Hans Koeppler

Die Zurückführung einiger in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der Statistik auftretenden Integrale auf andere allgemeine Integrale

Aktuárské vědy, Vol. 1 (1930), No. 4, 145–153

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/144523

Die Zurückführung einiger in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der Statistik auftretenden Integrale auf andere allgemeine Integrale.

Von *Hans Koeppler*, Berlin.

In der Theorie der Beobachtungsfehler und in der modernen Statistik treten die vier Integrale auf

$$\frac{\sqrt{A}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-f(x,y)}\,dx\,dy = 1 \tag{I}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-f(x,y)}\,x^2\,dx\,dy = \frac{a_{22}}{2A} \tag{II}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-f(x,y)}\,y^2\,dx\,dy = \frac{a_{11}}{2A} \tag{III}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-f(x,y)}\,xy\,dx\,dy = -\frac{a_{12}}{2A}, \tag{IV}$$

in denen $f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ und $A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ ist. Die Berechnung dieser Integrale, lässt sich, wie wohl allbekannt ist, durch die Umformungen

$$f(x, y) = \frac{Ax^2 + (a_{22}y + a_{12}x)^2}{a_{22}} = \frac{Ay^2 + (a_{11}x + a_{12}y)^2}{a_{11}}$$

leicht ausführen. Ist man im Besitz gewisser bestimmter Integrale, die wohl allerdings nur seltener besprochen werden, lassen sich die Integrationen auch auf andere Weise leicht bewerkstelligen. Wie wir sehen werden, gewähren die zur Besprechung kommenden Berechnungen einen guten Einblick in die Beschaffenheit der Integrale (I) bis (IV).

Wir versuchen zunächst, die Auswertung durch Anwendung von Polarkoordinaten zu erreichen. Setzt man $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$

und beachtet, dass die Grenzen von r 0 und ∞ und die Grenzen von φ 0 und 2π sind, und dass die Jacobische Transformationsdeterminante für diese Fälle den Wert

$$\Delta = \cos\varphi \, r \cos\varphi + r \sin\varphi \sin\varphi = r$$

annimmt, so gehen die Integrale (I) bis (IV) über in die Integrale

$$\frac{\sqrt{A}}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-F(\varphi) \cdot r^2} \, r \, dr \, d\varphi \tag{Ia}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-F(\varphi) \cdot r^2} \cos^2\varphi \, r^3 \, dr \, d\varphi \tag{IIa}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-F(\varphi) \cdot r^2} \sin^2\varphi \, r^3 \, dr \, d\varphi \tag{IIIa}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-F(\varphi) \cdot r^2} \sin\varphi \cos\varphi \, r^3 \, dr \, d\varphi, \tag{IVa}$$

in welchen zur Abkürzung

$$F(\varphi) = a_{11} \cos^2\varphi + 2a_{12} \cos\varphi \sin\varphi + a_{22} \sin^2\varphi$$

gesetzt wurde. Führen wir bei der weiteren Lösung zunächst die Integration nach r aus, so erhalten wir bei Anwendung des Integrals

$$\int_0^{\infty} e^{-\varrho^2} \varrho^{2n+1} \, d\varrho = \tfrac{1}{2} n!$$

nach einigen Umformungen die Integrale

$$\frac{\sqrt{A}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{F(\varphi)} \tag{Ib}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi \, d\varphi}{[F(\varphi)]^2} \tag{IIb}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi \, d\varphi}{[F(\varphi)]^2} \tag{IIIb}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi}{[F(\varphi)]^2}. \tag{IVb}$$

Trotz Heranziehung einer recht umfangreichen Literatur konnte der Verfasser das in (Ib) auftretende Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\sin^2\varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}} \qquad \text{(V)}$$

bisher nur in einem deutschen Werke ermitteln, nämlich in dem zweiten Teil der bei Teubner in Leipzig erschienen Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential-und Integralrechnung von Prof. F. Dingeldey. Letzterer verweist auf die bekannten Werke von Ch. Hermite, Cours professé, rédigé par Andoyer, 3. Aufl. Paris 1887, und Cours d'analyse, Bd. I, Paris 1873. Der Verfasser dieses Aufsatzes hat das vorstehende Integral beispielsweise auch auf folgende Weise berechnet:

