Aktuárské vědy

Hans Koeppler

Das zweiändrige Wahrscheinlichkeitsgesetz der Abweichungen der Prämienreserve eines Bestandes von Versicherungen mit verschiedenen Auflösungsmöglichkeiten. I

Aktuárské vědy, Vol. 4 (1933), No. 3, 124–134

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144605

and substitute

$$Q_0 = h - 1$$

we have

$$Q_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2h} \\ 2r-1 \end{bmatrix} + Q_4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2h} \\ 2r-3 \end{bmatrix} + \ldots + Q_{2r} \begin{bmatrix} \frac{1}{2h} \\ 1 \end{bmatrix} = 2hr \begin{bmatrix} \frac{1}{2h} \\ 2r+1 \end{bmatrix}.$$

Also this formula we find in Steffensen's book deduced by other way.

Das zweiändrige Wahrscheinlichkeitsgesetz der Abweichungen der Prämienreserve eines Bestandes von Versicherungen mit verschiedenen Auflösungsmöglichkeiten.

Von *Hans Koeppler*, Berlin.

Die folgenden Betrachtungen betreffen Versicherungen, deren einmalige Prämie nach der Formel

$$\mathfrak{A}_{x\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{t=n} {}_{t-1|}p_x^{(1)}\, v^t S_t^{(1)} + \sum_{t=1}^{t=n} {}_{t-1|}p_x^{(2)}\, v^t S_t^{(2)} + {}_n p_x^{(3)}\, v^n S_n^{(3)}$$

berechnet wird. $S_t^{(1)}$, $S_t^{(2)}$, $S_n^{(3)}$ bedeuten die versicherten Summen, von denen die mit $S_t^{(2)}$ bezeichneten Summen fortfallen, wenn der Versicherungsschutz nicht so umfangreich gewährt wird. Die Summe der in der einmaligen Prämie vorkommenden Wahrscheinlichkeiten muß der Bedingung

$$\sum_{t=1}^{t=n} {}_{t-1|}p_x^{(1)} + \sum_{t=1}^{t=n} {}_{t-1|}p_x^{(2)} + {}_n p_x^{(3)} = 1$$

genügen. Es sei noch bemerkt, daß ${}_n p_x^{(3)}$ die Wahrscheinlichkeit ist, den Ablauf der Versicherung zu erleben, ohne von einem der zu befürchtenden Ereignisse betroffen worden zu sein. Die jährliche Prämie wird nach der einfachen Formel

$$P_{x\overline{n}|} = \frac{\mathfrak{A}_{x\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}}$$

berechnet, in welcher

$$a_{x\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{t=n-1} {}_t p_x^{(3)}\, v^t$$

den Barwert der pränumerando zahlbaren Beharrungsrente bedeutet.

Setzt man

$$ {}_t p_x^{(3)} = \sum_{k=t}^{k=n-1} ({}_{k|}p_x^{(1)} + {}_{k|}p_x^{(2)}) + {}_n p_x^{(3)}, $$

so läßt sich der Rentenbarwert auf die bei Risikoberechnungen benötigte Form

$$ a_{x\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{t=n} ({}_{t-1|}p_x^{(1)} + {}_{t-1|}p_x^{(2)})\, a_{\overline{t}|} + {}_n p_x^{(3)}\, a_{\overline{n}|} $$

bringen, in welcher $a_{\overline{t}|}$ den Barwert der pränumerando zahlbaren Zeitrente von t-jähriger Dauer bedeutet.

Zur Abkürzung werde im Verlauf der Darstellung

$$ {}_{t-1|}p^{(1)}_{(x+k)_\lambda} = p^{(1)}_{(t-1|\lambda)},\ {}_{t-1|}p^{(2)}_{(x+k)_\lambda} = p^{(2)}_{(t-1,\lambda)},\ {}_{(n-k)_\lambda}p^{(3)}_{(x+k)_\lambda} = p^{(3)}_{\nu_\lambda}, $$

$$ (n-k)_\lambda = \nu_\lambda $$

gesetzt, wobei λ der Hinweis auf die λ-te Versicherung ist.

