1,\ \varphi(\lambda) < \varphi(\lambda-\mu)$$

ein echter Bruch, unterscheidet sich wenig von 1, wenn sowohl μ als $\lambda - \mu$ einen genügend großen Betrag hat, weil alsdann alle drei Funktionswerte $\varphi(\lambda)$, $\varphi(\mu)$, $\varphi(\lambda-\mu)$ nahezu 1 sind. Aus dieser Bestimmung

$$\binom{\lambda}{\mu} \lesssim \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\mu} - 1\right)^{\mu-\lambda} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi\mu\,(\lambda-\mu)}} \tag{29a}$$

folgt für den Quotienten $\hat{R}/R$ in (28) die Größenordnung

$$\frac{\mu\,(\sigma-1)^{k-\mu}}{\sigma^{k-1}} \left(\frac{k}{\mu}\right)^{k} \left(\frac{k}{\mu} - 1\right)^{\mu-k} \sqrt{\frac{k}{2\pi\mu\,(k-\mu)}},$$

die identisch ist mit

$$\sigma \left(\frac{k}{\mu\sigma}\right)^{k} \left(\frac{\mu\sigma-\mu}{k-\mu}\right)^{k-\mu} \sqrt{\frac{k\mu}{2\pi\,(k-\mu)}}.$$

Nach der Definition (26) der Zahl $\mu = \frac{k}{\sigma} + \delta$ hat das Produkt

$$\left(\frac{k}{\mu\sigma}\right)^{k} \left(\frac{\mu\sigma-\mu}{k-\mu}\right)^{k-\mu} = \frac{\left(1 + \dfrac{\delta\sigma}{k-\mu}\right)^{k-\mu}}{\left(1 + \dfrac{\delta\sigma}{k}\right)^{k}} < 1 \tag{29b}$$

nahezu den Wert 1, weil sowohl der Zähler als der Nenner rechts dem Grenzwert $e^{\delta\sigma}$ für große $k - \mu$ zustrebt, daher vereinfacht sich die Dimensionsangabe (29a) zu

$$\frac{\hat{R}}{R} \lesssim \sigma \sqrt{\frac{k\mu}{2\pi\,(k-\mu)}} = \sigma \sqrt{\frac{k\,(k+\delta\sigma)}{2\pi\,(k\sigma - k - \delta\sigma)}},$$

was schließlich die einleitend erwähnte Behauptung in dem Falle $S = 0$, $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$

$$\frac{\widehat{R}}{R} \sim c\sqrt{k}, \qquad c = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi(\sigma-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi w(1-w)}} \quad \text{bei } S = 0 \tag{30}$$

verifiziert. Zu ganz derselben Bestimmung von $\widehat{R}/R$ gelangt man auch bei $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ und hieraus, ebenfalls für $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$, mit Rücksicht auf (19), (19a) zu der bekannten Formel

$$\text{bei } S = 0, \quad \frac{\widehat{R}}{T} = \frac{\widehat{R}}{\mathfrak{R}} = \frac{\widehat{R}}{R}\sqrt{w(1-w)} \sim \sqrt{\frac{k}{2\pi}}. \tag{30a}$$

IV. Nichtäquivalenz bei k gleichen Verträgen einfachster Art.

Wenn keine Äquivalenz besteht und deshalb in der Gleichung (24) für das kombinierte Risiko

$$\frac{\widehat{R}}{R} = \frac{(\sigma-1)^{k-\mu}}{\sigma^{k-1}}\Psi_k(\varrho, \sigma), \qquad \mu = \frac{k}{\varrho} + \delta, \text{ (vgl. 22}b)$$

ϱ größer als σ ist, muß noch bezüglich des Polynoms Ψ die Größenordnung oder wenigstens eine Obergrenze derselben ermittelt werden. Die hiezu verwendbaren Ausdrücke haben, wie im Anhang (Formeln (72) und folgende) erörtert wird, die gemeinsame Form

$$\Psi_k(\varrho, \sigma) \lesssim bk^{\alpha}\binom{k}{\mu} \sim bk^{\alpha}\left(\frac{k}{\mu}\right)^k\left(\frac{k}{\mu}-1\right)^{\mu-k}\sqrt{\frac{k}{2\pi\mu(k-\mu)}}, \tag{31}$$

so daß durch Multiplikation mit $(\sigma-1)^{k-\mu}/\sigma^{k-1}$ eine Obergrenze für die Größenordnung von $\widehat{R}/R$ anzugeben ist

$$b\sigma\left(\frac{k}{\mu\sigma}\right)^k\left(\frac{\sigma-1}{\frac{k}{\mu}-1}\right)^{k-\mu}\frac{k^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi\mu(k-\mu)}},$$

welcher Ausdruck unter Einführung der Größe

$$B = \frac{k}{\mu\sigma}\left(\frac{\mu\sigma-\mu}{k-\mu}\right)^{1-\frac{\mu}{k}}$$

in die einfachere Form gebracht wird

$$\frac{b\sigma B^k k^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi\mu(k-\mu)}} = \frac{b\varrho\sigma B^k k^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi\left(1+\frac{\delta\varrho}{k}\right)\left(\varrho-1-\frac{\delta\varrho}{k}\right)}}.$$

Dies beweist (für $\alpha = 0$) die Richtigkeit der Dimensionsangabe (1)

$$\frac{\hat{R}}{R} \lesssim c k^{\alpha-\frac{1}{2}} \beta^k, \qquad c = \frac{b\varrho\sigma}{\sqrt{2\pi\,(\varrho-1)}}, \qquad \beta = \frac{\varrho}{\sigma}\left(\frac{\sigma-1}{\varrho-1}\right)^{1-\frac{1}{\varrho}}, \tag{32}$$

denn B^k stimmt mit der k-ten Potenz des von b, α unabhängigen echten Bruches β bis auf einen nur die Konstante c tangierenden Schwankungsfaktor $\left(\frac{\varrho-1}{\sigma-1}\right)^{\delta}$ überein, weil in $B^k\beta^{-k}$ oder

$$B^k\left[\frac{\sigma}{\varrho}\left(\frac{\varrho-1}{\sigma-1}\right)^{1-\frac{1}{\varrho}}\right]^k = \left(\frac{k}{\mu\varrho}\right)^k\left(\frac{\mu\varrho-\mu}{k-\mu}\right)^{k-\mu}\left(\frac{\varrho-1}{\sigma-1}\right)^{\delta}$$

das Produkt der ersten beiden Faktoren rechts wieder, wie das analoge in (29b) den Grenzwert 1 hat.

Die Hauptkonstante β, welche solcherart für die Größenordnung $ck^{\alpha-\frac{1}{2}}\beta^k$ von $\hat{R}/R$ den Ausschlag gibt und im Äquivalenzfalle $\varrho = \sigma$ den Wert 1 besitzt, nimmt bei fixem σ mit wachsendem ϱ ab, wegen

$$\frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{d\varrho} = \frac{1}{\varrho^2}\lg\frac{\sigma-1}{\varrho-1} < 0 \text{ bei } \varrho > \sigma,$$

sie ist daher im Nichtäquivalenzfalle $\varrho > \sigma$ ein echter Bruch (übrigens auch bei $\varrho < \sigma$) d. h. das kombinierte Risiko nimmt dann mit wachsender Vertragszahl ungefähr in geometrischer Progression mit dem Quotienten β ab.

