V. Lenz

Sur une modification de la formule de Baily pour le calcul du taux d'intérêt

Aktuárské vědy, Vol. 3 (1932), No. 2, 86–88

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/144570`

Sur une modification de la formule de Baily pour le calcul du taux d'intérêt.

Par Dr. *V. Lenz.*

Le problème du calcul du taux d'intérêt effectif intéresse toujours les actuaires. E. Lenzi dans l'article „Una correzione alla formula del Baily per il calcolo del tasso delle annualità", paru dans le „Giornale di Matematica Finanziaria", Vol. XII. No 1—3, s'occuppe de la méthode classique de Baily et indique, comment on peut la rendre plus précise. Ses résultats peuvent servir avantageusement pour obtenir une formule beaucoup plus précise.

Pour obtenir la formule primitive de Baily, on utilise dans l'équation

$$\left[\frac{n}{a(n, i)}\right]^{\frac{2}{n+1}} = 1 + i - \frac{n-1}{12} i^2 + \frac{(n-1)(n+2)(n+3)}{1440} i^4 - \\ - \frac{(n-1)(n+2)(n+3)}{1440} i^5 + \ldots, \tag{1}$$

seulement les trois premiers membres du développement du côté droit.

En utilisant la substitution

$$\left[\frac{n}{a(n, i)}\right]^{\frac{2}{n+1}} - 1 = h, \tag{2}$$

cette méthode donne le résultat approximatif

$$i_B = h \frac{12 - (n-1) h}{12 - 2(n-1) h} \tag{3}$$

qui est la troisième solution, par la méthode itérative selon i, de l'équation

$$h = i - \frac{n-1}{12} i^2. \tag{1'}$$

Lenzi emploie encore une fois la substitution analoque à l'équation (2)

$$\left[\frac{nh}{1-(1+h)^{-n}}\right]^{\frac{2}{n+1}} - 1 = h' \tag{4}$$

et arrive à la valeur approximative

$$i_L = \frac{12h - 6h' - (n-1) h^2}{6 - (n-1) h},$$

sur laquelle il montre qu'elle est plus petite que la valeur exacte de i.

Pour les quantités figurant dans ces calculs on peut trouver certaines nouvelles inégalités qui mènent à un résultat intéressant.

Par la comparaison des deux membres consécutifs de la série des puissances dans le second membre de l'équation (1) on peut montrer que cette série est absolument convergente et, par conséquent

$$\left[\frac{n}{a\,(n,\,i)}\right]^{\frac{2}{1+n}} < 1 + i$$

d'après quoi, ayant égard â l'équation (2), il est évident que

$$h < i.$$

Puisque h est la première valeur approximative pour la solution de l'équation (1') et i_B est la troisième valeur de la solution itérative de cette équation, il suit

$$i_B > h.$$

En substituant la valeur i_B dans l'équation (1) et en utilisant la substitution (2), nous obtenons comme résultat

$$\left[\frac{n}{a\,(n,\,i)}\right]^{\frac{2}{n+1}} > \left[\frac{n}{a\,(n,\,i_B)}\right]^{\frac{2}{n+1}}. \tag{5}$$

En réalité, il est toujours $i > 0$, $n > 1$ et par conséquent nécessairement

$$n > a\,(n,\,i).$$

Il suit donc, comme conséquence de l'inégalité (5) que l'on a

$$\frac{n}{a\,(n,\,i)} < \frac{n}{a\,(n,\,i_B)}.$$

Puisque la valeur $a\,(n,\,i)$ diminue avec le taux d'intérêt croissant, il est

$$i < i_B$$

et par conséquent la valeur approximative i_B du taux d'intérêt est toujours plus petite que la valeur précise. Parceque Lenzi indique que i_L calculé par sa méthode est plus petite que le i exacte, on voit facilement que i exacte remplit l'inéqualité

$$i_L < i < i_B$$

et, en faisant la moyenne arithmétique des valeurs i_B et i_L

$$i_{BL} = \frac{3}{4}\,\frac{12h - 4h' - (n-1)\,h^2}{6 - (n-1)\,h}, \tag{6}$$

nous arrivons à une approximation plus proche de la valeur exacte. La méthode de Baily donne pour $n < 50$ des résultats assez précis. On utilisera donc la correction de Lenzi pour les cas, où la période d'amortissement est plus longue. En formant la moyenne arithmétique (6), on arrive au résultat certainement satisfaisant pour la pratique, comme on peut voir de la table suivante:

n	$100 i_B$	$100 i_L$	$100 i_{BL}$	$100 i$
	2,00317	1,99564	1,99941	2
100	3,01685	2,98702	3,00194	3
	4,05577	3,98108	4,01843	4
	2,00135	1,99825	1,99980	2
75	3,00925	2,99200	3,00062	3
	4,02370	3,98357	4,00363	4
	5,05991	4,97775	5,01883	5
	2,00042	1,99925	1,99984	2
	3,00229	2,99695	2,99962	3
50	4,00751	3,99208	3,99979	4
	5,01883	4,98553	5,00218	5
	6,03972	5,97829	6,00901	6

Il est évident de ce tableau, avec quelle simple manière on peut obtenir un résultat beaucoup plus précis.

Durchschnittliche Prämienreserve in der Sozialversicherung.

Von Dr. *A. Zelenka.*

I.

In der letzten Nummer dieser Zeitschrift befasste ich mich mit der Frage der Bestimmung einer vom Alter des Versicherten unabhängigen Prämienreserve und leitete für dieselbe eine Formel ab, die eine Konsequenz der Durchschnittsprämie ist. In meinem Artikel behauptete ich, daß diese Durchschnittsprämienreserven als sog. „Überweisungsbetrag" unter der Voraussetzung verwendbar ist, daß die Übertritte der Versicherten hinsichtlich Alter und erworbener Beitragszeit im Versichertenkollektiv gleichmäßig verteilt sind. Hier will ich den Beweis dieser Behauptung geben.

Der Überweisungsbetrag soll, wie ich im vorangegangenen Artikel anführte, so berechnet werden, daß durch seine Ausgabe die „treuen Versicherten", das sind die in der Versicherung Verbleibenden, nicht geschädigt werden.

Bezeichnen wir mit $V(x, n)$ den Wert des Überweisungsbetrages, welchen der Versicherungsträger beim Austritt des Versicherten flüßig