Aktuárské vědy

E. Bounitzky

Sur un critère de la dépendance fonctionelle entre deux fonctions

Aktuárské vědy, Vol. 2 (1931), No. 2, 93–98

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144542

Sur un critère de la dépendance fonctionelle entre deux fonctions.

Eug. Bounitzky.

1. Soient $f(x_1, \ldots, x_n)$ et $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ deux fonctions de variables réelles définies dans une classe donnée K de points $x_1, \ldots, x_n$. Pour qu'il y ait une dépendance fonctionelle entre ces deux fonctions, il faut et il suffit que la condition suivante soit remplie: pour chaques deux points $x'_1 \ldots, x'_n$ et $x''_1, \ldots, x''_n$ de la classe K qui satisfont à l'équation

$$\varphi(x'_1, \ldots, x'_n) = \varphi(x''_1, \ldots, x''_n)$$

l'égalité

$$f(x'_1, \ldots, x'_n) = f(x''_1, \ldots, x''_n)$$

est ausis satisfaite.

Supposons qu'une fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ soit uniunivoque dans la classe K. Ça veut dire que pour chaques deux points $x'_1, \ldots, x'_n$ et $x''_1, \ldots, x''_n$ différents de la classe K (c'est à dire satisfaisant à l'inégalité $|x'_1 - x''_1| + \ldots + |x'_n - x''_n| > 0$) on a $\varphi(x'_1, \ldots, x'_n) \neq \varphi(x''_1, \ldots, x''_n)$. Dans ce cas toute fonction $F(x_1, \ldots, x_n)$ définie dans la classe K est nécessairement une fonction de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, ce qui ne donne pourtant aucune indication sur la nature de la fonction F qui peutêtre choisie tout à fait arbitrairement. En effet, la valeur $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ définit dans ce cas le point $x_1, \ldots, x_n$, dont les coordonnées définissent la valeur de la fonction $F(x_1, \ldots, x_n)$. Pour $n = 1$ chaque fonction monotone $\varphi(x_1)$ et, en particulier, continue et monotone dans un intervalle donne un exemple d'une fonction uniunivoque dans cet intervalle (par exemple $\varphi(x_1) = e^{x_1}$). Pour construire une fonction uniunivoque dans l'espace K_n à n dimensions ($n > 1$) ou dans une partie d'un tel espace il suffit de faire usage de l'idée de Cantor qui a montré que l'espace K_n à n dimensions a la même puissance qu'un intervalle $a \ldots b$ (fini ou infini). Donc, en faisant correspondre à chaque point $x_1, \ldots, x_n$ de l'espace K_n un et seulement un point y d'un intervalle donné $a \ldots b$, on obtient une fonction uniunivoque $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ des variables $x_1, \ldots x_n$.

2. Il est à remarquer que pour $n > 1$ une fonction continue $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, définie dans un domaine C (suivant la nomenclature de Jordan) n'est pas sûrement uniunivoque. En effet, soit $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction continue dans le domaine C. En prenant deux points différents $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1 \ldots, b_n$ dans ce domaine et en désignant respectivement par A et B les valeurs de φ en ces points, on aura

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n) = A, \ \varphi(b_1, \ldots, b_n) = B.$$

Si on a $A = B$, la fonction φ n'est pas sûrement uniunivoque.. Soit maintenant $A \neq B$. Joignons dans ce cas les points $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1 \ldots, b_n$

par un contour ontinu L situé entièrement dans le domaine C et défini par les équations

$$x_i = g_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les fonctions $g_i(t)$ étant continues dans un intervalle donné $< t_0, t_1 >$ et vérifiant les conditions aux limites $g_i(t_0) = a_i$, $g_i(t_1) = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Soit γ un nombre compris entre A et B. La fonction $\varphi[g_1(t), \ldots, g_n(t)]$ est continue dans l'intervalle $< t_0, t_1 >$; de plus, elle prend aux limites t_0, t_1 de cet intervalle les valeurs

$$\varphi[g_1(t_0) \ldots, g_n(t_0)] = \varphi(a_1, \ldots, a_n) = A, \quad \varphi[g_1(t_1), \ldots g_n[(t_1)] =$$
$$= \varphi(b_1, \ldots, b_n) = B.$$