Das rechnungsmäßige Deckungskapital eines Bestandes von s von einander unterschiedenen Versicherungen wird durch die Formel

$$ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} V_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} (\mathfrak{A}_{(x+k)_\lambda} - P_{x_\lambda}\, a_{(x+k)_\lambda}) $$

dargestellt.

Führt man für die Summe der einmaligen Prämien, die der unbekannten Gebahrung der künftigen Ereignisse entsprechen mögen, die Bezeichnung ein

$$ \mathfrak{K}_1 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \mathfrak{A}_{(x+k)_\lambda} + u $$

und wählt für die Summe der Barwerte der noch nicht fällig gewordenen Jahresprämien unter den gleichen Voraussetzungen den Ausdruck

$$ \mathfrak{K}_2 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} P_{x_\lambda}\, a_{(x+k)_\lambda} + v, $$

dann erhält man für das Deckungskapital, das den tatsächlichen Verlauf der Ereignisse berücksichtigt, die Gleichung

$$ \mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_2 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} V_\lambda + (u - v). $$

Bedient man sich hierauf noch der Gleichung

$$ \mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_2 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} V_\lambda + \Delta, $$

in welcher Δ die Gesamtabweichung von der rechnungsmäßigen Prämienreserve darstellt, so folgt

$$\Delta = u - v. \tag{I}$$

Diese Gleichung stellt die Abweichung der Prämienreserve als eine Funktion zweier Variablen dar. Die Darstellung des gemeinsamen Gesetzes der Funktionen u und v, mit der wir uns beschäftigen wollen, gilt auch für den Fall, daß noch gar keine Prämienreserve angesammelt ist.

1. Ehe wir jedoch zur Herleitung dieses Gesetzes schreiten, wollen wir das mittlere Quadrat aller Abweichungen Δ auf elementarem Wege zu bestimmen versuchen. Zu diesem Zweck bilden wir für s von einander unterschiedene Versicherungen die generierende Funktion

$$Y = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} Z_\lambda = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s}\left(\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)}\, e^{a^{(1)}_{(t,\lambda)}xi - b^{(1)}_{(t,\lambda)}yi} + \right.$$

$$\left. + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)}\, e^{a^{(2)}_{(t,\lambda)}xi - b^{(2)}_{(t,\lambda)}yi} + p^{(3)}_{\nu_\lambda} e^{a^{(3)}_{\nu_\lambda} xi - b^{(3)}_{\nu_\lambda} yi}\right), \tag{I}$$

in welcher zur Abkürzung

$$v^t S^{(1)}_{k_\lambda+t} = a^{(1)}_{(t,\lambda)}, \qquad v^t S^{(2)}_{k_\lambda+t} = a^{(2)}_{(t,\lambda)}, \qquad v^{\nu_\lambda} S^{(3)}_{n_\lambda} = a^{(3)}_{\nu_\lambda}$$

$$P_{x_\lambda} a_{\overline{t|}} = b^{(1)}_{(t,\lambda)}, \qquad P_{x_\lambda} a_{\overline{t|}} = b^{(2)}_{(t,\lambda)}, \qquad P_{x_\lambda} a_{\overline{\nu_\lambda|}} = b^{(3)}_{\nu_\lambda}$$

gesetzt ist. Der Buchstabe λ ist wieder zur Erkennung der λ-ten der s Versicherungen gesetzt. Man kann diese generierende Funktion nach Poisson auch in die Reihe

$$Y = \Sigma\Sigma\, P_{(\mathfrak{K}_1, -\mathfrak{K}_2)}\, e^{\mathfrak{K}_1 xi - \mathfrak{K}_2 yi} \tag{II}$$

entwickeln, in welcher

die Summen $\mathfrak{K}_1$ sich nur aus den a-Größen
" " $\mathfrak{K}_2$ " " " " b- "

zusammensetzen. Man berechne nun aus den Gleichungen (I) und (II) die ersten und zweiten Differentialquotienten nach x und y und gehe sodann zu deren Grenzwerten für $x = y = 0$ über.

