Alfred Loewy

Ausbau der allgemeinen Bezeichnungsweisen für die Versicherungsrechnung

Aktuárské vědy, Vol. 4 (1933), No. 3, 113–119

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144602

Ausbau der allgemeinen Bezeichnungsweisen für die Versicherungsrechnung.[1])

Von Professor Dr. phil. *Alfred Loewy* (Freiburg i. Br.).

Die große Bedeutung einer internationalen einheitlichen Bezeichnungsweise ist jedem Mathematiker klar; sie dient der Ökonomie, indem der Geist nicht durch Aneignung stets neuer Benennungen belastet wird, und stellt unabhängig von der Sprache des einzelnen Landes eine Weltsprache, ein Esperanto für das betreffende mathematische Gebiet, dar. Man braucht nur an die Bezeichnung für den Differentialquotienten, das Integral, Summen- und Produktzeichen, die Exponentialfunktion, den Logarithmus, die ζ-Funktion und dergleichen mehr zu denken. In der Versicherungsmathematik wurde eine solche einheitliche Nomenklatur anschließend an diejenige des Text-Book des Institute of Actuaries auf dem zweiten internationalen Kongreß der Aktuare zu London eingeführt. (Vgl. Transactions of the second international actuarial congress, London 1899, p. 618 sowie meinen Artikel in Manes' Versicherungslexikon, 3. Auflage, Berlin 1930, S. 458.) Für die eigentliche Lebensversicherungsmathematik kann die Behandlung der internationalen Bezeichnungsweise hierdurch wohl als völlig gelöst angesehen werden und ist nur noch in unwesentlicheren Punkten vielleicht ergänzungsfähig. Zum Beispiel könnte man als obere Grenze für das höchst erreichbare Lebensalter einer Person ω oder $\omega + 1$ festlegen, so daß für die Lebenden l_x einer Absterbeordnung $l_x = 0$, falls $x \geqq \omega$ oder $x \geqq \omega + 1$; weiter kann man für die Spaltung der Nettoprämie $P_{[y]+x}$ in Risiko- und Sparprämie die Symbole $P^r_{[y]+x}$ bzw. $P^s_{[y]+x}$ einführen, so daß $P_{[y]+x} = P^r_{[y]+x} + P^s_{[y]+x}$ ist, ferner läßt sich für die mathematische Erwartung, auf der die gesamte Prämienberechnung aufgebaut werden kann, das Symbol E empfehlen. (Vgl. hierzu E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung, 1. Band, 3. Auflage, Leipzig und Berlin 1914, S. 226.) Auch könnte man an die Festlegung einheitlicher Bezeichnungen

[1]) Die vorliegende Veröffentlichung ist das mir übertragene deutsche Referat für den internationalen Versicherungskongreß, der 1933 in Kanada stattfinden sollte. Infolge Ausfallens des Kongresses erscheint der Aufsatz hier in unveränderter Form.

für die Stornowahrscheinlichkeiten $s_{[y]+x}$ und für die mit ihnen zusammenhängende Dekremententafel des Versichertenbestandes denken (vgl. etwa A. Loewy, Versicherungsmathematik, 4. Auflage, Berlin 1924, S. 205), ein Fragenkomplex, der sich, ebenso wie die Aktivitäts- und Invalidenausscheideordnung, der nachfolgend behandelten allgemeinen, durch k Ausscheidegründe beeinflußten Ausscheideordnung unterordnen läßt. Wie weit Höckners ausreichende Prämie und die Dividenden sich vielleicht mit internationalen Symbolen (vgl. wegen der deutschen Bezeichnungen A. Berger, Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik, Berlin 1923 und 1925, sowie A. Loewy, Versicherungsmathematik) versehen lassen, wäre wohl der Erwägung wert. In der Krankenversicherungsmathematik könnte man die von einem x-jährigen im Laufe seines nächsten Lebensjahres verbrachte Anzahl von Krankentagen mit k_x bezeichnen und für das Produkt $k_x l_x$ das Symbol k'_x oder k^*_x wählen sowie dann weiter entsprechend $\overline{C}'_x$ oder $\overline{C}^*_x = k'_x v^{x+\frac{1}{2}} = k_x l_x v^{x+\frac{1}{2}}$ (vgl. meinen Artikel Krankenversicherungsmathematik in Manes' Versicherungslexikon, S. 931).