Die bei Berechnung der Konstanten c, α, β auftretenden Hilfsgrößen ϱ, σ resp. $\bar{\varrho}$, $\bar{\sigma}$ sind durch die charakteristischen Verhältniszahlen des Vertrages ausdrückbar, indem man aus (23a) und (25), wenn dort $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ durch $\frac{\gamma U}{w}$, $\frac{(1-\gamma)\,U}{1-w}$ ersetzt wird, die Werte

$$\varrho = \frac{\gamma - w}{(1-w)(\gamma - w - \varepsilon w)}, \quad \bar{\varrho} = \frac{w-\gamma}{w\,(w+\varepsilon w-\gamma-\varepsilon)} \tag{33}$$

entnimmt und hierin, ebenso wie in $\sigma = \frac{1}{1-w}$, $\bar{\sigma} = \frac{1}{w}$ den Sicherheitskoeffizienten ϑ gemäß (17a) einführt. Aus den so entstehenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varrho &= \frac{1+\gamma\vartheta}{1-\gamma+\frac{1+\vartheta}{\vartheta}\varepsilon}, \quad & \sigma &= \frac{1+\varepsilon}{1-\gamma+\frac{1+\vartheta}{\vartheta}\varepsilon} \text{ bei } \mathfrak{A} > \mathfrak{B},\\
\bar{\varrho} &= \frac{1+(1-\gamma)\,\vartheta}{\gamma+\frac{1+\vartheta}{\vartheta}\varepsilon}, \quad & \bar{\sigma} &= \frac{1+\varepsilon}{\gamma+\frac{1+\vartheta}{\vartheta}\varepsilon} \text{ bei } \mathfrak{A} < \mathfrak{B}
\end{aligned} \tag{33a}$$

folgen einerseits Zusammenhänge zwischen den vier Größen ϱ, σ, $\bar{\varrho}$, $\bar{\sigma}$ und dem Sicherheitskoeffizienten

$$\frac{\sigma-1}{\varrho-1}=\frac{1}{1+\vartheta}, \quad \frac{\sigma}{\sqrt{\varrho-1}}=\frac{1}{\sqrt{w\,(1-w)\,(1+\vartheta)}} \quad \text{bei } \mathfrak{A}>\mathfrak{B}$$

$$\frac{\bar{\sigma}-1}{\bar{\varrho}-1}=\frac{1}{1+\vartheta}, \quad \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{\bar{\varrho}-1}}=\frac{1}{\sqrt{w\,(1-w)\,(1+\vartheta)}} \quad \text{bei } \mathfrak{A}<\mathfrak{B}$$

anderseits ergibt sich für die Hauptkonstante β ebenfalls eine Darstellung, in der nur die Verhältniszahlen des Vertrages vorkommen

$$\beta=\frac{1+\gamma\vartheta}{1+\varepsilon}\,(1+\vartheta)^{\frac{1+\vartheta}{1+\gamma\vartheta}\left(\frac{\varepsilon}{\vartheta}-\gamma\right)} \quad \text{bei } \mathfrak{A}>\mathfrak{B}, \tag{34}$$

während bei $\mathfrak{A}<\mathfrak{B}$ die Substitution $1-\gamma$ statt γ vorzunehmen ist. Im Falle $\gamma=1$ vereinfacht sich dies zu

$$\beta=\frac{1}{1+\varepsilon}\,(1+\vartheta)^{\varepsilon/\vartheta} \quad \text{bei } \gamma=1. \tag{34a}$$

Insbesondere sind bezüglich der Konstanten α, b in (31) die drei Ansätze hervorzuheben

$$\alpha=0,\ b=\frac{\varrho\,(\varrho-1)}{(\varrho-\sigma)^2} \;\Bigg|\; \alpha=\tau=\frac{\sigma-1}{\varrho-1},\ b=\frac{\varrho^{1-2\tau}}{(\varrho-1)^{1-\tau}} \;\Bigg|\; \alpha=1,\ b=\frac{1}{\varrho}, \tag{35}$$

welche für die Konstante c in (32) die Werte liefern

$$\frac{\varrho^2\sigma}{(\varrho-\sigma)^2}\sqrt{\frac{\varrho-1}{2\pi}} \text{ resp. } \frac{\varrho^{2-2\tau}\sigma}{\sqrt{2\pi\,(\varrho-1)^{3-2\tau}}} \text{ oder } \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\,(\varrho-1)}}, \tag{35a}$$

Mittels dieser Werte von c erhält man in der Größenordnung des Quotienten $\widehat{R}/T$

$$\frac{\widehat{R}}{T}=\frac{\widehat{R}}{R}\frac{R}{T}\lesssim \mathfrak{c}\,k^{\alpha-\frac{1}{2}}\beta^k \tag{36}$$

die Konstante $\mathfrak{c}$ durch die Gleichung, vgl. (19)

$$\mathfrak{c}=c\sqrt{\frac{w\,(1-w)}{1+w\,(2\vartheta+\vartheta^2)}}. \tag{36a}$$

Eventuell kann auch gemäß (21a) der Quotient

$$\frac{\widehat{R}}{\mathfrak{R}^*}<\mathfrak{c}k^{\alpha-\frac{1}{2}}\beta^k\sqrt{w\,(1-w)\,(1+\vartheta)} \tag{36b}$$

betrachtet werden, was z. B. für $\alpha=1$ eine direkte Verallgemeinerung von (30a) bietet.

Beizufügen wäre, daß ähnliche Berechnungen wie für Zufallsverträge einfachster Art auch für gewisse, ganz spezielle Zufallsverträge mit n Wahrscheinlichkeiten gelten, wenn nämlich jeder der Beträge s_0 bis s_{n-2} verschwindet.

V. Näherungsweise Rückführung von Zufallsverträgen auf solche einfachster Art.

Im Äquivalenzfalle ist nach einem bekannten Satze, vgl. (2), das kombinierte Risiko für eine große Zahl k irgendwelcher gleichcharakterisierter Zufallsverträge genau dasselbe wie für k ebenfalls unter sich gleichartige andere Zufallsverträge, welche dasselbe mittlere Risiko $\mathfrak{R} = \sqrt{w_0 s_0^2 + w_1 s_1^2 + \ldots}$ aufweisen, sonst aber ganz beliebig bezüglich der Wahrscheinlichkeiten und finanziellen Effekte sind, denn für jede der beiden Vertragsgruppen wird $\hat{R} \sim \mathfrak{R}\sqrt{\frac{k}{2\pi}}$ nachgewiesen. Daher wäre bei irgendwelchen k gleichartigen Verträgen, die nicht zu sehr von der Äquivalenz abweichen, die Möglichkeit vorhanden, das kombinierte Risiko näherungsweise wenigstens dann demjenigen von k einfacheren Verträgen mit demselben Wert des Gauß'schen Ausdruckes $\sqrt{w_0 s_0^2 + w_1 s_1^2 + \ldots}$ gleichzusetzen, wenn gewisse Hauptmerkmale, in erster Linie das Überentgelt, für beide Vertragskategorien identisch sind. Einige Konsequenzen dieses, unter bestimmten Annahmen sofort nachzuprüfenden Näherungsprinzips sollen hier entwickelt werden.

