

Alfred Tauber

Über ein Problem der Näherungsrechnung und die
Makeham'schen Rentenwerte

Aktuárské vědy, Vol. 1 (1930), No. 2, 49–61

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/144508>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>



Über ein Problem der Näherungsrechnung und die Makeham'schen Rentenwerte.

Von Prof. Dr. Alfred Tauber (Wien).

Bei der näherungsweise Darstellung einer Funktion, sei es für kleine oder grosse Werte einer Variablen x , wählt man in der Regel eine Entwicklungsform (Potenzreihe, Kettenbruch, Fakultätenreihe usw.), deren verfügbare Konstanten derart zu bestimmen sind, dass der Fehler beim Abbrechen nach irgend einer Anzahl der Entwicklungsglieder mit einer möglichst hohen Potenz von x resp. $1/x$ vergleichbar wird. Eben dadurch aber beschleunigt man oft nur für die ganz kleinen oder grossen Werte von x die Annäherung, während sich die Berechnung umso langwieriger für die übrigen gestaltet.

Eigentlich würde sich hier die (ideale) Forderung erheben, die verfügbaren Konstanten der zu wählenden Entwicklung so zu bestimmen, dass innerhalb eines vorgegebenen Intervalles der Variablen x der (relative) Fehler beim Abbrechen an einer beliebigen Stelle der Entwicklung ein möglichst kleines Maximum aufweist (das sich mit fortschreitender Entwicklung immer mehr verringern muss). In mancher Hinsicht jedoch lässt sich dem erwähnten Nachteil, wie an dem Beispiel der Berechnung bestimmter Integrale gezeigt werden soll, schon durch Nebenbedingungen für die auftretenden Konstanten entgegenwirken, indem jene Nebenbedingungen dazu dienen, um nicht nur die Grösse des Fehlers, sondern auch dessen Sinn zu beeinflussen und um die Näherungsfunktion für spezielle Werte der Variablen x festzulegen, d. h. dort in Übereinstimmung mit den genauen oder willkürlich angenäherten Werten der darzustellenden Funktion zu bringen. Durch eine solche Anpassung an den Verlauf der letzteren erreicht man nicht selten eine durchgängig bessere Annäherung, als bei den allgemeinen, unterschiedslos für alle Funktionen aufgestellten Entwicklungsformen.

Beispielweise stehen zur Berechnung des Integrallogarithmus die bekannten Entwicklungen zu Gebote

$$\begin{aligned}
 e^x \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt &= \frac{1}{x} \left[1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{(x+1)\dots(x+4)} - \frac{14}{(x+1)\dots(x+5)} + \dots \right] = \quad (1) \\
 &= e^x \left\{ \left[\frac{1}{1 \cdot 1!} - \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 3!} - \frac{1}{4 \cdot 4!} + \dots \right] - C - \lg x \right\}, \quad C = 0.577215665
 \end{aligned}$$

(x positiv grösser als Null), aber gerade in denjenigen Fällen, wo die zweite Formel schon die Berechnung ziemlich vieler Entwicklungsglieder zu erfordern beginnt, etwa bei $x > 1$, versagt die andere, um erst bei sehr viel grösserem x brauchbarer zu werden. Hingegen liefert die für dasselbe Integral nach der zu besprechenden Methode gebildete einfache Näherungsfunktion

$$\frac{1}{T} + \frac{1}{TT_1} + \frac{8/3}{TT_1T_2}, T = x + 1, T_1 = x^2 + 4x + \frac{8}{3}, T_2 = x^2 + 10x + 18 \quad (2)$$

eine sehr gute*) Annäherung für alle $x > 1$, so dass die zweite Formel (2) für die Fälle, wo sie rasch konvergiert, aufgespart bleibt.

Ähnliche Näherungsformeln wie (2) ergeben sich für die sogenannte „unvollständige Gammafunktion“ (Prym'sche Funktion) ohne Schwierigkeit aus allgemeineren Betrachtungen (vgl. unten Formel (21)).