Donc on aura pour une valeur τ de t comprise entre t_0 et t_1, en posant $g_i(\tau) = c_i$ $(i = 1, \ldots, n)$,

$$\varphi[g_1(\tau), \ldots, g_n(\tau)] = \varphi(c_1, \ldots, c_n) = \gamma.$$

Ainsi nous avons trouvé dans le domaine C un point $c_1, \ldots, c_n$ dont les coordonnées satisfont à l'équation

$$\varphi(c_1, \ldots, c_n) = \gamma. \tag{1}$$

On peut joindre $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ par plusieurs contours continus $L_1, \ldots, L_k$ sans points communs intermédiaires et situés entièrement dans le domaine C et même par une infinité de tels contours. En appliquant le même raisonnement à chaque contour, on trouve dans le domaine une infinité de points différents $c^{(\nu)}{}_1, c^{(\nu)}{}_2, \ldots, c^{(\nu)}{}_n$ dont les coordonnées vérifient l'équation $\varphi(c^{(\nu)}{}_1, \ldots, c^{(\nu)}{}_n) = \gamma$. Donc une fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ continue dans le domaine C, n surpassant l'unité, n'est pas uniunivoque.

3. Soit $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction qui est définie dans une classe K de points $x_1, \ldots, x_n$. Nous nommerons *isoligne* b de la fonction φ l'ensemble de tous les points $\xi_1, \ldots, \xi_n$ dont les coordonnées ξ_i satisfont à l'équation $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = b$, b étant l'une des valeurs de la fonction φ. L'isoligne b d'une fonction φ n'est pas nécessairement une ligne dans un sens plus précis du mot. Si la fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ se réduit à une constante b dans la classe K de sa définition, elle n'a qu'une seule isoligne b qui se confond avec la classe K. Si la fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ne prend une valeur b que pour un seul point $\xi_1, \ldots, \xi_n$ de la classe K, l'isoligne b coincide avec ce point. Toutes les isolignes d'une fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ uniunivoque dans la classe K se réduisent aux points isolés de K; c'est une propriété qui caractérise l'uniunivocité de φ. Nous désignerons comme *isoligne propre* une isoligne qui ne se réduit pas à un seul point. Pour qu'une fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ne soit pas uniunivoque, il faut et il suffit qu'elle ait des isolignes propres. Une fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ $(n > 1)$ continue dans un domaine C à plus d'une dimension a des isolignes propres, parce qu'elle n'est pas uniunivoque, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent.

4. Théorème. *Soit $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction qui est définie dans un domaine C et qui ne se reduit pas à une constante dans aucun environ d'un point quelconque de C. Si la fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ est continue dans le domaine C et si de plus elle satisfait à la condition*

$$\frac{f(x'_1, \ldots, x'_n) - f(x''_1, \ldots, x''_n)}{\varphi(x'_1, \ldots, x'_n) - \varphi(x''_1, \ldots, x''_n)} \geqq 0 \; (\leqq 0) \tag{2}$$

pour chaques deux points $x'_1, \ldots, x'_n$ et $x''_1, \ldots, x''_n$ du domaine C pour lesquelles on a $\varphi(x'_1, \ldots, x'_n) \neq \varphi(x''_1, \ldots, x''_n)$, $f(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Remarque. L'inégalité (2) exprime que la fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ est monotone (dans un sens large du mot) relativement à la fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$: elle ne décroît pas (ou ne croît pas), quand la fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ croît.

Démonstration. Admettons que $f(x_1, \ldots, x_n)$ ne soit pas une fonction de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ dans le domaine C. Ça signifie qu'il y a dans ce domaine deux points différents $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ pour lesquels on a simultanément

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \varphi(b_1, \ldots, b_n), \tag{3}$$

mais $f(a_1, \ldots, a_n) \neq f(b_1, \ldots, b_n)$ ou, en posant $f(a_1, \ldots, a_n) = A$ $f(b_1, \ldots, b_n) = B$,

$$f(a_1, \ldots, a_n) = A \neq B = f(b_1, \ldots, b_n). \tag{4}$$

Soit γ un nombre compris entre A et B. En vertu de la continuité de la fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ il existe dans le domaine C un point $c_1, \ldots, c_n$ pour lequel on a

$$f(c_1, \ldots, c_n) = \gamma. \tag{5}$$

Dans le cas, où on a $\varphi\ (c_1, \ldots, c_n) \neq \varphi(a_1, \ldots, a_n)$, les quotients (voir (4), (5))

$$\frac{f(a_1, \ldots, a_n) - f(c_1, \ldots, c_n)}{\varphi(a_1, \ldots, a_n) - \varphi(c_1, \ldots, c_n)} = \frac{A - \gamma}{\varphi(a_1, \ldots, a_n) - \varphi(c_1, \ldots, c_n)},$$

$$\frac{f(b_1, \ldots, b_n) - f(c_1, \ldots, c_n)}{\varphi(b_1, \ldots, b_n) - \varphi(c_1, \ldots, c_n)} = \frac{B - \gamma}{\varphi(b_1, \ldots, b_n) - \varphi(c_1, \ldots, c_n)},$$