1. Von k gleichartigen Zufallsverträgen möge dem einzelnen Vertrage der Hoffnungswert U, das Überentgelt S und der Wert T des Gauß'schen Ausdruckes zugehören, dann sollen dieselben drei Werte S, T, U auch für einen „Ersatz"vertrag einfachster Art gelten, der beim Eintreffen eines hypothetischen Ereignisses einen bestimmten Preis zuerkennt, d. h. nach (18a) soll $T^2 = S^2 + \frac{1-\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}} U^2$ erfüllt sein, wenn wenn $\mathfrak{w}$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des hypothetischen Ereignisses bedeutet. Hieraus ergibt sich

$$\mathfrak{w} = \frac{U^2}{T^2 - S^2 + U^2} = \frac{1}{1+h}, \qquad h = \frac{T^2 - S^2}{U^2} \tag{37}$$

und damit ist der Sicherheitskoeffizient Θ dieses Ersatzvertrages definiert, ebenso dessen durchschnittliches Risiko R^*

$$\Theta = \frac{\varepsilon}{1 - \mathfrak{w} - \mathfrak{w}\varepsilon} = \frac{S}{(1-\mathfrak{w})\,U - \mathfrak{w}S} \qquad \varepsilon = \frac{S}{U}, \tag{37a}$$

$$\Theta = \frac{S}{R^*}, \; R^* = U\,\frac{T^2 - S^2 - SU}{T^2 - S^2 + U^2}. \tag{37b}$$

Aber auch die Hauptkonstante in der Dimension (36) des kombinierten Risiko's der k „Ersatz"verträge und, näherungsweise, der k vorgelegten Verträge ist schon durch ε und Θ fixiert, und zwar als 1 oder ε entsprechend (34a) gleich

$$\beta^* = \frac{1}{1+\varepsilon}(1+\Theta)^{\varepsilon/\Theta}, \tag{38}$$

Nur ist die Zulässigkeit der Annahme (37) an eine gewisse Limitierung des Überentgeltes gebunden, denn wegen (37a) muß $\mathfrak{w}(1+\varepsilon)$ kleiner als Eins, oder kleiner als h sein.

Verstärken läßt sich die Anähnlichung des vorgelegten Vertrages und seines Ersatzes, indem man fordert, daß nicht nur der gesamte Hoffnungswert U aller Preise, sondern auch jeder von dessen Teilen γU und $(1-\gamma)\,U$, getrennt für den Eintreffens- und Nichteintreffensfall, dort wie hier derselbe ist. Dann genügt die Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{w}$ der quadratischen Gleichung, vgl. (18)

$$T^2 = S^2 + \frac{U^2(\gamma-\mathfrak{w})^2}{\mathfrak{w}(1-\mathfrak{w})},$$

aber damit diese Verfeinerung wirklich zu einem genaueren Resultate führt, wird vorauszusetzen sein, daß die Ereignisse, auf welche sich die Eintreffenswahrscheinlichkeiten beziehen, konformen Charakter haben. Die obige Gleichung zweiten Grades für $\mathfrak{w}$

$$\mathrm{F}(\mathfrak{w}) = (1+\mathrm{h})\,\mathfrak{w}^2 - (2\gamma+h)\,\mathfrak{w} + \gamma^2 = 0 \tag{39}$$

oder mit U^2 multipliziert

$$0 = (T^2 - S^2 + U^2)\,\mathfrak{w}^2 - (T^2 - S^2 + 2\gamma U^2)\,\mathfrak{w} + \gamma^2 U^2 \tag{39a}$$

besitzt zwei Wurzeln zwischen 0 und 1, weil sowohl F(0) als F(1) positiv, anderseits für zwei zwischen 0 und 1 liegende Stellen

$$\mathrm{F}\left(\frac{\gamma}{1+h}\right) = \mathrm{F}\left(\frac{\gamma+h}{1+h}\right) = -\frac{\gamma(1-\gamma)\,h}{1+h}$$

negativ ausfällt. Die kleinere Wurzel $\mathfrak{w}$ befindet sich also unterhalb $\frac{\gamma}{1+h} < \gamma$, die größere Wurzel $\overline{\mathfrak{w}}$ oberhalb $\frac{\gamma+h}{1+h} > \gamma$, beide zusammen würden zwei Werte des Sicherheitskoeffizienten liefern, vgl. (17a)

$$\Theta = \frac{\varepsilon}{\gamma - \mathfrak{w} - \mathfrak{w}\,\varepsilon} \quad \text{und} \quad \overline{\Theta} = \frac{\varepsilon}{\overline{\mathfrak{w}}(1+\varepsilon) - \gamma - \varepsilon}, \tag{39b}$$

zwischen denen die **richtige Wahl zu treffen** ist. Aufschluß hierüber gibt die Differenzbildung

$$\frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\overline{\Theta}} = \frac{2\gamma + \varepsilon - (\mathfrak{w} + \overline{\mathfrak{w}})(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$$

oder, da die Summe der beiden Wurzeln von (39) gleich $\frac{2\gamma+h}{1+h}$ ist, die

Gleichung

$$\frac{1}{\Theta}-\frac{1}{\overline{\Theta}}=\frac{(2\gamma-1)(h-\varepsilon)}{\varepsilon(1+h)}. \tag{39c}$$

Denn man braucht nur von dem Falle $\gamma = 1$ auszugehen, für welchen die Bestimmungen (37), (37*a*) eindeutig feststehen und γ bei fix gehaltenen Werten von S, T, U stetig abnehmen zu lassen. Soll der Betrag des Sicherheitskoeffizienten keinen Sprung machen, so muß, bevor γ den Wert $\frac{1}{2}$ erreicht, die kleinere Wurzel $\mathfrak{w} < \gamma$ gewählt werden, da sonst, bei der Wahl $\overline{\mathfrak{w}} > \gamma$ sich plötzlich der Wert des Sicherheitskoeffizienten vergrößern würde, wie aus (39*c*), immer unter der Voraussetzung $\varepsilon < h$, hervorgeht. Erst wenn Θ mit $\overline{\Theta}$ gleich wird, bei $\gamma = \frac{1}{2}$, besteht die Möglichkeit des Überganges zur größeren Wurzel, aber auch die Notwendigkeit, weil andernfalls eine Diskontinuität des Sicherheitskoeffizienten, bei Variation des Bruches γ von Null an, auftreten würde.

In Verallgemeinerung von Formel (38) erhält man somit den Näherungswert für die Hauptkonstante des kombinierten Risiko's, vgl. (34)

$$\beta=\frac{1+\gamma\Theta}{1+\varepsilon}(1+\Theta)^{\frac{1+\Theta}{1+\gamma\Theta}\left(\frac{\varepsilon}{\Theta}-\gamma\right)} \quad \text{bei } \gamma > \tfrac{1}{2}, \tag{40}$$

während für $\gamma < \frac{1}{2}$ die Substitution $1-\gamma$, $\overline{\Theta}$ statt γ, Θ vorzunehmen ist.