Aus der Gleichung (I) erhält man, da $(Z_\lambda)_{\substack{x=0\\y=0}} = 1$ ist,

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \frac{\partial Z_\lambda}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \mathfrak{A}_{(x+k)_\lambda} \,.\, i = Ai,$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \frac{\partial Z_\lambda}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} P_{x_\lambda}\, a_{(x+k)_\lambda} \,.\, i = -Bi,$$

$$\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \frac{\partial Z_\lambda}{\partial x}\right)^2_{\substack{x=0\\y=0}} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s}\left[\frac{\partial^2 Z_\lambda}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial Z_\lambda}{\partial x}\right)^2\right]_{\substack{x=0\\y=0}} =$$

$$= -\left\{\left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \mathfrak{A}_{(x+k)_\lambda}\right)^2 + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s}\left[\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)} \quad (a^{(1)}_{(t,\lambda)})^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)} \cdot (a^{(2)}_{(t,\lambda)})^2 + r^{(3)}_{\nu_\lambda} (a^{(3)}_{\nu_\lambda})^2\right] - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} (\mathfrak{A}_{(x+k)_\lambda})^2\right\} = -C,$$

$$\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \frac{\partial Z_\lambda}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s}\left[\frac{\partial^2 Z_\lambda}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial Z_\lambda}{\partial y}\right)^2\right]_{\substack{x=0\\y=0}} =$$

$$= -\left\{\left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} P_{x_\lambda}\, \mathfrak{a}_{(x+k)_\lambda}\right)^2 + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s}\left[\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)} \quad (b^{(1)}_{(t,\lambda)})^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)} \quad (b^{(2)}_{(t,\lambda)})^2 + r^{(3)}_{\nu_\lambda} (b^{(3)}_{\nu_\lambda})^2\right] - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} (P_{x_\lambda} \cdot \mathfrak{a}_{(x+k)_\lambda})^2\right\} = -D,$$

$$\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \frac{\partial Z_\lambda}{\partial x} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \frac{\partial Z_\lambda}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s}\left[\frac{\partial^2 Z_\lambda}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Z_\lambda}{\partial x}\frac{\partial Z_\lambda}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \left\{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \mathfrak{A}_{(x+k)_\lambda} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} P_{x_\lambda}\, \mathfrak{a}_{(x+k)_\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s}\left[\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)} a^{(1)}_{(t,\lambda)} b^{(1)}_{(t,\lambda)} + \right.\right.$$

$$\left. + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)} a^{(2)}_{(t,\lambda)} b^{(2)}_{(t,\lambda)} + r^{(3)}_{\nu_\lambda} a^{(3)}_{\nu_\lambda} b^{(3)}_{\nu_\lambda}\right] -$$

$$\left. - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \mathfrak{A}_{(x+k)_\lambda} P_{x_\lambda}\, \mathfrak{a}_{(x+k)_\lambda}\right\} = E.$$

Die Gleichung (II) liefert uns die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \Sigma\Sigma P_{(\mathfrak{K}_1, -\mathfrak{K}_2)}\, \mathfrak{K}_1 i = A\,.\, i,$$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = -\Sigma\Sigma P_{(\mathfrak{K}_1, -\mathfrak{K}_2)}\, \mathfrak{K}_2 i = -Bi,$$

$$\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = -\Sigma\Sigma P_{(\mathfrak{K}_1, -\mathfrak{K}_2)}\, \mathfrak{K}_1{}^2 = -C,$$

$$\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = -\Sigma\Sigma P_{(\mathfrak{K}_1,-\mathfrak{K}_2)}\,\mathfrak{K}_2{}^2 = -D,$$

$$\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \Sigma\Sigma P_{(\mathfrak{K}_1,-\mathfrak{K}_2)}\,\mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2 = E$$

und ferner auch die Grundgleichung

$$\Sigma\Sigma P_{(\mathfrak{K}_1,-\mathfrak{K}_2)} = (Y)_{\substack{x=0\\y=0}} = 1.$$