Meiner Ansicht nach kann und soll der Einzelne zu der Fülle der Möglichkeiten bei Aufgaben, die teilweise noch nicht genügend geklärt sind und in der Praxis verschiedener Länder eine verschiedene Behandlungsweise erfordern, nicht definitiv Stellung nehmen; nur einige der Punkte, über die man künftig zu diskutieren haben wird, wollte ich mir vorstehend zu skizzieren erlauben. Ich nehme an, daß, wie dies bei der erstmaligen Einführung der internationalen Bezeichnung geschah, eine internationale Kommission ernannt werden wird, die in längerer gemeinsamer Arbeit die einheitliche Nomenklatur des Versicherungswesens kritisch prüfen und, wo es heute schon möglich ist, weiter ausbauen wird. Im folgenden soll noch vornehmlich von einer allgemeinen Ausscheideordnung mit k sich gegenseitig ausschließenden Ausscheidegründen (vgl. hierzu meine Aufsätze in den Sitzungsberichten der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, math.-nat. Klasse, Jahrgang 1917, 6. Abhandlung, sowie besonders in den Blättern für Versicherungs-Mathematik und verwandte Gebiete, Beilage zur Zeitschrift für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft, Jahrgänge 1931 und 1932: Der Stieltjessche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmathematik, I, II und III) und ihrer Anwendung auf die Invaliditätsversicherung im Falle $k = 2$ die Rede sein.

Zum leichteren Verständnis beginnen wir mit der Todesfallversicherung und ihrem einzigen Ausscheidegrund ($k = 1$), dem Tode. Die Anzahl der vom Eintrittsalter y bis zum Alter $y + t$ Verstorbenen einer Selektionssterbetafel bezeichnen wir mit $f_{[y]+t}$, so daß $f_{[y]} = 0$ und

$$f_{[y]+t} = l_{[y]} - l_{[y]+t} = d_{[y]} + d_{[y]+1} + d_{[y]+2} + \dots + d_{[y]+t-1}$$

ist. Man hat dann für die Wahrscheinlichkeit ${}_np_{[y]+x}$, daß ein $(y + x)$-

jähriger mit y Jahren in das Versicherungsverhältnis Eingetretener seinen $(y + x + n)$-ten Geburtstag erlebt,

$$
{}_n p_{[y]+x} = \frac{l_{[y]+x+n}}{l_{[y]+x}} = e^{\int\limits_0^n \frac{d\,(l_{[y]+x} - l_{[y]+x+t})}{-\,l_{[y]+x+t}}} =
$$

$$
= e^{\int\limits_0^n \frac{d\,(f_{[y]+x+t} - f_{[y]+x})}{-\,l_{[y]x+t}}} .
$$

Diese Formel hat gegenüber der üblichen

$$
{}_n p_{[y]+x} = e^{-\int\limits_0^n \mu_{[y]+x+t}\, dt}
$$

den Vorzug, daß nicht das die Differentiierbarkeit der Lebenden voraussetzende

$$
\mu_{[y]+x+t} = \frac{1}{l_{[y]+x+t}} \cdot \frac{d\,(l_{[y]+x} - l_{[y]+x+t})}{dt} = \frac{-1}{l_{[y]+x+t}} \frac{d\, l_{[y]+x+t}}{dt}
$$

verwendet wird, sondern die Differentiierbarkeit durch Benutzung eines Stieltjesschen Integrals vermieden ist. Im Falle einer Aggregattafel hat man einfach $y = 0$ zu setzen, so daß

$$
f_t = l_0 - l_t = d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{t-1}
$$

wird.