Selbst eine Definition des mittleren Einzelrisiko's irgend eines nichtäquivalenten Vertrages kann mittels der Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{w}$ gewonnen werden, analog (20)

$$\mathfrak{R} = T-\frac{S}{\sqrt{1-\mathfrak{w}}} \text{ resp. } T-\frac{S}{\sqrt{\overline{\mathfrak{w}}}} \text{ je nach } \gamma > \tfrac{1}{2} \text{ oder } \gamma < \tfrac{1}{2} \tag{41}$$

ebenso für die Obergrenze $\mathfrak{R}^*$ von $\mathfrak{R}$, vgl. (20*c*)

$$\mathfrak{R}^* = \frac{T}{1+\mathfrak{w}\,\Theta} \text{ resp. } \frac{T}{1+(1-\overline{\mathfrak{w}})\,\overline{\Theta}} \text{ je nach } \gamma > \tfrac{1}{2} \text{ oder } \gamma < \tfrac{1}{2}.$$

2. Eine ähnliche Näherung wie die erörterte würde platzgreifen, wenn nicht bezüglich des Wertes von T, sondern bezüglich des durchschnittlichen Risiko's R und des Hoffnungswertes Übereinstimmung zwischen dem vorgelegten und dem Vertrage einfachster Art herrschen soll. Für letzteren wäre dann als Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines hypothetischen Ereignisses

$$\begin{aligned} \mathfrak{w} &= \frac{\gamma U - R}{S+U} && \text{bei } R < \gamma U, \\ \overline{\mathfrak{w}} &= 1-\frac{(1-\gamma)\,U-R}{S+U} && \text{bei } R < (1-\gamma)\,U \end{aligned} \tag{42}$$

zu nehmen, und wenn R kleiner ist als jeder der beiden Beträge γU, $(1-\gamma)\,U$, analog dem Obigen, $\mathfrak{w}$ oder $\overline{\mathfrak{w}}$ zu wählen, jenachdem γ größer oder kleiner als $\frac{1}{2}$ ist.

3. Wird gefordert, daß ein Vertrag einfachster Art dieselben Werte von R, S, T, γ aufweise wie irgend ein vorgelegter Vertrag, so sind die Bedingungen (17) zu erfüllen

$$R = \mathfrak{U}\,(\gamma - \mathfrak{w}) - S\,\mathfrak{w} \text{ resp. } R = \mathfrak{U}\,(\mathfrak{w} - \gamma) - S\,(1 - \mathfrak{w}), \tag{43}$$

$$T^2 = S^2 + \frac{\mathfrak{U}^2\,(\gamma - \mathfrak{w})^2}{\mathfrak{w}\,(1 - \mathfrak{w})}, \tag{43a}$$

wobei $\mathfrak{w}$ wieder die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des hypothetischen Ereignisses bezeichnet, von welchem der Ersatzvertrag abhängt, und $\mathfrak{U}$ dessen Hoffnungswert. Durch Elimination von $\mathfrak{U}$ ergibt sich für $\mathfrak{w}$ eine quadratische Gleichung

$$(T^2 - S^2)\,\mathfrak{w}\,(1 - \mathfrak{w}) = (R + S\mathfrak{w})^2 \text{ resp. } (R + S\,\overline{1 - \mathfrak{w}})^2, \tag{43b}$$

welche wegen der Ungleichung $2R + S < T$ immer zwei Wurzeln zwischen 0 und 1 besitzt. Mittels einer der linear zu diesen Wurzeln gehörigen Lösungen $\mathfrak{U}$ von (43), die Wahl muß nach den speziellen Daten des vorgelegten Vertrages getroffen werden, findet man näherungsweise die Hauptkonstante des kombinierten Risiko's für die vorgelegten Veträge, wenn ε, ϑ in (34) durch $S/\mathfrak{U}$, S/R ersetzt werden.

VI. Direkte Rechnung für Verträge, deren Fälligkeiten von zwei verschiedenen Ereignissen abhängen.

Nach der allgemeinen Formel (10) ist das kombinierte Risiko für k gleichartige Verträge, deren Fälligkeiten vom Eintreffen oder Nichteintreffen zweier, einander ausschließender Ereignisse abhängen

$$\hat{R} = w_0{}^k \sum_{\nu} \sum_{\nu'} \binom{k}{\nu} \binom{\nu}{\nu'} \left(\frac{w_1}{w_0}\right)^{\nu} \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\nu'} [(k-\nu)\,s_0 + (\nu - \nu')\,s_1 + \nu' s_2]$$

wenn das Eintreffen des ersten resp. zweiten Ereignisses mit der Wahrscheinlichkeit w_0 resp. w_1 erwartet wird, ferner $w_2 = 1 - w_0 - w_1$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daß keines der beiden Ereignisse eintrifft, und s_0, s_1, s_2 der finanzielle Effekt zu Lasten des Unternehmers ist, jenachdem das erste oder das zweite oder keines der Ereignisse eintritt. Die Summation erstreckt sich über alle Werte von ν, ν', welche dem Ausdruck in der eckigen Klammer das positive Vorzeichen erteilen. Als Bedingung für s_0, s_1, s_2 ist zu erfüllen

$$w_0 s_0 + w_1 s_1 + w_2 s_2 = -S, \quad S \geqq 0.$$

Vereinfachend darf man die *Differenz* $(s_1 - s_2)$ *als positiv voraussetzen*, weil sonst die Substitution von $\nu - \nu'$ statt ν' eine Summe desselben Typus hervorbringt

$$w_0^k \sum\sum \binom{k}{\nu}\binom{\nu}{\nu'}\left(\frac{w_2}{w_0}\right)^{\nu}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\nu'}[k-\nu)\,s_0+(\nu-\nu')\,s_2+\nu' s_1],$$

die sich auf einen Vertrag mit den Wahrscheinlichkeiten $w_0 w_2 w_1$ mit den finanziellen Effekten $s_0 s_2 s_1$ bezieht. Durch diese Annahme $s_1 - s_2 > 0$ wird die Verbindung eines negativen s_0 mit einem positiven $(s_0 - s_1)$ ausgeschlossen, weil dann

$$k s_0 - \nu\,(s_0 - s_1) - \nu'\,(s_1 - s_2)$$

für alle ν, ν' negativ ausfiele. Trotzdem bleiben noch vier Möglichkeiten bezüglich des Vorzeichens der s zu unterscheiden

$$s_0 > 0,\ s_1 \gtrless 0,\ s_2 < 0 \text{ und } s_0 < 0,\ s_1 > 0,\ s_2 \gtrless 0,$$

deren Untersuchung aber ziemlich konform verläuft. Die drei Eventualitäten $s_0 = 0$, $s_0 = s_1$, $s_1 = s_2$ brauchen nicht weiter berücksichtigt zu werden, sie sind viel einfacher zu behandeln.