Diese Prym'schen Funktionen treten nun auch in der Versicherungsmathematik auf. Man verdankt nämlich Makeham, ausser der Aufstellung seiner bekannten Formel für die Zahl der Lebenden einer Sterbetafel, den Nachweis, dass die Werte der zugehörigen (kontinuierlichen) Leibrenten, obzwar sie von fünf Grössen, nämlich den drei Konstanten der Makeham'schen Lebenswahrscheinlichkeiten, ferner vom Beitrittsalter und vom Zinsfuss abhängen, trotzdem auf die Berechnung einer Funktion bloss zweier Grössen, eben der Prym'schen Funktion rückführbar sind**). Es bedarf also zur Berechnung der Leibrentenwerte, bei jedem beliebigen Zinsfuss, für die Gesamtheit aller irgendwie konstruierbaren Makeham - Sterbetafeln — und, wie beizufügen, aller Sterbetafeln, deren Lebendenzahlen aus der Überlagerung verschiedener Makehamformeln entstehen — jedenfalls nur einer einzigen Tabelle mit doppeltem Eingang. Ob man eine solche Tabelle direkt für die Prym'sche Funktion oder für irgend eine andere, aus ihr abgeleitete anlegt, bleibt wohl eine Frage von geringerer theoretischer Bedeutung. Demgemäss werden hier bloss praktisch brauchbare, auf die direkte Berechnung der Leibrenten (bei einfachen Makeham-Sterbetafeln auch der Verbindungsrenten) abzielende Methoden erörtert.

Den versicherungsmathematischen Zwecken würde eine Tabelle mässigen Umfanges für die Prym'sche Funktion wohl vollkommen genügen, wenn auf die, ohnehin etwas unsicher fundierten Leibrentenwerte für die höchsten Beitrittsalter (etwa über 85 Jahre) Verzicht

*) Wie auch durch Vergleich mit der Bretschneider'schen Tabelle des Integrales $\int_x^{\infty} e^{-t} t^{-1} dt$ (Zeitschrift für Math. u. Physik Bd. 6) zu ersehen.

***) Vgl. Bohlmanns Referat (1901) über Lebensversicherungsmathematik in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. I. S. 878. Bezuber (Wahrscheinlichkeitsrechnung etc., 3. Auflage II. Band S. 267) fehlt der Hinweis auf die Autorschaft Makeham's (1874) hinsichtlich dieses Satzes über die Rentenberechnung.

geleistet würde. Hingegen wäre der Spielraum für den Zinsfuß unbeschränkt.

Der interessante von Blaschke unternommene Versuch (vgl. Czuber a. a. O.) die von Makeham intendierte Aufstellung einer Tabelle der Prym'schen Funktion durch die nach einer Standardtafel, zu den Zinsfüßen von 0.1, 0.2, 0.3, ... bis $5\frac{1}{2}$ Prozent berechneten Leibrentenwerte zu ersetzen, erreicht seinen Zweck nicht vollständig. Abgesehen davon, dass die Handhabung der Blaschke'schen Tabelle ziemlich kompliziert ist und den direkten Vergleich der Leibrentenwerte für irgend zwei Sterbetafeln untereinander nicht gestattet, ist durch die Beschränkung des Zinsfußes, die sich für eine von der Standardtafel stark abweichende Sterbetafel noch verstärken kann, ihre Anwendbarkeit beeinträchtigt. Auch wurden die ganzjährig zahlbaren Leibrenten, anstatt wie genauer gewesen wäre, die kontinuierlichen verwendet. Bei Überlagerung mehrerer Makeham-Formeln würden sich diese Mängel nur noch akzentuieren.

§ 1. Die Aufgabe der näherungsweise Darstellung des Integrales $\int_x^\infty f(t)dt$, wo x eine positive Grösse vorstellt, oder allgemeiner des Pro-

duktes $\varphi(x) = \psi(x) \int_x^\infty f(t)dt$ des angeführten Integrales mit irgend einer

Funktion $\psi(x)$ erfährt häufig durch die Betrachtung einer Differentialgleichung 1. Ordnung eine Vereinfachung. Aus der Definition von $\varphi(x)$ folgt

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{1}{\psi(x)} \frac{d\varphi(x)}{dx} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)^2} \frac{d\psi(x)}{dx} = -f(x) \quad (3)$$

und hieraus, durch Multiplikation der letzten Gleichung mit $F(x)\psi(x)$, wo $F(x)$ eine beliebig gewählte Funktion ist,

$$F(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} - G(x)\varphi(x) + H(x) = 0, \quad (3a)$$

mit den Bedingungen für $F:G:H$

$$\frac{G(x)}{F(x)} = \frac{1}{\psi(x)} \frac{d\psi(x)}{dx}, \quad \frac{H(x)}{F(x)} = f(x)\psi(x). \quad (3b)$$