Der mittlere Wert der Quadrate aller nur möglichen Abweichungen von der Summe der rechnungsmäßigen Prämienreserven wird durch den Ausdruck

$$\mathfrak{M}^2 = \Sigma\Sigma P_{(\mathfrak{K}_1,-\mathfrak{K}_2)}\left(\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}_2 - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} V_\lambda\right)^2$$

dargestellt, in welchem zur Abkürzung die Reserve der λ-ten Versicherung mit V_λ bezeichnet wird. Löst man die Quadrate auf und führt für die einzelnen Summen die entsprechenden, im Vorstehenden mitgeteilten Werte ein, so erhält man nach einigen zweckmäßigen Zusammenfassungen

$$\mathfrak{M}^2 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s}\left[\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)}\,(a^{(1)}_{(t,\lambda)} - b^{(1)}_{(t,\lambda)})^2 + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)}\,(a^{(2)}_{(t,\lambda)} - b^{(2)}_{(t,\lambda)})^2 + \right.$$
$$\left. + p^{(3)}_{\nu_\lambda}\,(a^{(3)}_{\nu_\lambda} - b^{(3)}_{\nu_\lambda})^2 - V_\lambda{}^2\right].$$

Eine weitere Umformung zeigt, daß das mittlere Quadrat aller Abweichungen von der Summe der rechnungsmäßigen Reserven gleich ist dem Quadrat des mittleren ferneren Risikos.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß die vorgeführte Berechnung als eine Verallgemeinerung der von Timerding[1]) und von Gruder[2]) gezeigten Berechnungen anzusehen ist.

2. Man kann nun auch aus der Summe aller Wahrscheinlichkeiten

$$\Sigma\Sigma P_{(\mathfrak{K}_1,-\mathfrak{K}_2)} = 1$$

die Wahrscheinlichkeit $P(u, v)\,du\,dv$ der Abweichungen zwischen u und $u + du$ sowie zwischen v und $v + dv$ herleiten, wenn man diese Summe mit dem erweiterten Besselschen Diskontinuitätsfaktor

$$\varepsilon = \frac{du\,dv}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\mathfrak{K}_1 - A - u)xi - (\mathfrak{K}_2 - B - v)yi}\,dx\,dy$$

[1]) Analyse des Zufall, Braunschweig 1915, Das Urnenschema.

[2]) Theorie des Risikos. Transactions of the ninth international Congress of Actuaries, Vol. II, Stockholm 1930.

multipliziert, welcher den Wert 1 annimmt, wenn $A + u < \mathfrak{K}_1 < A + u + du$ und $B + v < \mathfrak{K}_2 < B + v + dv$ ist. Hebt man auf beiden Seiten $du\,dv$, so ergibt sich der dem Fourierschen Integral für eine Funktion zweier Variablen sehr ähnliche Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit $P(u, v)$ der Abweichungen u und v

$$P(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-[(A+u)x-(B+v)y]i}\left(\Sigma\Sigma P_{(\mathfrak{K}_1,-\mathfrak{K}_2)} e^{(\mathfrak{K}_1 x-\mathfrak{K}_2 y)i}\right) dx\,dy. \tag{III}$$

Setzt man hierin für die Exponentialfunktion $e^{\mathfrak{K}_1 xi-\mathfrak{K}_2 yi}$ die hinter den zweiten Potenzen von x und y und dem Produkte xy abgebrochene Reihe

$$1 + \mathfrak{K}_1 xi - \mathfrak{K}_2 yi - \tfrac{1}{2}\mathfrak{K}_1{}^2 x^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{K}_2{}^2 y^2 + \mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2 xy$$

und summiert nach $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, so bekommt man den Näherungswert

$$\Sigma\Sigma P_{(\mathfrak{K}_1,-\mathfrak{K}_2)} e^{(\mathfrak{K}_1 x-\mathfrak{K}_2 y)i} = 1 + Axi - Byi - \tfrac{1}{2}\,(Cx^2 - 2Exy + Dy^2).$$