Durch Herausheben von $s_1 - s_2$ und Erstsummierung über ν' entsteht aus der Summe für $\widehat{R}$

$$(s_1 - s_2)\,w_0^k \sum_{\nu} \binom{k}{\nu}\left(\frac{w_1}{w_0}\right)^{\nu} \sum_{\nu'} \binom{\nu}{\nu'}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\nu'}\left[\frac{k s_0 - \nu\,(s_0 - s_1)}{s_1 - s_2} - \nu'\right]$$

und die Ausführung der Summation über ν' erfordert, daß wenn zur Abkürzung

$$\varrho_\nu = \frac{\nu\,(s_1 - s_2)}{k s_0 - \nu\,(s_0 - s_1)}, \qquad \sigma' = 1 + \frac{w_1}{w_2} \tag{44}$$

gesetzt wird, der Wert oder die Größenordnung von

$$Z_\nu(\varrho_\nu, \sigma') = \sum_{\nu'} \binom{\nu}{\nu'}\left(\frac{\nu}{\varrho_\nu} - \nu'\right)(\sigma' - 1)^{-\nu'},\quad 0 \leqq \nu' \leqq \frac{\nu}{\varrho_\nu} \tag{44a}$$

als bekannt anzusehen ist. Diese Funktion $Z_\nu\,(\varrho_\nu, \sigma')$, vermittelst derer sich das kombinierte Risiko durch eine Summation über ν darstellen läßt

$$\widehat{R} = (s_1 - s_2)\,w_0^k \sum_{\nu} \binom{k}{\nu}\left(\frac{w_1}{w_0}\right)^{\nu} Z_\nu\,(\varrho_\nu, \sigma'), \tag{44b}$$

steht mit dem Polynom $\Psi_\nu(\varrho_\nu, \sigma')$, vgl (23), in unmittelbar ersichtlichem Zusammenhang, nur daß hier nicht $\varrho_\nu \geqq \sigma'$ sein muß, vielmehr für die Behandlung des Falles $\varrho_\nu < \sigma'$ die Eigenschaften der Funktion

$$Z_\lambda\,(\varrho, \sigma) = \sum_{\nu}\left(\frac{\lambda}{\varrho} - \nu\right)\binom{\lambda}{\nu}(\sigma - 1)^{-\nu}, \qquad 0 \leqq \nu < \frac{\lambda}{\varrho} \tag{45}$$

in Betracht kommen. Es gelten die Gleichungen (vgl. den Anhang)

$$Z_\lambda\,(\varrho, \sigma) = \frac{\lambda \sigma^\lambda}{(\sigma - 1)^\lambda}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\sigma}\right) \text{ für } \varrho \leqq 1, \tag{45a}$$

$$Z_\lambda(\varrho, \sigma) - (\sigma - 1)^{-\lambda} Z_\lambda\left(\frac{\varrho}{\varrho - 1}, \frac{\sigma}{\sigma - 1}\right) = \frac{\lambda \sigma^\lambda}{(\sigma - 1)^\lambda}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\sigma}\right), \varrho > 1, \tag{45b}$$

deren zweite die beiden Möglichkeiten, daß die erste Variable von Z größer oder kleiner ist als die zweite, wegen

$$\frac{\varrho}{\varrho - 1} - \frac{\sigma}{\sigma - 1} = \frac{\sigma - \varrho}{(\varrho - 1)(\sigma - 1)}$$

mit einander in Beziehung bringt.

Nur solche Werte von ν in der Summe (44b) sind zulässig, welche die Größe ϱ_ν positiv machen. Besitzen also s_0 und $s_0 - s_1$ gleiche Vorzeichen und wird

$$m = \frac{k s_0}{s_0 - s_1} - \delta^*, \; 0 \leqq \delta^* < 1 \tag{46}$$

gesetzt, so muß ν die Bedingung erfüllen

$$\nu < m \text{ oder } \nu \geqq m \text{ je nach } s_0 > 0 \text{ oder } s_0 < 0.$$

Hingegen wird ϱ_ν bei ungleichbezeichneten s_0 und $s_0 - s_1$ (was nur bei positiven s_0 vorkommen kann) für jeden beliebigen Wert von ν positiv.

Nun sind die drei Möglichkeiten zu unterscheiden

$$\varrho_\nu \leqq 1, \; 1 < \varrho_\nu < \sigma', \; \varrho_\nu \geqq \sigma'.$$

Damit $\varrho_\nu \leqq 1$ wird, muß die Zahl ν der Forderung $\nu(s_0 - s_2) \leqq k s_0$ entsprechen, vgl. (44), daher besteht bei gleichbezeichneten Werten von s_0 und $s_0 - s_2$ jenach $s_0 > 0$ oder $s_0 < 0$ die Bedingung für ν

$$\nu < \mu \text{ oder } \nu \geqq \mu, \; \mu = \frac{k s_0}{s_0 - s_2} - \delta, \; 0 \leqq \delta < 1. \tag{47}$$

Sind aber s_0 und $s_0 - s_2$ ungleichbezeichnet, was nur für negative s_0 zutreffen kann, so existieren überhaupt keine Werte von ν, welche $\varrho_\nu \leqq 1$ ergeben.

Für das zweite System der Werte von ν, bei dem ϱ_ν im Intervall zwischen 1 und σ' liegt, wird durch (44)

$$\nu\left(s_0 - s_1 + \frac{s_1 - s_2}{\sigma'}\right) < k s_0 < \nu(s_0 - s_2) \tag{48}$$

gefordert, und dies besagt bei gleichbezeichneten s_0 und $s_0 - s_1 + \frac{1}{\sigma'}(s_1 - s_2)$, jenach dem s_0 positiv ist oder nicht

$$\mu \leqq \nu < \mu' \text{ resp. } \mu > \nu \geqq \mu', \tag{48a}$$

worin die ganze Zahl μ' definiert ist durch

$$\mu' = \frac{k}{\varrho} - \delta', \ \varrho = \frac{s_0 - s_1 + \frac{1}{\sigma'}(s_1 - s_2)}{s_0}, \ 0 \leqq \delta' < 1, \tag{48b}$$

anderseits ist die Bedingung (48) von selbst erfüllt oder unerfüllbar, wenn s_0 und $s_0 - s_1 + \frac{1}{\sigma'}(s_1 - s_2)$ ungleiches Vorzeichen haben.