Umgekehrt genügt dieser Differentialgleichung (3a), unter gewissen Konvergenzbedingungen, die Funktion

$$\varphi(x) = \psi(x) \int_x^\infty f(t)dt \text{ bei } \int \frac{G(x)}{F(x)} dx = \lg \psi(x), \frac{H(x)}{F(x)\psi(x)} = f(x). \quad (4)$$

Von der nunmehr zum Ausgangspunkt dienenden Differentialgleichung (3a) wird indes einschränkend vorausgesetzt, dass $F(x)$,

$G(x)$, $H(x)$ Polynome von x bedeuten, und zwar soll $F(x)$ sowohl als $G(x)$ von höherem Grade sein als $H(x)$, hingegen der Grad von $F(x)$ denjenigen von $G(x)$ nicht oder höchstens um 1 übersteigen (Ausserdem sollen die höchsten in $F(x)$, $G(x)$ vorkommenden Potenzen von x positive Koeffizienten besitzen, damit $\varphi(x)$ für grosse x der Null zustrebt).

Bezeichnet jetzt n die Differenz der Grade von $G(x)$ und $H(x)$, ferner $T(x) = x^n + \dots$ ein passend zu wählendes Polynom eben dieses Grades n , und β eine zu wählende Konstante, so kann

$$\varphi(x) = \frac{\beta + \varphi_1(x)}{T(x)}$$

gesetzt werden, wodurch die Differentialgleichung (3a) übergeht in

$$F(x) \left[\frac{1}{T(x)} \frac{d\varphi_1(x)}{dx} - \frac{\beta + \varphi_1(x)}{T(x)^2} \frac{dT(x)}{dx} \right] - G(x) \frac{\beta + \varphi_1(x)}{T(x)} + H(x) = 0. \quad (5)$$

Mit $T(x)^2$ multipliziert, liefert dies für die neu eingeführte Funktion $\varphi_1(x)$ ebenfalls eine Differentialgleichung

$$F_1(x) \frac{d\varphi_1(x)}{dx} - G_1(x)\varphi_1(x) + H_1(x) = 0$$

$$F_1(x) = F(x)T(x), \quad G_1(x) = G(x)T(x) + F(x) \cdot \frac{dT(x)}{dx} \quad (5a)$$

$$H_1(x) = H(x)T(x)^2 - \beta \left[G(x)T(x) + F(x) \frac{dT(x)}{dx} \right],$$

und nun hat die Wahl von β und $T(x)$ derart zu geschehen, dass die Polynome $F_1(x)$, $G_1(x)$, $H_1(x)$ genau dieselben Bedingungen erfüllen, wie sie $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ auferlegt wurden. Hiedurch entsteht die zur früheren analoge Aufgabe, ein Polynom $T_1(x) = x^{n_1} + \dots$, wenn n_1 die Differenz der Grade von $G_1(x)$ und $H_1(x)$ ist, sowie eine Konstante β_1 passend zu wählen, um

$$\varphi_1(x) = \frac{\beta_1 + \varphi_2(x)}{T_1(x)} \quad (6)$$

setzen zu können, und weiter so fortfahrend

$$\varphi_2(x) = \frac{\beta_2 + \varphi_3(x)}{T_2(x)}, \dots, \varphi_\nu(x) = \frac{\beta_\nu + \varphi_{\nu+1}(x)}{T_\nu(x)} \quad (6a)$$

zu einer Entwicklung von $\varphi(x)$ zu gelangen

$$\varphi(x) = \frac{\beta}{T(x)} + \frac{\beta_1}{T(x)T_1(x)} + \frac{\beta_2}{T(x)T_1(x)T_2(x)} + \dots \quad (7)$$

Zu den charakteristischen Eigenschaften dieser Entwicklung (7) gehört, dass in dem ganzen Intervall, in welchem sie gelten soll, die Polynome T , T_1 , T_2 , ... nicht verschwinden, d. h. ihr Vorzeichen nicht ändern dürfen, aber auch die Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_\nu(x)$, ...

ihr Vorzeichen beibehalten müssen, weil sonst ja, wenn beispielsweise $\varphi_\nu(x)$ sowohl positive als negative Werte besitzen dürfte, die Summe der ersten ν Terme in (7) für manche Werte von x zu klein, für andere zu gross gegenüber dem wahren Werte von $\varphi(x)$ ausfallen würde, so dass der nächstfolgende Term $\beta_\nu/TT_1 \dots T_\nu$ den Fehler für die eine der beiden Kategorien vergrössern müsste, was die Brauchbarkeit der Entwicklung in Frage stellt.