Diesen kann man nach der Formel $a = e^{\ln a}$ als Exponentialausdruck schreiben. Entwickelt man darauf den natürlichen Logarithmus bis einschließlich der zweiten Potenzen und des Produkts von x und y, so erhält man nach kleiner Umformung die Näherungsgleichung

$$\Sigma\Sigma P_{(\mathfrak{K}_1,-\mathfrak{K}_2)}\, e^{(\mathfrak{K}_1 x-\mathfrak{K}_2 y)i} = e^{Axi-Byi-\frac{1}{2}[(C-A^2)x^2-2(E-AB)xy+(D-B^2)y^2]}.$$

Die Anwendung dieser auf den Ausdruck für $P(u, v)$ wandelt den letzteren in den Näherungsausdruck

$$P(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(C_{11}x^2+2C_{12}xy+C_{22}y^2)-(ux-vy)i}\,dx\,dy \tag{IV}$$

um, wenn man zur Vereinfachung vorläufig noch

$$C_{11} = C - A^2,\quad C_{12} = -(E - AB),\quad C_{22} = D - B^2$$

setzt, obwohl man aus den vorhergehenden Berechnungen schon die Werte C_{11}, C_{12}, C_{22} kennt. Auf die Berechnung dieses Integralausdrucks kommen wir später noch zurück.

3. Durch Anwendung der Laplaceschen Methode gelingt es verhältnismäßig schnell, das Wahrscheinlichkeitsgesetz $P(u, v)$ darzustellen. Dieses Wahrscheinlichkeitsgesetz läßt sich aus dem Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsausdruck für zwei Variable

$$P(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} Y e^{-\left[\left(\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=s}\mathfrak{A}_{(x+k)_\lambda}+u\right)xi-\left(\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=s} Px_\lambda\mathfrak{a}_{(x+k)_\lambda}+v\right)yi\right]} dx\,dy \tag{V}$$

herleiten, falls man für die erzeugende Funktion Y die schon früher angegebene Form

$$Y = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} Z_\lambda$$

setzt. Generierende Funktionen verwandter Form treten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der mathematischen Statistik nur recht selten auf. Liest man die Darstellung, welche Markoff,[3]) in dem „Von der Summe unabhängiger Vektoren" handelnden Paragraphen 33 gibt, so bemerkt man im Verlauf der Berechnungen die Größe Ω, welche einer generierenden Funktion dieser Art entsprechen würde. Unter der Voraussetzung kontinuierlicher Veränderlichkeit der Wahrscheinlichkeiten gibt diese generierende Funktion auch C. V. L. Charlier in seiner Abhandlung „Contributions to the mathematical theory of statistics", 6. The Correlation function of type A.[4]) Das Vorbild zu dieser generierenden Funktion findet man aber auch schon bei Laplace auf pag. 323.[5]) Eine einfachere Form dieser generierenden Funktion ist auch die „Fonction caractéristique", die Darmois[6]) in dem dem „Cas général de la dépéndance stochastique de deux variables" gewidmeten Kapitel VII (Abschnitt 6) bespricht.

Denkt man sich die erzeugende Funktion in eine nach den Exponenten der e-Koeffizienten geordnete Reihe entwickelt, so wird der Nachweis der Richtigkeit vermöge der Doppelintegrale

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm axi \pm byi}\, dx\, dy = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, dy = (2\pi)^2$$

geführt. Behufs Darstellung der Wahrscheinlichkeit $P(u, v)$ in exponentialer Form wandele man die Erzeugende Y in einen Näherungsausdruck für $e^{\ln Y}$ um, indem man nach der Maclaurinschen Reihenentwicklung für $\ln Y$ die bis zur 2ten Potenz der Variablen und ihrem Produkt genaue Näherungsfunktion

$$\ln Y_{(x,\,y)} = (\ln Y)_{\substack{x=0\\y=0}} + x\left(\frac{\partial \ln Y}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + y\left(\frac{\partial \ln Y}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left[x^2\left(\frac{\partial^2 \ln Y}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + 2xy\left(\frac{\partial^2 \ln Y}{\partial x\,\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + y^2\left(\frac{\partial^2 \ln Y}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}\right]$$

setzt. Da $(\ln Y)_{\substack{x=0\\y=0}} = \ln 1 = 0$, und da die Vorzeichen der zweiten Differentialquotienten mit Rücksicht auf den entstehenden Faktor $i^2 = -1$ als negativ angenommen werden können, werde zur weiteren