Der Kürze halber soll die weitere Rechnung nur für positive s_0 erörtert werden. Dann erstreckt sich die Summation für den ersten Teil $\widehat{R}^I$ von $\widehat{R}$, wo $\varrho_\nu \leq 1$ ist, nach (47) über die Werte $\nu = 0$ bis $\mu - 1$ und diejenige über ν' wird geschlossen ausführbar, vgl. (45a)

$$\widehat{R}^I = (s_1 - s_2)\, w_0{}^k \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \binom{k}{\nu} \left(\frac{w_1}{w_0}\right)^\nu \left(\frac{\sigma'}{\sigma' - 1}\right)^\nu \left(\frac{\nu}{\varrho_\nu} - \frac{\nu}{\sigma'}\right). \tag{49}$$

Der zweite Teil $\widehat{R}^{II}$ von $\widehat{R}$, für welchen $1 < \varrho_\nu < \sigma'$ erfüllt ist, bezieht sich, wie aus (48a) zu ersehen, auf die Werte von ν zwischen μ und μ'

$$\widehat{R}^{II} = (s_1 - s_2)\, w_0{}^k \sum_{\nu=\mu}^{\mu'-1} \binom{k}{\nu} \left(\frac{w_1}{w_0}\right)^\nu Z_\nu(\varrho_\nu, \sigma'), \ 1 < \varrho_\nu < \sigma'.$$

Mit Rücksicht auf die in (45b) angeführte Eigenschaft der Funktion Z kann die rechte Seite durch

$$(s_1 - s_2)\, w_0{}^k \sum_{\nu=\mu}^{\mu'-1} \binom{k}{\nu} \left(\frac{w_1}{w_0}\right)^\nu \left[\left(\frac{\sigma'}{\sigma'-1}\right)^\nu \left(\frac{\nu}{\varrho_\nu} - \frac{\nu}{\sigma'}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(\sigma'-1)^\nu} Z_\nu\left(\frac{\varrho_\nu}{\varrho_\nu - 1}, \frac{\sigma'}{\sigma' - 1}\right)\right]$$

ersetzt und mit derjenigen von (49) vereinigt werden zu

$$\begin{aligned}(s_1 - s_2)\, w_0{}^k &\sum_{\nu=0}^{\mu'-1} \binom{k}{\nu} \left(\frac{w_1}{w_0}\frac{\sigma'}{\sigma'-1}\right)^\nu \left(\frac{\nu}{\varrho_\nu} - \frac{\nu}{\sigma'}\right) + \\ &+ (s_1 - s_2)\, w_0{}^k \sum_{\nu=\mu}^{\mu'-1} \binom{k}{\nu} \left(\frac{w_1}{w_0}\right)^\nu (\sigma'-1)^{-\nu} Z_\nu\left(\frac{\varrho_\nu}{\varrho_\nu - 1}, \frac{\sigma'}{\sigma'-1}\right).\end{aligned} \tag{49a}$$

Wird nun in der ersten Zeile Gebrauch von den Definitionen (44) gemacht und

$$\frac{\nu}{\varrho_\nu} - \frac{\nu}{\sigma'} = \frac{ks_0 - \nu\left(s_0 - s_1 + \frac{s_1 - s_2}{\sigma'}\right)}{s_1 - s_2}, \quad \frac{w_1}{w_0}\frac{\sigma'}{\sigma'-1} = \frac{1 - w_0}{w_0}$$

eingetragen, so erlangt sie nach Herausheben von $s_0 - s_1 + \frac{1}{\sigma'}(s_1 - s_2)$ die Gestalt, vgl. (48b),

$$\left(s_0 - s_1 + \frac{s_1 - s_2}{\sigma'}\right) \sum_{\nu=0}^{\mu'-1} \binom{k}{\nu} \left(\frac{1-w_0}{w_0}\right)^\nu \left(\frac{k}{\varrho} - \nu\right),$$

welcher Ausdruck identisch ist mit

$$\varrho s_0 w_0{}^k\, Z_k(\varrho, \sigma) = \frac{\sigma s_0 w_0{}^k \Psi_k(\varrho, \sigma)}{(\sigma - 1)^{\mu'-1}}, \qquad \sigma = \frac{1}{1 - w_0}. \tag{50}$$

Hier liegt der Fall $\varrho > \sigma$ vor, da gemäß der Definition des Überentgeltes $S = -(w_0 s_0 + w_1 s_1 + w_2 s_2)$ sich die Differenz

$$\varrho - \sigma = \frac{s_0 - s_1 + w_2 \dfrac{s_1 - s_2}{1 - w_0}}{s_0} - \frac{1}{1 - w_0} = \frac{S}{s_0 (1 - w_0)}$$

positiv stellt, daher können die Sätze über die Größenordnung (31) der Funktion Ψ Anwendung finden, und die Hauptkonstante β^I des Ausdruckes (50) wird bestimmt durch

$$(\beta^I)^k = \frac{w_0{}^k}{(\sigma - 1)^{\frac{k}{\varrho}}} \frac{\varrho^k}{(\varrho - 1)^{k - \frac{k}{\varrho}}}, \quad \beta^I = \frac{\varrho}{\sigma} \left(\frac{\sigma - 1}{\varrho - 1}\right)^{1 - \frac{1}{\varrho}}. \tag{50a}$$

Bezüglich des zweiten Teiles von (49a) bedarf es des Satzes über die Größenordnung von

$$Z_\lambda \left(\frac{\varrho}{\varrho - 1}, \frac{\sigma}{\sigma - 1}\right) \backsim a' \lambda^{a'} (\sigma - 1)^{\lambda - \mu} \binom{\lambda}{\mu}, \ \varrho < 0, \ \frac{\lambda}{\varrho} = \mu - \delta \tag{51}$$

(vgl. den Anhang) dementsprechend die Hauptdimension von $Z_\nu \left(\frac{\varrho_\nu}{\varrho_\nu - 1}, \frac{\sigma'}{\sigma' - 1}\right)$, jene Dimension, die bei Vernachlässigung der Potenzen von ν gegenüber Exponentialfunktionen mit ν im Exponenten resultiert, gleich $(\sigma - 1)^{\nu - \mu_\nu} \binom{\nu}{\mu_\nu}$ anzusetzen ist, mit μ_ν die ganze Zahl

$$\mu_\nu = \frac{\nu}{\varrho_\nu} + \delta_\nu, \ 0 \leqq \delta_\nu < 1$$

bezeichnet. Der so anstatt des zweiten Teiles von (49a) zu betrachtende Ausdruck

$$w_0{}^k \sum_{\nu=\mu}^{\mu'-1} \binom{k}{\nu} \binom{\nu}{\mu_\nu} \left(\frac{w_1}{w_0}\right)^\nu (\sigma' - 1)^{-\mu_\nu} \tag{51a}$$

läßt sich aber mit dem dritten, auf Werte von ν, welche $\varrho_\nu \geqq \sigma'$ ergeben, bezüglichen Teile von $\widehat{R}$

$$\widehat{R}^{III} = (s_1 - s_2)\, w_0{}^k \sum_{\nu=\mu'}^{m-1} \binom{k}{\nu} \left(\frac{w_1}{w_0}\right)^\nu Z_\nu(\varrho_\nu, \sigma'), \ \varrho_\nu \geqq \sigma'$$

vereinigen, denn zu diesem gehört, wegen $Z_\lambda(\varrho,\sigma) = \frac{1}{(\sigma-1)^{\mu-1}}\Psi_\lambda(\varrho,\sigma)$, die Hauptdimension

$$w_0{}^k \sum_{\nu=\mu'}^{m-1} \binom{k}{\nu} \left(\frac{w_1}{w_0}\right)^\nu \binom{\nu}{\mu_\nu} (\sigma'-1)^{-\mu_\nu}. \tag{51b}$$