Man kann die Umformung

$$a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi = \tfrac{1}{2}(a_{11}+a_{22}) + \\ + \tfrac{1}{2}(a_{11}-a_{22})\cos 2\varphi + a_{12}\sin 2\varphi$$

vornehmen, die, wenn ferner

$$\tfrac{1}{2}(a_{11}-a_{22}) = b\cos 2\alpha,\ a_{12} = b\sin 2\alpha$$

und sohin

$$b = \sqrt{\tfrac{1}{4}(a_{11}-a_{22})^2 + a_{12}^2}$$

gesetzt wird, die weitere Umgestaltung

$$a + b\cos 2(\varphi - \alpha)$$

erfahren kann, wobei $\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22}) = a$ gesetzt ist.*)

Man hat sich nunmehr mit dem Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b\cos 2(\varphi - \alpha)} = \int_{-2\alpha}^{2\pi - 2\alpha} \frac{dz}{a + b\cos z}$$

zu beschäftigen, das, weil

$$\int_{-2\alpha}^{0} \frac{dz}{a + b\cos z} - \int_{2\pi-2\alpha}^{2\pi} \frac{dz}{a + b\cos z} = 0$$

ist, die einfachere Form

$$\int_0^{2\pi} \frac{dz}{a + b\cos z}$$

*) Diese Form lässt sich übrigens etwas schneller durch die Substitutionen

$$a_{12} = a + b\cos 2\,\alpha$$
$$a_{12} = b\sin 2\,\alpha$$
$$a_{22} = a - b\cos 2\,\alpha$$

darstellen, aus denen sich für a und b naturgemäss die gleichen Werte ergeben.

annimmt. Dieses Integral lässt sich wie z. B. in der Aufgabensammlung von Sohncke (Integralrechnung) gezeigt wird, auf verschiedene Weise berechnen. Die Reihenintegration scheint jedoch auf diesen Fall noch nicht angewendet worden zu sein. Da einerseits

$$\frac{1}{1+\frac{b}{a}\cos z} = 1 - \frac{b}{a}\cos z + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cos^2 z - \left(\frac{b}{a}\right)^3 \cos^3 z + \ldots$$

und andrerseits, wie auch Kirchhoff in seiner Optik ohne Herleitung angab,

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2K} z\,dz = 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2K} z\,dz + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2K} z\,dz\right) = \frac{1\,.\,3\ldots(2K-1)}{2\,.\,4\ldots 2K}\,2\pi,$$

und ferner noch, wie sich leicht zeigen lässt,

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2K+1} z\,dz = 0,$$

so ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \frac{dz}{a+b\cos z} = \frac{2\pi}{a}\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\left(\frac{b}{a}\right)^6 + \ldots\right]$$
$$= \frac{2\pi}{a}\left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Setzt man $a^2 = \frac{1}{4}\,(a_{11}+a_{22})^2$ und $b^2 = \frac{1}{4}\,(a_{11}-a_{22})^2 + a_{12}^2$, so folgt

$$a^2 - b^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = A.$$

Der Wert des Integrals (V) ist damit nachgewiesen, und es ergibt sich daher für das Integral (I)

$$\frac{\sqrt{A}}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{A}} = 1.\ ^{*})$$

---

*) Wendet man die Inbstitutionen

$$a_{11} = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha$$
$$a_{12} = (a-b)\cos\alpha\sin\alpha$$
$$a_{22} = a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha$$

an, in welohen

$$a = \tfrac{1}{2}\,(a_{11}+a_{22}) + \sqrt{\tfrac{1}{4}\,(a_{11}-a_{22})^2 + a_{12}^2} \text{ und}$$
$$b = \tfrac{1}{2}(a_{11}+a_{22}) - \sqrt{\tfrac{1}{4}\,(a_{12}-a_{22})^2 + a_{12}^2}$$

ist, so kommt man auf die Form

$$a\,\cos^2\,(\varphi-\alpha) + b\,\sin^2\,(\varphi-\alpha).$$

Man hat daher die Integration

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a\cos^2(\varphi-\alpha)+b\sin^2(\varphi-\alpha)} = \int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} \frac{d\psi}{a\cos^2\psi + b\sin^2\psi}$$