---

[3]) A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig und Berlin 1912, pag. 175.
[4]) Arkiv für Matematik, Astronomi och Fysik, Band 9, No: 26.
[5]) Théorie analytique des probabilités, Seconde Édition, Paris 1814.
[6]) G. Darmois, Statistique mathématique, Paris 1928, pag. 189.

Vereinfachung

$$\ln Y_{(x,y)} = \left(\frac{\partial \ln Y}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} x + \left(\frac{\partial \ln Y}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} y - \tfrac{1}{2}\left(C_{11}x^2 + 2C_{12}xy + C_{22}y^2\right)$$

gesetzt. Da $\ln Y = \sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=s} \ln Z_\lambda$, so gelangt man schnell zu den beiden Grenzwerten der partiellen Differentialquotienten nach x und y. Diese haben, da $(Z_\lambda)_{\substack{y=0\\x=0}} = 1$, die Werte

$$\left(\frac{\partial \ln Y}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \frac{\partial Z_\lambda}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \mathfrak{A}_{(x+k)_\lambda} \cdot i = Ai,$$

$$\left(\frac{\partial \ln Y}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \frac{\partial Z_\lambda}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} P_{x_\lambda}\, a_{(x+k)_\lambda} \cdot i = -Bi.$$

Es folgt daher, wenn man die Integralgrenzen in der üblichen Weise bis $-\infty$ und $+\infty$ ausdehnt, wieder

$$P(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(C_{11}x^2 + 2C_{12}xy + C_{22}y_2) - (ux - vy)i}\, dx\, dy. \tag{IV}$$

Dieser Ausdruck läßt sich aber, wie es Markoff (s. a. a. O., pag. 176) offenbar meint, auf die Form

$$P(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^2 C_{22}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{A}{2C_{22}}y^2 - \frac{C_{22}u + C_{12}v}{C_{22}} yi}\, dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2C_{22}}t^2 + \frac{v}{C_{22}} ti}\, dt$$

$$(A = C_{11}C_{22} - C_{12}{}^2)$$

bringen. Wendet man nun auf die beiden Integrale die bekannte Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 \pm bxi}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

an, so folgt nach einfacher Umformung

$$P(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{A}} e^{-\frac{C_{22}u^2 + 2C_{12}uv + C_{11}v^2}{2A}}. \tag{VI}$$

Diese Funktion ist das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Einzelabweichungen u und v, das die Form des „Fehlergesetzes in der Ebene" besitzt.

4. Von Interesse ist wohl auch die Umformung des Laplace-Poissonschen Wahrscheinlichkeitsausdrucks $P(u, v)$ nach dem Prinzip von Poisson. Es soll hier ein vereinfachtes Verfahren gezeigt werden, das der

Verfasser für den Fall einer Urvariablen bereits in einem anderen Aufsatz[6]) gezeigt hat.

Ist wiederum $Y = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} Z_\lambda$, so entwickele man dieses Mal Z_λ nach dem Maclaurinschen Satz in die hinter den zweiten Potenzen von x und y und dem Produkt xy abgebrochene Reihe

$$Z_\lambda = (Z_\lambda)_{\substack{x=0\\y=0}} + x\left(\frac{\partial Z_\lambda}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + y\left(\frac{\partial Z_\lambda}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + \\ + \frac{1}{2}\left[x^2\left(\frac{\partial^2 Z_\lambda}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + 2xy\left(\frac{\partial^2 Z_\lambda}{\partial x\,\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + y^2\left(\frac{\partial^2 Z_\lambda}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}\right],$$