Dann bleibt noch als restliche Aufgabe die Untersuchung der Summe von (51*a*) und (51*b*), die sich infolge der Beziehung zwischen μ_ν, k, ν

$$\mu_\nu = \mathfrak{a}k - \mathfrak{b}\nu - \delta_\nu,\quad \mathfrak{a} = \frac{s_0}{s_1 - s_2},\quad \mathfrak{b} = \frac{s_0 - s_1}{s_1 - s_2} \tag{52}$$

in die übersichtlichere Form bringen läßt

$$w_0{}^k (\sigma'-1)^{-\mathfrak{a}k} \sum_{\nu=\mu'}^{m-1} \binom{k}{\nu} \binom{\nu}{\mathfrak{a}k - \mathfrak{b}\nu - \delta_\nu} \xi^\nu,\quad \xi = \frac{w_1}{w_0}(\sigma'-1)^{\mathfrak{b}}. \tag{52a}$$

Mithilfe der Stirling'schen Näherung für die Binomialkoeffizienten ist die Größenordnung der einzelnen Summanden $\binom{k}{\nu}\binom{\nu}{\mathfrak{a}k - \mathfrak{b}\nu - \delta_\nu}\xi^\nu$ sofort anzugeben

$$\xi^\nu \left[\frac{k}{\nu}\left(\frac{k}{\nu}-1\right)^{\frac{\nu}{k}-1}\right]^k \left[\frac{\nu}{\mathfrak{a}k - \mathfrak{b}\nu}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{a}k - \mathfrak{b}\nu}-1\right)^{\frac{\mathfrak{a}k-\mathfrak{b}\nu}{\nu}-1}\right]^\nu \tag{53}$$

wieder unter Vernachlässigung der Potenzen von k oder ν gegenüber Exponentialfunktionen mit k oder ν als Exponenten. Es muß nun jener Betrag von $\nu = tk$ gefunden werden, für den der angenäherte Wert (53) resp. dessen k-te Wurzel

$$\frac{\xi^t}{(1-t)^{1-t}} \frac{(t+\mathfrak{b}t-\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}-t-\mathfrak{b}t}}{(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}t)^{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}t}},\quad t+\mathfrak{b}t > \mathfrak{a} > \mathfrak{b}t \tag{53a}$$

(bei stetig zwischen 0 und 1 variierendem t) **das Maximum erreicht.** Die Differentiation dieses Ausdruckes oder einfacher von dessen Logarithmus

$$t\lg\xi - (1-t)\lg(1-t) + (\mathfrak{a}-t-\mathfrak{b}t)\lg(t+\mathfrak{b}t-\mathfrak{a}) - \\ -(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}t)\lg(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}t)$$

bezüglich t gibt durch Nullsetzung des Differentialquotienten

$$0 = \lg\xi + \lg(1-t) + \mathfrak{b}\lg(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}t) - (1+\mathfrak{b})\lg(t+\mathfrak{b}t-\mathfrak{a}) \tag{54}$$

die nach t aufzulösende Gleichung. Ihre rechte Seite hat aber die bezüglich t genommene Ableitung

$$-\left[\frac{1}{1-t} + \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}t} + \frac{(1+\mathfrak{b})^2}{t+\mathfrak{b}t-\mathfrak{a}}\right],$$

nimmt also mit wachsendem t ab, daher existiert, wenn überhaupt, nur eine Lösung von (54) und, was auf dasselbe hinauskommt, von

$$0 = \mathfrak{f}(t) = \xi - \frac{(t + \mathfrak{b}t - \mathfrak{a})^{1+\mathfrak{b}}}{(1 - t)(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}t)^{\mathfrak{b}}}. \tag{54a}$$

Dann findet man die zur Summe (52*a*) gehörige Hauptkonstante β^{II} durch Multiplikation des Faktors $w_0 (\sigma' - 1)^{-\mathfrak{a}}$ mit dem Maximum von (53*a*)

$$\frac{w_0 (\sigma' - 1)^{-\mathfrak{a}} \xi^t (t + \mathfrak{b}t - \mathfrak{a})^{\mathfrak{a} - t - \mathfrak{b}t}}{(1 - t)^{1-t} (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}t)^{\mathfrak{a} - \mathfrak{b}t}}, \quad \mathfrak{f}(t) = 0,$$

welchen Wert die Entnahme von $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}t$ aus (54*a*)

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{b}t = (t + \mathfrak{b}t - \mathfrak{a}) \left[\frac{t + \mathfrak{b}t - \mathfrak{a}}{(1 - t)\,\xi}\right]^{\frac{1}{\mathfrak{b}}}$$

und Einsetzung von $\xi = (\sigma' - 1)^{\mathfrak{b}} \dfrac{w_1}{w_0}$ überführt in

$$\beta^{II} = \frac{w_0}{1 - t} \left(\frac{w_1}{w_0} \frac{1 - t}{t + \mathfrak{b}t - \mathfrak{a}}\right)^{\frac{x}{\mathfrak{b}}}, \quad \mathfrak{f}(t) = 0, \tag{55}$$

Im Äquivalenzfalle $S = -(w_0 s_0 + w_1 s_1 + w_2 s_2) = 0$ ist die Wurzel von (54*a*) gleich $1 - w_0$, wie die Identitäten

$$(1 + \mathfrak{b})(1 - w_0) - \mathfrak{a} = w_1 + \frac{S}{s_1 - s_2},$$

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{b}(1 - w_0) = w_2 - \frac{S}{s_1 - s_2}$$

zeigen, und β^{II} nimmt den Wert 1 an. Für $S > 0$, wenn keine Äquivalenz besteht, wird das eigentlich a priori feststehende Resultat $\beta^{II} < 1$ unschwer auch analytisch bewiesen, hier entscheidet die größere der beiden Hauptkonstanten β^{I}, β^{II} (wahrscheinlicherweise β^{II}) über die Größenordnung des kombinierten Risiko's.

Zweifellos würde durch Parallelsetzung irgend eines vorgelegten Zufallsvertrages mit einem solchen, der von zwei Wahrscheinlichkeiten abhängt, die Genauigkeit des in Abschnitt V besprochenen Näherungsverfahrens erhöht werden.

VII. Das kombinierte Risiko verschiedenartiger Zufallsverträge.

Für das kombinierte Risiko $\hat{R}$ einer großen Zahl irgendwelcher Zufallsverträge, welche auf dem Äquivalenzprinzip basieren, gilt, wenn $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots$ die mittleren Risiko's der einzelnen Verträge bedeuten, der bekannte Satz (2)

$$\hat{R} \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi} (\mathfrak{R}_1^2 + \mathfrak{R}_2^2 + \ldots)}$$

und die einfachste Art der Generalisierung für den Fall, daß k Verträge, die sämtlich oder zumteil nichtäquivalent sind, zur Betrachtung vorliegen, wäre wohl die, eine obere Grenze für den ohnehin mit Anwachsen von k beliebig klein werdenden Betrag von $\hat{R}$ anzugeben

$$\hat{R} < \beta^k \sqrt{\frac{1}{2\pi}(\mathfrak{R}_1^2 + \mathfrak{R}_2^2 + \ldots} < \beta^k \sqrt{\frac{1}{2\pi}(T_1^2 + T_2^2 + \ldots)}, \beta < 1, \tag{56}$$

derart daß die Konstante β im Spezialfall von lauter gleichartigen Verträgen denselben Wert wie in der früher bewiesenen Formel $\hat{R} < < \mathfrak{c} k^{a-\frac{1}{2}} \beta^k T$ annimmt.