Aus dem soeben ermittelten Integral (V) leiten wir durch Differentiation beider Seiten nach den Koeffizienten a_{11}, a_{22} und a_{12} die weiteren Integrale ab

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{(a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi)^2} = \frac{a_{22}\,.\,\pi}{A^{3/2}} \qquad \text{(VI)}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{(a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi)^2} = \frac{a_{11}\,.\,\pi}{A^{3/2}} \qquad \text{(VII)}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi}{(a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi)^2} = -\frac{a_{12}\,.\,\pi}{A^{3/2}}, \qquad \text{(VIII)}$$

mittels derer wir für die Integrale (II), (III) und (IV) die bekannten Werte

$$\frac{\sqrt{A}}{2\pi}\cdot\frac{a_{22}\pi}{A^{3/2}} = \frac{a_{22}}{2A}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{2\pi}\cdot\frac{a_{11}\pi}{A^{3/2}} = \frac{a_{11}}{2A}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{2\pi}\left(-\frac{a_{12}\pi}{A^{3/2}}\right) = -\frac{a_{12}}{2A}.$$

erhalten.

Die Berechnung der Integrale (I) bis (IV) lässt sich wohl auch dadurch erreichen, dass man einfach $\operatorname{tg}\varphi = y/x$, also $y = x\operatorname{tg}\varphi$ setzt. Nach Einführung dieser neuen Variablen hat man nach x nur noch von 0 bis ∞ und statt nach y von $-\infty$ bis $+\infty$, nach φ von 0 bis 2π zu

aus zuführen. Mit Rinksicht auf die leicht nachweisbare Beziehnug

$$\int_{-a}^{0} \frac{d\psi}{a\cos^2\psi + b\sin^2\psi} - \int_{2\pi-a}^{2\pi} \frac{d\psi}{a\cos^2\psi + b\sin^2\psi} = 0$$

erhält man sodann

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{a\cos^2\psi + b\sin^2\psi} = \int_0^{2\pi} \frac{d\operatorname{tg}\psi}{a + b\operatorname{tg}^2\psi}$$

$$= 2\left(\int_0^{\pi/2} \frac{d\operatorname{tg} z}{a + b\operatorname{tg}^2 z} - \int_0^{\pi/2} \frac{d\operatorname{cotg} z}{a + b\operatorname{cotg}^2 z}\right)$$

$$= 4\int_0^{\infty} \frac{dy}{a + by^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{ab}} = \frac{2\pi}{\sqrt{A}}$$

wobei $A = \frac{1}{4}(a_{11} + a_{22})^2 - \frac{1}{4}(a_{11} - a_{22})^2\ a_{12}^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ ist integrieren. Da ferner $dy/d\varphi = x/\cos\varphi$, so ergeben sich die Substitutionen

$$dx\,dy = \frac{x\,dx\,d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$x^2\,dx\,dy = \frac{x^3\,dx\,d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{x^3\cos^2\varphi\,dx\,d\varphi}{\cos^4\varphi}$$

$$y^2\,dx\,dy = \frac{x^3\,\mathrm{tg}\,\varphi\,dx\,d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{x^3\sin^2\varphi\,dx\,d\varphi}{\cos^4\varphi}$$

$$xy\,dx\,dy = \frac{x^3\,\mathrm{tg}\,\varphi\,dx\,d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{x^3\sin\varphi\cos\varphi\,dx\,d\varphi}{\cos^4\varphi}.$$

Ausserdem ist

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 = (a_{11} + 2a_{12}\,\mathrm{tg}\,\varphi + a_{22}\,tg^2\,\varphi)\,x^2$$

zu setzen.

Integriert man nun nach x, was durch Einführung der neuen Variablen

$$x = \frac{\varrho}{\sqrt{a_{11} + 2a_{12}\,\mathrm{tg}\,\varphi + a_{22}\,\mathrm{tg}^2\,\varphi}}$$

erfolgt, so erhält man nach Anwendung der Formeln

$$\int_0^\infty e^{-\varrho^2}\,\varrho^{2n+1}\,d\varrho = \tfrac{1}{2}\,n!$$

und

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

wiederum die Integrale (Ib) bis (IVb).