Sind bei einer Ausscheideordnung k sich gegenseitig ausschließende Ausscheidegründe wirksam, so seien die vom Eintrittsalter y bis zum Alter $y + t$ aus dem ersten, zweiten, ..., k-ten Grunde aus dem Versicherungsverhältnis ausgetretenen Personen mit

$$
f^{(1)}_{[y]+t},\ f^{(2)}_{[y]+t},\ \ldots,\ f^{(k)}_{[y]+t}
$$

bezeichnet, so daß die im Versicherungsverhältnis verbleibende Anzahl von Versicherten $l_{[y]+t}$ beim Alter $y + t$, wenn y das Eintrittsalter bedeutet, sich als

$$
l_{[y]+t} = l_{[y]} - f^{(1)}_{[y]+t} - f^{(2)}_{[y]+t} - \ldots - f^{(k)}_{[y]+t} \tag{1}
$$

ergibt. Für die Ausscheidewahrscheinlichkeiten ${}_n q^{(j)}_{[y]+x}$ bei den k Ausscheidegründen $j = 1, 2, \ldots, k$, daß ein mit y Jahren in die Beobachtung Eingetretener im Alter von $y + x$ bis $y + x + n$ Jahren aus dem j-ten Grunde ausscheidet, hat man

$$
{}_n q^{(j)}_{[y]+x} = \frac{f^{(j)}_{[y]+x+n} - f^{(j)}_{[y]+x}}{l_{[y]+x}} \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{2}
$$

Aus (1) ergibt sich dann, wenn $t = x + n$ bzw. $t = x$ gesetzt wird,

$$l_{[y]+x+n} = l_{[y]+x} - (f^{(1)}_{[y]+x+n} - f^{(1)}_{[y]+x}) - \ldots - (f^{(k)}_{[y]+x+n} - f^{(k)}_{[y]+x}); \qquad (3)$$

dividiert man durch $l_{[y]+x}$ und definiert die Verbleibswahrscheinlichkeit im Versichertenbestand als

$$_np_{[y]+x} = \frac{l_{[y]+x+n}}{l_{[y]+x}} \qquad (4)$$

und demnach die totale Ausscheidewahrscheinlichkeit als

$$_nq_{[y]+x} = 1 - {}_np_{[y]+x} = \frac{l_{[y]+x} - l_{[y]+x+n}}{l_{[y]+x}}, \qquad (5)$$

so erhält man

$$_np_{[y]+x} = 1 - {}_nq^{(1)}_{[y]+x} - {}_nq^{(2)}_{[y]+x} - \ldots - {}_nq^{(k)}_{[y]+x}. \qquad (6)$$

Neben die k durch (2) definierten abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten treten die k unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten von Johannes Karup, nämlich

$$_n'q^{(j)}_{[y]+x} = 1 - {}_n'p^{(j)}_{[y]+x} = 1 - e^{\int\limits_0^n \frac{\mathrm{d}\,(f^{(j)}_{[y]+x+t} - f^{(j)}_{[y]+x})}{-\,l_{[y]+x+t}}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k); \qquad (7)$$

hierbei bedeuten $_n'q^{(j)}_{[y]+x}$ bzw. $_n'p^{(j)}_{[y]+x}$ die Ausscheide- bzw. Verbleibswahrscheinlichkeiten, wenn in jedem Augenblick nur allein der j-te Ausscheidegrund unter Beseitigung der $k - 1$ übrigen Ausscheidegründe wirksam wäre [vgl. hierzu meine Arbeit III, Blätter für Versicherungs-Mathematik und verwandte Gebiete, Jahrgang 1932, S. 214, Formel (19)]. Bei Einführung der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten haben wir die Ausscheideintensitäten $\mu^{(j)}_{[y]+t} = \frac{\frac{d\,f^{(j)}_{[y]+t}}{dt}}{l_{[y]+t}}$ und die hiermit zusammenhängende Formel $_n'q^{(j)}_{[y]+x} = 1 - e^{-\int\limits_0^n \mu^{(j)}_{[y]+x+t}\,d\,t}$ (vgl. meinen Aufsatz: Zur Theorie und Anwendung der Intensitäten in der Versicherungsmathematik in den Sitzungsberichten der Heidelberger Akademie der Wissenschaften a. a. O., S. 7, Formeln (6_1) bis (6_n) und S. 15, Formel (16_1) sowie A. Berger am bereits zitierten Orte, II, S. 220) absichtlich vermieden und an ihrer Stelle in (7) Stieltjessche Integrale eingeführt, weil man die Differentiierbarkeit der Funktionen der Ausscheideordnung nicht benötigt, vielmehr schon mit der Stetigkeit der Funktionen ausreicht. Man beweist ohne Voraussetzung der Differentiierbarkeit, daß