in welcher ist:

$$(Z_\lambda)_{\substack{x=0\\y=0}} = 1,$$

$$\left(\frac{\partial Z_\lambda}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \left(\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)}\, a^{(1)}_{(t,\lambda)} + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)}\, a^{(2)}_{(t,\lambda)} + p^{(3)}_{\nu_\lambda}\, a^{(3)}_{\nu_\lambda}\right) i = A_\lambda \,.\, i,$$

$$\left(\frac{\partial Z_\lambda}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = -\left(\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)}\, b^{(1)}_{(t,\lambda)} + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)}\, b^{(2)}_{(t,\lambda)} + p^{(3)}_{\nu_\lambda}\, b^{(3)}_{\nu_\lambda}\right) i = - B_\lambda \,.\, i$$

$$\left(\frac{\partial^2 Z_\lambda}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = -\left(\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)}\, (a^{(1)}_{(t,\lambda)})^2 + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)}\, (a^{(2)}_{(t,\lambda)})^2 + \right. \\ \left. + p^{(3)}_{\nu_\lambda}\, (a^{(3)}_{\nu_\lambda})^2\right) = - C_\lambda$$

$$\left(\frac{\partial^2 Z_\lambda}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = -\left(\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)}(b^{(1)}_{(t,\lambda)})^2 + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)}\, (b^{(2)}_{(t,\lambda)})^2 + \right. \\ \left. + p^{(3)}_{\nu_\nu}\, (b^{(3)}_{\nu_\lambda})^2\right) = - D_\lambda$$

$$\left(\frac{\partial^2 Z_\lambda}{\partial x\,\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \left(\sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(1)}_{(t-1,\lambda)}\, a^{(1)}_{(t,\lambda)}\, b^{(1)}_{(t,\lambda)} + \sum_{t=1}^{t=\nu_\lambda} p^{(2)}_{(t-1,\lambda)}\, a^{(2)}_{(t,\lambda)}\, b^{(2)}_{(t,\lambda)} + \right. \\ \left. + p^{(3)}_{\nu_\lambda}\, a^{(3)}_{\nu_\lambda}\, b^{(3)}_{\nu_\lambda}\right) = E_\lambda.$$

[6]) Zur Berechnung des Risikos der ferneren Dauer von kontinuierlich berechneten Versicherungen mit zwei verschiedenen Möglichkeiten des Ausscheidens. Giornale di Matematica Finanziaria, Serie II, Volume II, N. 2, 1932.

Es besteht somit die Näherungsgleichung

$$Z_\lambda = 1 + (A_\lambda x - B_\lambda y)\, i - \tfrac{1}{2}\,(C_\lambda x^2 - 2E_\lambda xy + D_\lambda y^2).$$

Nach Poisson hat man

$$Z_\lambda = \varrho_\lambda\, e^{\varphi_\lambda i}$$

und folglich

$$y = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} Z_\lambda = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=s} \varrho_\lambda\, e^{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=s} \varphi_\lambda i}$$

zu setzen. Weil aber die logarithmische Gleichung

$$\ln Z_\lambda = \ln \varrho_\lambda + \varphi_\lambda i$$

gilt, so wird man auch die Näherungsgleichung

$$\ln \varrho_\lambda + \varphi_\lambda i = \ln Z_\lambda = \ln\left[1 + (A_\lambda x - B_\lambda y)\, i - \tfrac{1}{2}(C_\lambda x^2 - 2E_\lambda xy + D_\lambda y^2)\right]$$

aufstellen können, aus welcher man durch Reihenentwicklung in der gewohnten abgekürzten Weise die weitere Näherungsgleichung

$$\ln \varrho_\lambda + \varphi_\lambda i = (A_\lambda x - B_\lambda y)\, i - \tfrac{1}{2}\,(C_\lambda x^2 - 2E_\lambda xy + D_\lambda y^2) + \\ + \tfrac{1}{2}(A_\lambda x - B_\lambda y)^2$$

erhält. Aus dieser folgt aber nach der Theorie der komplexen Zahlen

$$\ln \varrho_\lambda = -\tfrac{1}{2}\,[(C_\lambda - A_\lambda^2)\, x^2 - 2\,(E_\lambda - A_\lambda B_\lambda)\, xy + (D_\lambda - B_\lambda^2)\, y^2],$$
$$\varphi_\lambda = A_\lambda x - B_\lambda y.$$