Die betrachteten Integrale lassen sich auch noch leicht berechnen, wenn man die auf Laplace zurückzuführende Substitution $x = \xi\,.\,y$ anwendet, die allerdings erfordert, dass man zunächst die Integration nach y von $-\infty$ bis 0 beseitigt. Dies geschicht, indem man die Integrale unter Berücksichtigung, dass $dx = y\,d\xi$, umformt in

$$\frac{\sqrt{A}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^\infty \left(e^{-f(\xi)y^2} + e^{-g(\xi)y^2}\right) y\,dy \tag{Ic}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2\,d\xi \int_0^\infty \left(e^{-f(\xi)y^2} + e^{-g(\xi)y^2}\right) y^3\,dy \tag{IIc}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^\infty \left(e^{-f(\xi)y^2} + e^{-g(\xi)y^2}\right) y^3\,dy \tag{IIIc}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi\,d\xi\int\limits_{0}^{\infty}\left(e^{-f(\xi)y^2}-e^{-g(\xi)y^2}\right)y^3\,dy, \tag{IVc}$$

wobei zur Abkürzung

$$a_{22}+2a_{12}\xi+a_{11}\xi^2=f(\xi) \quad \text{und} \quad a_{22}-2a_{12}\,\xi+a_{11}\,\xi^2=g(\xi)$$

gesetzt wurde. Nach einfacher Umformung und Anwendung der mehrmals erwähnten Formel

$$\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\varrho^2}\,\varrho^{2n+1}\,d\varrho=\tfrac{1}{2}\,n!$$

gehen diese Integrale in die einfachen Integrale

$$\frac{\sqrt{A}}{2\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{f(\xi)}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{g(\xi)}\right] \tag{Id}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{2\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi^2\,d\xi}{[f(\xi)]^2}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi^2\,d\xi}{[g(\xi)]^2}\right] \tag{IId}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{2\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{[f(\xi)]^2}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{[g(\xi)]^2}\right] \tag{IIId}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{2\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi\,d\xi}{[f(\xi)]^2}-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi\,d\xi}{[g(\xi)]^2}\right] \tag{IVd}$$

über. Das in dem Ausdruck (Id) enthaltene, auch häufiger in den Lehrbüchern der Integralrechnung vorkommende Integral wird mittels der bekannten Umformung

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{a_{22}\pm 2a_{12}\,\xi+a_{11}\,\xi^2}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{a_{11}\,d\xi}{(a_{11}\,\xi\pm a_{12})^2+A}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{A+\eta^2}=\frac{\pi}{\sqrt{A}} \tag{Ie}$$

berechnet. Die in den Ausdrücken (Id) bis (IVd) auftretenden Integrale sind in dem Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis von Schlömilch (Integralrechnung) enthalten. Zwecks Darstellung der in den Ausdrücken (IId) bis (IVd) auftretenden Integrale diene der Hinweis, dass man sie aus dem Integral (Id) durch Differentiation nach den Koeffizienten a_{11}, a_{22} und a_{12} ableiten kann. Man erhält auf diese Weise

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi^2\,d\xi}{(a_{22}\pm 2a_{12}\,\xi+a_{11}\,\xi^2)^2}=\frac{\pi\,a_{22}}{2A^{3/2}} \tag{IIe}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(a_{11} \pm 2a_{12}\,\xi + a_{11}\xi^2)^2} = \frac{\pi a_{11}}{2A^{3/2}} \tag{IIIe}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi\, d\xi}{(a_{22} \pm 2a_{12}\,\xi + a_{11}\xi^2)^2} = \mp \frac{\pi a_{12}}{2A^{3/2}}. \tag{IVe}$$

Die Anwendung der Integrale (Ie) bis (IVe) auf die Ausdrücke (Id) bis (IVd) führt aber wiederum zu den Werten

$$\frac{\sqrt{A}}{2\pi}\left[\frac{\pi}{\sqrt{A}} + \frac{\pi}{\sqrt{A}}\right] = 1 \tag{If}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{2\pi}\left[\frac{\pi\, a_{22}}{2A^{3/2}} + \frac{\pi\, a_{22}}{2A^{3/2}}\right] = \frac{a_{22}}{2A} \tag{IIf}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{2\pi}\left[\frac{\pi\, a_{11}}{2A^{3/2}} + \frac{\pi\, a_{11}}{2A^{3/2}}\right] = \frac{a_{11}}{2A} \tag{IIIf}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{2\pi}\left[-\frac{\pi\, a_{12}}{2A^{3/2}} - \frac{\pi\, a_{12}}{2A^{3/2}}\right] = -\frac{a_{12}}{2A}. \tag{IVf}$$