$$
\begin{aligned}
{}_n p_{[y]+x} &= \frac{l_{[y]+x+n}}{l_{[y]+x}} = {}_n'p^{(1)}_{[y]+x} \cdot {}_n'p^{(2)}_{[y]+x} \cdots {}_n'p^{(k)}_{[y]+x} = \\
&= (1 - {}_n'q^{(1)}_{[y]+x})\,(1 - {}_n'q^{(2)}_{[y]+x}) \ldots (1 - {}_n'q^{(k)}_{[y]+x}),
\end{aligned} \tag{8}
$$

eine Formel, die bei Verwendung der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten an die Stelle von (6) tritt. Bei Einführung von Stieltjesschen Integralen werden die Intensitäten und demnach auch die Differentiierbarkeit zur Bestimmung des Deckungskapitals einer allgemeinen Versicherung mit k Ausscheidemöglichkeiten und zur Bestimmung der drei von mir aufgestellten Integralgleichungen, denen das Deckungskapital genügt, nicht benötigt (vgl. meine Aufsätze I, § 3 und II, § 2, Blätter für Versicherungs-Mathematik usw., Jahrgang 1931 sowie die hieran anknüpfenden Arbeiten von S. Breuer, Der Stieltjessche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmathematik, Versicherungsarchiv, Wien 1931, Nr. 5 sowie Verwertung des Stieltjesschen Integralbegriffs zur Darstellung von Renten- und Bausparformeln, ebenda, Nr. 8, 1932 und M. Jacob, Sugli integrali di Stieltjes e sulla loro applicazione nella matematica attuariale, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, Anno III, Roma 1932 sowie der Stieltjessche Integralbegriff und seine Verwendung in der Versicherungsmathematik, demnächst in den Aktuárské Vědy erscheinend). Bei den unabhängigen Wahrscheinlichkeiten scheint es mir aus typographischen Gründen empfehlenswerter, die Akzente links oben vor p oder q zu setzen statt rechts oben hinter p oder q, wie letzteres z. B. von A. Berger in seinen Prinzipien der Lebensversicherungstechnik II, S. 221 geschieht. Weiter empfehle ich, die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten mit einem Akzent zu versehen, nicht aber, wie dies auch schon gemacht wurde, die abhängigen.

Als Kommutationswerte sind einzuführen:

$$
\overline{M}^{(j)}_{[y]+x} = \int_0^\infty v^{y+x+\tau}\, \mathrm{d}f^{(j)}_{[y]+x+\tau} = \int_x^\infty v^{y+\tau}\, \mathrm{d}f^{(j)}_{[y]+\tau} \quad (j = 1, 2, \ldots, k); \tag{9}
$$

diese Formel geht für die bloße Todesfallversicherung über in

$$
\overline{M}_{[y]+x} = \int_0^\infty v^{y+x+\tau}\, d(l_{[y]+x} - l_{[y]+x+\tau}) = \int_x^\infty v^{y+\tau}\, d(l_{[y]+x} - l_{[y]+\tau}).
$$