γ étant compris entre A et B, ont des signes contraires, ce qui est contre la condition (2). Soit maintenant $\varphi(c_1, \ldots, c_n) \neq \varphi(a_1, \ldots, a_n)$. Le nombre γ étant compris entre A et B, on peut prendre un nombre positif $\varkappa$ assez petit pour que les nombres $\gamma - \varkappa$, $\gamma + \varkappa$ soient aussi compris entre A et B. En vertu de la continuité de la fonction $f(x_1. \ldots, x_n)$ on peut indiquer un tel nombre positif δ que les inégalités

$$| x_i - c_i | < \delta \; (i = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

entraînent l'inégalité

$$|f(x_1, \ldots, x_n) - f(c_1, \ldots, c_n)| < \varkappa$$

ou [voir (5)]

$$|f(x_1, \ldots, x_n) - \gamma| < \varkappa \tag{7}$$

Par hypothèse la fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ne se réduit pas à une constante dans un environ du point $c_1, \ldots, c_n$ défini par les inégalités (6). On peut donc choisir dans cet environ un tel point $\xi_1, \ldots, \xi_n$, qu'on ait

$$\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq \varphi(c_1, \ldots, c_n) = \varphi(a_1, \ldots, a_n) = \varphi(b_1, \ldots, b_n) \tag{8}$$

Ainsi, en posant

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \gamma' \tag{9}$$

on a $|\xi_i - c_i| < \delta$ $(i = 1, \ldots, n)$, d'où il suit, en vertu des inégalités (6), (7) et de l'équation (5),

$$|f(\xi_1, \ldots, \xi_n) - \gamma| < \varkappa,$$

c'est à dire [voir (9)] $|\gamma' - \gamma| < \varkappa$ ou

$$\gamma - \varkappa < \gamma' < \gamma + \varkappa$$

Donc, les nombres $\gamma - \varkappa$, $\gamma + \varkappa$ étant compris entre A et B, γ' est aussi situé entre A et B. Par suite, en ayant en vue les relations (8) et l'équation (9), on trouve que les quotiens

$$\frac{f(a_1, \ldots, a_n) - f(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{\varphi(a_1, \ldots, a_n) - \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)} = \frac{A - \gamma'}{\varphi(a_1, \ldots, a_n) - \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)},$$

$$\frac{f(b_1, \ldots, b_n) - f(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{\varphi(b_1, \ldots, b_n) - \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)} = \frac{B - \gamma'}{\varphi(a_1, \ldots, a_n) - \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)}$$

ont des signes contraires, ce qui est incompatible avec la condition (2), Donc $f(x_1, \ldots, x_n)$ est bien une fonction de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ dans le domaine C.

Remarque. Ce théorème ne présente d'interêt que si la fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ a des isolignes propres. Dans le cas contraire la fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ est uniunivoque; dans ce cas, comme il est indiqué aux paragraphes 1, 3, chaque fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ sans tenir compte de la condition (2) et indépendamment de la nature de la classe C qui ne doit pas être nécessairement un domaine dans ce cas.

Exemple. Soit à trouver une fonction holomorphe $F(z)$ dont le module ne croît (ou ne décroît) pas, quand le module de z croît. Posons

$$z = x + iy, \quad F(z) = u(x, y) + i\, v(x, y), \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \varphi(x, y),$$

$$|F(z)| = \sqrt{u^2 + v^2} = f(x, y).$$

Le module $f(x, y)$ d'une fonction holomorphe $F(z)$ est une fonction continue des variables x, y dans le domaine C où elle est définie, et le module $\varphi(x, y)$ de z n'est constant dans aucun environ d'un point quelconque du domaine C. De plus, on a par hypothèse

$$\frac{f(x', y') - f(x, y)}{\varphi(x', y') - \varphi(x, y)} \geqq 0 \quad (\leqq 0)$$