Der Verfasser hat diese einfachere Darstellung des besseren Einblicks halber gewählt, obwohl die Substitution $x = \xi\,|y|$, wobei $|y|$ der absolute Betrag von y ist, schneller zum Ziele führt.

Unter Anwendung der von Hermite (vergl. Dingeldey) für $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ angewendeten Substitutionen kann man auch die neuen Variablen

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{1+\eta^2}} \quad \text{und} \quad y = \frac{\xi\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}$$

bilden, deren Anwendung erfordert, dass man zunächst die Integrationen nach x von $-\infty$ bis 0 beseitigt. Man hat sodann nach ξ von 0 bis ∞ und nach η von $-\infty$ bis $+\infty$ zu integrieren. Die Transformations-determinante nimmt den Wert an

$$\Delta = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\xi}{1+\eta^2},$$

und man hat daher zu setzen:

$$dx\,dy = \frac{\xi}{1+\eta^2}\, d\xi\, d\eta$$

$$x^2\,dx\,dy = \frac{\xi^3}{(1+\eta^2)^2}\, d\xi\, d\eta$$

$$y^2\,dx\,dy = \frac{\xi^3\eta^2}{(1+\eta^2)^2}\, d\xi\, d\eta$$

$$xy\,dx\,dy = \frac{\xi^3\eta}{(1+\eta^2)^2}\, d\xi\, d\eta.$$

Führt man ferner noch zur Vereinfachung die Bezeichnungen

$$f(x, y) = (a_{11} + 2a_{12}\eta + a_{22}\eta^2)\frac{\xi^2}{1+\eta^2} = \frac{f(\eta)}{1+\eta^2}\xi^2$$

und

$$f(-x, y) = (a_{11} - 2a_{12}\eta + a_{22}\eta^2)\frac{\xi^2}{1+\eta^2} = \frac{g(\eta)}{1+\eta^2}\xi^2$$

ein, so erhält man nach einigen schon bekannten Umformungen wie im vorhergehenden Fall die Integrale (Id) bis (IVd), nur dass in diesen die Urvariable jetzt durch η bezeichnet wird.

Technika československého dělnického nemocenského pojištění.

Vlad. Vydra.

V Československu z nemocenského pojištění zdomácnělo jen pojištění veřejné — povinné. Soukromé nemocenské pojištění se vůbec v československém pojišťovnictví nevyskytuje, jedině v menším měřítku setkáváme se s pojištěním dobrovolným u nositelů veřejného pojištění, a to ještě zpravidla jen na přechodu z forem pojištění povinného.

Při prohlášení republiky Československé byly převzaty zákony platící dříve v bývalém Rakousku. V nemocenském pojištění byl to zákon z r. 1888 v úpravě z roku 1917. Po stránce organisační byla tato úprava pochybená, poněvadž v republice v jejím počátku působilo celkem 2073 nemocenských pokladen, z nichž bylo:

okresních	310
závodních	832
společenstevních	487
učňovských	202
spolkových	38
zapsaných — pomocných a dobrovolných mistrovských	204

Kromě toho byly ještě zvláštní hornické nemocenské pokladny, pak pokladny státních podniků, železnic, tabákových továren atd.

Zákonem z r. 1919 byl proveden pronikavý zásah do organisace nemocenských pojišťoven. Zrušeny byly malé, rozvoje neschopné pokladny společenstevní, odstraněny byly skoro všechny pokladny závodní (zůstaly z nich pouze ty, v nichž podnik vykazoval zvláštní nebezpečí nemoci), zrušeny byly dále malé pokladny zapsané atd. Naproti tomu však pro pojištění zemědělců byl připuštěn nový typ pokladen, t. zv. okresní zemědělské.