In der Invalidenversicherung wird die allgemeine Ausscheideordnung einerseits als Aktivitätsordnung, andererseits als Invaliditätsausscheideordnung benutzt. Bezeichnet man mit $l^{\overline{aa}}_{[y]+x}$ die mit y Jahren in ihren Beruf eingetretenen, $y + x$ Jahre alten Aktiven und sieht als ersten, wesentlichsten Ausscheidegrund die Invalidität und als zweiten Ausscheidegrund den Tod in aktivem Zustand an, so hat man nach (2) die Wahrscheinlichkeit, daß ein $(y+x)$-jähriger Aktiver im Alter von $y+x$ bis $y+x+n$ Jahren invalid wird,

$$ {}_nq^{(1)a\overline{a}}_{[y]+x} = \frac{f^{(1)\overline{a}\,\overline{a}}_{[y]+x+n} - f^{(1)\overline{a}\,\overline{a}}_{[y]+x}}{l^{a\,a}_{[y]+x}}, $$

wofür die Bezeichnung ${}_ni_{[y]+x}$ gebräuchlich ist, und die Wahrscheinlichkeit für den Tod in aktivem Zustand

$$ {}_nq^{(2)\overline{a}\,\overline{a}}_{[y]+x} = \frac{f^{(2)\overline{a}\,\overline{a}}_{[y]+x+n} - f^{(2)\overline{a}\,\overline{a}}_{[y]+x}}{l^{\overline{a}\,a}_{[y]+x}}, $$

wofür man in üblicher Weise ${}_nq^{\overline{a\,a}}_{[y]+x}$ schreibt. Entsprechend (7) sind die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten für das Invalidwerden in aktivem Zustande ${}_n{}'q^{(1)\overline{a\,a}}_{[y]+x}$, gleichbedeutend mit ${}_n{}'i_{[y]+x}$, und für den Tod in aktivem Zustande ${}_n{}'q^{(2)\overline{a\,a}}_{[y]+x}$, wobei in gewöhnlicher Bezeichnung der obere Index (2) fortbleibt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit

$$ {}_np^{\overline{a\,a}}_{[y]+x} = \frac{l^{\overline{a\,a}}_{[y]+x+n}}{l^{\overline{a}\,a}_{[y]+x}}, $$

daß ein $(y+x)$-jähriger Aktiver seinen $(y+x+n)$-ten Geburtstag noch aktiv erlebt,

$$ {}_np^{\overline{a\,a}}_{[y]+x} = {}_n{}'p^{(1)\overline{a\,a}}_{[y]+x}\,{}_n{}'p^{(2)\overline{a\,a}}_{[y]+x} = \left(1 - {}_n{}'q^{(1)\overline{a\,a}}_{[y]+x}\right)\left(1 - {}_n{}'q^{(2)\overline{a\,a}}_{[y]+x}\right). $$

Diese Formel will J. F. Steffensen [Some remarks on invalidity functions, Transactions of the ninth international congress of actuaries, Stockholm 1930, p. 70, Formel (3)], falls, wie bei der Aktivitätsordnung üblich, keine Selektionstafel verwendet wird, folgendermaßen bezeichnen:

$$ {}_np^{a}_{x} = {}_np^{\alpha}_{x}\,{}_np^{\beta}_{x}, $$

wobei ${}_nq^{\alpha}_{x} = 1 - {}_np^{\alpha}_{x}$ die unabhängige Todeswahrscheinlichkeit ${}_n{}'q^{\overline{aa}}_{x}$ für einen Aktiven und ${}_nq^{\beta}_{x} = 1 - {}_np^{\beta}_{x}$ die unabhängige Invaliditätswahrscheinlichkeit ${}_n{}'i_x$ für einen Aktiven bedeuten. Trotz gewisser Vorzüge möchte ich die Bezeichnungsweise von Steffensen mit nur *einem* rechts oben stehenden Index nicht empfehlen, da man die Wahrscheinlichkeit ${}_nq^{a}_{x} = 1 - {}_np^{a}_{x}$ dafür verwendet, um auszudrücken, daß ein x-jähriger Aktiver bis zum Alter von $x+n$ Jahren, sei es als Aktiver oder als Invalider, verstorben ist. (Vgl. G. Schaertlin, Zur mathematischen Theorie der Invaliditätsversicherung, Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1. Jahrgang, Bern 1906, S. 48.)