au moins que l'inégalité $\varphi(x', y') \neq \varphi(x, y)$ soits atisfaite. Ainsi les fonctions $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ remplissent toutes les conditions du théorème demontré plus haut. Par suite, le module $|F(z)|$ de la fonction cherchée doit être une fonction de $\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ou, ce qui est équivalent, une fonction de $x^2 + y^2$. Pour simplifier, nous chercherons la fonction $\log F(z)$ qui doit être aussi une fonction de $x^2 + y^2$. On aura donc, en posant $x^2 + y^2 = \Re$,

$$\log F(z) = \log |F(z)| + i \operatorname{arc} F(z) = U(x, y) + i\, V(x, y),$$
$$\log |F(z)| = U(x, y) = \psi(x^2 + y^2) = \psi(\Re).$$

La fonction $U(x, y)$ satisfaisant à l'équation de Laplace, il vient

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 4\psi''(\Re)\, x^2 + 2\psi'(\Re) + 4\psi''(\Re)\, y^2 + 2\psi'(\Re) =$$
$$= 4[\psi''(\Re) \,.\, \Re + \psi'(\Re)] = 0,$$

ou $\psi''(\Re) \,.\, \Re + \psi'(\Re) = 0$, c'est à dire $\dfrac{d[\psi'(\Re) \,.\, \Re]}{d\Re} = 0$, d'où il suit

$$\psi'(\Re) = \frac{c}{\Re},$$

c étant une constante arbirtraire réelle. En intégrant de nouveau on aura

$$\psi(\Re) = c \log \Re + \alpha,$$

α étant aussi une constante anbitraire réelle, c'est à dire

$$U(x, y) = c \log \Re + \alpha. \tag{10}$$

En tenant compte des relations

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

et de l'équation (10), on trouve

$$dV = -\frac{\partial U}{\partial y} dx + \frac{\partial U}{\partial x} dy = \frac{2c\,(x\,dy - y\,dx)}{x^2 + y^2},$$

d'où il suit en intégrant

$$V = 2c \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + \beta.$$

β étant une constante arbitraire réelle. Par suite, en posant

$$2c = m, \; |\,\Re^{\frac{1}{2}}\,| = \sqrt{x^2 + y^2} = \varrho = \varphi(x, y), \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = w, \; z = x + iy =$$
$$= \varrho(\cos w + i \sin w),$$

on trouve

$$\log F(z) = 2c \log |\,\Re^{\frac{1}{2}}\,| + 2ciw + \alpha + i\beta = m\,(\log\varrho + iw) - \alpha + i\beta,$$

d'où il suit

$$F(z) = e^{\log F(z)} = (e^{\log\varrho + iw})^m \,.\, e^{\alpha + i\beta} = A\,[\varrho(\cos w + i \sin w)]^m = Az^m.$$

A étant défini par l'équation $A = e^{\alpha + i\beta}$.

Donc la fonction cherchée $F(z)$ doit être exprimée par l'équation

$$F(z) = A\,z^m, \tag{11}$$

où A désigne une constante complexe et m une constante réelle. Réciproquement, la formule (11) donne une solution du problème proposé, la constante complexe A et la constante réelle m étant tout à fait arbitraires. En effet, pour $A = 0$ ou $m = 0$ le module de la fonction $A\,z^m$ reste constant et, par suite, ne croît pas et ne decroît pas, quand le module de z croît. Pour $A \neq 0$, $m > 0$ le module de cette fonction croît et pour $A \neq 0$, $m < 0$ il décroît toujours quand le module de z croît.

5. Dans les sciences empiriques ainsi que dans la statistique on se laisse guider par le principe suivant: si une quantité croît toujours ou décroît toujours, quand une autre quantité croît, l'une de ces deaux quantités dépend de l'autre. On voit bien que, certaines conditions indiquées au texte du théorème énoncé plus haut étant remplies, ce principe devient une vérité mathématique.

The grouping of policy values.

Dr. *A. Zelenka.*

I.

The main difficulty in the drawing up of the balance of an Insurance Company is in the ascertaining of the values of the individual policies. Since the number of cases is usually very large, we have to make our calculations as little cumbersome as possible. The actuary has to solve the problem of „grouping" policy values.

Disregarding merely approximative methods (e. g. Lidstone's Z method), we can proceed by way of grouping policies of the same kind