Zunächst wäre für diese Aufgabe eine Durchschnittsrechnung zu bewerkstelligen, wofern die vorgelegten Verträge sich auf Gruppen verteilen, deren jede aus einer großen Zahl von untereinand gleichartigen Verträgen besteht. Denn die gesuchte Hauptkonstante β wird voraussichtlich einen Mittelwert aus den β_i der einzelnen Verträge repräsentieren und es handelt sich darum, in der Formel (34)

$$\beta = \frac{1 + \gamma\vartheta}{1 + \varepsilon} (1 + \vartheta)^{\frac{1+\vartheta}{1+\gamma\vartheta}\left(\frac{\varepsilon}{\vartheta} - \gamma\right)} \tag{56a}$$

geeignete Mittelwerte für ε, ϑ, γ aus den entsprechenden Konstanten der einzelnen Verträge zu bilden.

Eine der möglichen Arten der Durchschnittsrechnung ist die folgende: Die Hoffnungswerte der einzelnen Verträge seien $U_1, U_2, \ldots$, die Überentgelte $S_1, S_2, \ldots$, die Gauß'schen Ausdrücke $T_1, T_2, \ldots$, dann kommt der Vertragskombination jedenfalls das relative Überentgelt $\varepsilon = \Sigma S_i / \Sigma U_i$ zu, während aus den angenäherten Sicherheitskoeffizienten der einzelnen Verträge, vgl. (37b),

$$\Theta_i = \frac{S_i}{R_i^*}, \quad R_i^* = U_i \frac{T_i^2 - S_i^2 - S_i U_i}{T_i^2 - S_i^2 + U_i^2}$$

am einfachsten ein arithmetischer (nicht aber wahrscheinlichkeitstheoretischer) Mittelwert gebildet wird

$$\Theta = \frac{\Sigma S_i}{\Sigma R_i^*} \text{ oder eventuell } \Theta = \frac{\sqrt{\Sigma S_i^2}}{\sqrt{\Sigma R_i^{*2}}}, \tag{57}$$

der alsdann in Verbindung mit ε die Hauptkonstante entsprechend (56a) bei $\gamma = 1$ liefert

$$\beta = \frac{1}{1 + \varepsilon} (1 + \Theta)^{\varepsilon/\Theta}. \tag{57a}$$

(Für Verträge, die nur von einer Wahrscheinlichkeit abhängen, ist R_i^* mit dem durchschnittlichen Risiko des Vertrages identisch.)

Bei Unterteilung jedes der Hoffnungswerte U_i in einen solchen für den Eintreffens- und Nichteintreffensfall, der erstere gleich $\gamma_i U_i$, der letztere gleich $(1-\gamma_i)\,U_i$ angesetzt, ist die quadratische Gleichung (39a)

$$0=(T_i^2-S_i^2+U_i^2)\,\mathfrak{w}_i^2-(T_i^2-S_i^2+2\gamma_i U_i^2)\,\mathfrak{w}_i+\gamma_i^2 U^2 \qquad (58)$$

aufzulösen und, jenach $\gamma_i>\frac{1}{2}$ oder $\gamma_i<\frac{1}{2}$, die kleinere Wurzel $\mathfrak{w}_i$ oder die größere $\overline{\mathfrak{w}}_i$ zu wählen, um den Sicherheitskoeffizienten Θ_i des Vertrages zu bestimmen

$$\Theta_i=S_i/R_i^*,\quad R_i^*=U_i\,(\gamma_i-\mathfrak{w}_i)-S_i\mathfrak{w}_i \text{ bei } \gamma_i>\tfrac{1}{2}$$

$$R_i^*=U_i\,(\overline{\mathfrak{w}}_i-\gamma_i)-S_i\,(1-\overline{\mathfrak{w}}_i) \text{ bei } \gamma_i<\tfrac{1}{2}. \qquad (59)$$

Einen mittleren Sicherheitskoeffizienten Θ findet man wieder nach (57), aber die Berechnung der Hauptkonstanten (56a) erfordert noch für die dort auftretende Größe γ die Verwendung eines Mittelwertes aus den γ_i der einzelnen Verträge

$$\gamma=\frac{\Sigma\gamma_i^* U_i}{\Sigma U_i},\quad \gamma_i^*=\gamma_i \text{ oder } 1-\gamma_i \text{ jenach } \gamma_i>\tfrac{1}{2} \text{ oder } \gamma_i<\tfrac{1}{2}. \qquad (59a)$$

Bei einer anderen Art der Durchschnittsrechnung wäre von den Werten $R_i S_i T_i \gamma_i$ der einzelnen Verträge auszugehen und für jene Verträge, die nicht von einer einzigen Wahrscheinlichkeit abhängen, die entsprechenden Hoffnungswerte $\mathfrak{U}_i$ gemäß (43) zu rechnen, dann bietet der Betrag $\varepsilon=\Sigma S_i/\Sigma\mathfrak{U}_i$ einen geeigneten Mittelwert für das relative Überentgelt der Vertragskombination (Für Verträge einfachster Art wird $\mathfrak{U}_i$ mit U_i identisch.) Anderseits ist als durchschnittlicher Sicherheitskoeffizient, analog (57),

$$\vartheta=\frac{\Sigma S_i}{\Sigma R_i^*} \text{ oder auch } \vartheta=\frac{\sqrt{\Sigma S_i^2}}{\sqrt{\Sigma R_i^2}}$$

zu nehmen, endlich für γ der Durchschnitt

$$\gamma=\frac{\Sigma\gamma_i^*\,\mathfrak{U}_i}{\Sigma\,\mathfrak{U}_i}\left\{\begin{array}{l}\gamma_i^*=\gamma_i \text{ für } R_i=\mathfrak{U}_i\,(\gamma_i-\mathfrak{w}_i)-S_i\,\mathfrak{w}_i\\ \gamma_i^*=1-\gamma_i \text{ für } R_i=\mathfrak{U}_i\,(\mathfrak{w}_i-\gamma_i)-S_i\,(1-\mathfrak{w}_i).\end{array}\right.$$

(Fortsetzung folgt.)

Sur les précisions comparées de la moyenne et de la médiane.

Par *Maurice Fréchet* (Université de Paris).

Dans bien des cas, la valeur moyenne est à préférer à la médiane comme valeur typique d'un ensemble de valeurs. Mais il n'en est pas toujours ainsi: dans d'autres cas, la médiane fournit une valeur plus représentative (vie médiane, revenu médian) ou plus facile à déterminer numériquement.

Cependant certains statisticiens opposent cette objection au choix de la médiane, que sa précision serait moindre. Nous voulons montrer