Bei der Invalidenausscheideordnung verwendet man zumeist nur *einen* oberen Index i, indem man die doppelten oberen Indizes $\overline{ii}$ einer sogenannten gemischten oder Verbindungstafel vorbehält und unter $\bar{l}^{ii}_{[y]+x}$ die $(y + x)$-jährigen noch vorhandenen Invaliden versteht, die aus einer Grundmasse mit y Jahren in die Beobachtung eingetretener Aktiven hervorgegangen sind. (Vgl. z. B. meine Versicherungsmathematik, S. 168.) Bezeichnet man mit $l^{i}_{[y]+x}$ die im Alter von $y + x$ Jahren vorhandenen Invaliden einer Invaliditätsausscheideordnung, die aus einer ursprünglichen Grundmasse $l^{i}_{[y]}$ im Alter von y Jahren invalid gewordener Personen noch nach x Jahren im Rentenbezug stehen, und sieht man als ersten, wesentlichsten Ausscheidegrund den Tod in invalidem Zustand und als zweiten Ausscheidegrund die Reaktivierung an, so hat man auf Grund unserer allgemeinen Ausscheidetafel nach (2) die Wahrscheinlichkeit, daß ein $(y + x)$-jähriger Invalider im Alter von $y + x$ bis $y + x + n$ Jahren in invalidem Zustand verstirbt,

$$_{n}q^{(1)i}_{[y]+x} = \frac{f^{(1)i}_{[y]+x+n} - f^{(1)i}_{[y]+x}}{l^{i}_{[y]+x}},$$

wo bei der Sterbenswahrscheinlichkeit q in üblicher Weise der obere Index (1) fortgelassen wird, so daß man $_{n}q^{i}_{[y]+x}$ schreibt [vgl. etwa meine Versicherungsmathematik, S. 144, Formel (203) im Falle $n = 1$], und weiter die Wahrscheinlichkeit, daß ein $(y + x)$-jähriger Invalider im Alter von $y + x$ bis $y + x + n$ Jahren reaktiviert wird,

$$_{n}q^{(2)i}_{[y]+x} = \frac{f^{(2)i}_{[y]+x+n} - f^{(2)i}_{[y]+x}}{l^{i}_{[y]+x}},$$

wofür man auch die Bezeichnung $_{n}r_{[y]+x}$ einführen kann [vgl. am zuletzt genannten Ort Formel (204)]. Voraufgehend bedeuten $f^{(1)i}_{[y]+x}$ die Anzahl aller von einer Grundmasse $l^{i}_{[y]}$ mit y Jahren invalid gewordenen Personen, die im Alter von y bis $y + x$ Jahren als Invalide verstorben sind, und $f^{(2)i}_{[y]+x}$ die Anzahl aller während der gleichen Altersklasse Reaktivierten; im besonderen sind die Anfangswerte $f^{(1)i}_{[y]} = 0$ und $f^{(2)i}_{[y]} = 0$ sowie $f^{(1)i}_{[y]+x+1} - f^{(1)i}_{[y]+x} = d^{i}_{[y]+x}$ die in der einjährigen Altersklasse $y + x$ bis $y + x + 1$ im Rentenbezug verstorbenen Invaliden und $f^{(2)i}_{[y]+x+1} - f^{(2)i}_{[y]+x} = R_{[y]+x}$ die in der gleichen Altersklasse Reaktivierten. Durch die vorstehenden Darlegungen dürfte wohl die Bedeutung der mit wachsendem Lebensalter zunehmenden Ausscheidefunktionen $f^{(j)}_{[y]+x}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ für die gesamte Versicherungsmathematik klar geworden sein.