Mit diesen Werten ergibt sich für die generierende Funktion der Näherungsausdruck

$$Y = \\ e^{-\frac{1}{2}\left[\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=s}(C_\lambda - A_\lambda^2)x^2 - 2\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=s}(E_\lambda - A_\lambda B_\lambda)xy + \sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=s}(D_\lambda - B_\lambda^2)y^2\right] + \left(\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=s} A_\lambda x - \sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=s} B_\lambda y\right) i}.$$

Wenn man die Integralgrenzen wiederum bis $-\infty$ und $+\infty$ ausdehnt und zur Vereinfachung noch

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s}(C_\lambda - A_\lambda^2) = C_{11}, \quad \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s}(E_\lambda - A_\lambda B_\lambda) = -C_{12}, \quad \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s}(D_\lambda - B_\lambda^2) = C_{22}$$

setzt, so erhält man abermals den schon berechneten Integralausdruck (IV).

5. Die Wahrscheinlichkeit $P(u, v)$ läßt sich ferner als Lösung einer partiellen Differentialgleichung dreier Variablen darstellen, die aus dem Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsausdruck hergeleitet werden kann. Um die Darstellung möglichst einfach zu gestalten, setzen wir in dem Ausdruck (II)

$$Y_{(x,\,y)}\, e^{-\left(\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=s} \mathfrak{A}_{(x+k)_\lambda}{}^{xi} - \sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=s} P_{x_\lambda}{}^{a_{(x+k)_\lambda}}{}^{yi}\right)} = X_{(x,\,y)},$$

sodaß wir für $P(u, v)$ den Ausdruck

$$P(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X e^{-(ux - vy)i} \, dx \, dy \tag{VII}$$

erhalten. Wir setzen nun

$$X = U^s$$

und differentiieren nach s; so folgt

$$\frac{dX}{ds} = U^s \ln U$$

und hieraus

$$\frac{dX}{ds} = X \frac{1}{s} \ln X.$$

(Fortsetzung.)

How to compute the standard error of a correlation with *g*.

Karel Tříska.

In the course of an investigation recently undertaken by this writer with a view of determining the nature and diagnostic value of the so-called speed and power tests of intelligence, necessity arose to compare correlations with g obtained in different ranges for the two kinds of tests. For this purpose, standard errors of the correlations with g were needed. As the search in the literature for the formula required led to no result, the task of deriving it had to be assumed by the writer.

The formula for computing correlations with g has been given by Spearman and may be written as follows:

$$r_{1g} = \left(\frac{r_{12}r_{13}}{r_{23}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{r_{12}r_{14}}{r_{24}}\right)^{\frac{1}{2}} = \ldots = \left(\frac{r_{1(n-1)}r_{1n}}{r_{(n-1)n}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

$$= \frac{2}{(n-1)(n-2)} \left[\left(\frac{r_{12}r_{13}}{r_{23}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{r_{12}r_{14}}{r_{24}}\right)^{\frac{1}{2}} + \ldots + \left(\frac{r_{1(n-1)}r_{1n}}{r_{(n-1)n}}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{2}$$

$$= \left(\frac{r_{12}r_{13} + r_{12}r_{14} + \ldots + r_{1(n-1)}r_{1n}}{r_{23} + r_{24} + \ldots r_{(n-1)n}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

where $1, 2, 3, \ldots, n$ are different variables which, taken any four at a time, obey the tetrad equation

$$r_{12}r_{34} = r_{13}r_{24} = r_{14}r_{23}$$

and where g is a factor common to all these variables.