Höchstens in dem Falle, dass man die Entwicklung mit dem ν -ten Gliede abbrechen will, darf von dieser Bedingung bezüglich der Funktion $\varphi_\nu(x)$ abgesehen werden, nicht aber bezüglich der vorangehenden Funktionen

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{\nu-1}(x).$$

Die Koeffizienten der die Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ definierenden Differentialgleichungen sind allerdings wohl kaum independent, sondern nur rekurrierend darzustellen, was aber keineswegs die Möglichkeit zu verhindern brauchte, über Eigenschaften dieser Funktionen Aussagen machen zu können. Nennt man F_ν, G_ν, H_ν die Koeffizienten der Differentialgleichung von $\varphi_\nu(x)$

$$F_\nu(x) \frac{d\varphi_\nu(x)}{dx} - G_\nu(x) \varphi_\nu(x) + H_\nu(x) = 0, \quad (8)$$

so folgt durch die Substitution $\varphi_\nu(x) = \frac{\beta_\nu + \varphi_{\nu+1}(x)}{T_\nu(x)}$ in Analogie zu (5a) als Rekursion für die Koeffizienten $F_{\nu+1}, G_{\nu+1}, H_{\nu+1}$

$$F_{\nu+1}(x) = F_\nu(x)T_\nu(x), \quad G_{\nu+1}(x) = G_\nu(x)T_\nu(x) + F_\nu(x) \frac{dT_\nu(x)}{dx} \quad (9)$$

$$H_{\nu+1}(x) = H_\nu(x)T_\nu(x)^2 - \beta_\nu \left[G_\nu(x) T_\nu(x) + F_\nu(x) \frac{dT_\nu(x)}{dx} \right]. \quad (9a)$$

Auch eine Abschätzung des Fehlers, der beim Abbrechen mit dem ν -ten Gliede der Entwicklung (7) entsteht, wird mittels der Koeffizienten $F_\nu(x), G_\nu(x), H_\nu(x)$ ermöglicht, es ist analog (4)

$$\varphi_\nu(x) = \psi_\nu(x) \int_x^\infty \frac{H_\nu(t) dt}{F_\nu(t) \psi_\nu(t)}, \quad \lg \psi_\nu(x) = \int \frac{G_\nu(x) dx}{F_\nu(x)}, \quad (10)$$

wenn also das Maximum des Absolutbetrages $|H_\nu(t)/F_\nu(t)|$ im Intervall $t = x$ bis ∞ unterhalb der Grösse ϵ_ν bleibt, so muss $|\varphi_\nu(x)|$ kleiner als

$$\epsilon_\nu \psi_\nu(x) \int_x^\infty \frac{dt}{\psi_\nu(t)} \text{ sein.}$$

§ 2. Die weitere Betrachtung werde auf das Beispiel der Prym'schen Funktion abgestellt:

$$\varphi(x, \alpha) = e^x x^{\alpha-1} \int_x^\infty e^{-t} t^{-\alpha} dt. \quad (11)$$

Als Spielraum für die hier auftretende Konstante α reicht ein irgendwie gewähltes Intervall von der Länge 1 aus, weil $\varphi(x, \alpha)$ und $\varphi(x, \alpha + 1)$ in dem Zusammenhang

$$\varphi(x, \alpha) = \frac{1 - \alpha\varphi(x, \alpha + 1)}{x}, \quad \varphi(x, \alpha + 1) = \frac{1 - x\varphi(x, \alpha)}{\alpha} \quad (11a)$$

stehen, wie sofort aus dem Satz von der partiellen Integration folgt

$$\varphi(x, \alpha) = e^x x^{\alpha-1} \int_x^{\infty} t^{-\alpha} d(-e^{-t}) = e^x x^{\alpha-1} [x^{-\alpha} \cdot e^{-x} + \int_x^{\infty} (-\alpha t^{-\alpha-1}) e^{-t} dt].$$

Am einfachsten erscheint es, α zwischen 0 und 1, oder, vielleicht noch zweckmässiger für die angenäherte Berechnung von $\varphi(x, \alpha)$ zwischen 1 und 2 anzunehmen. Dann liefert die Theorie der Prym'schen Funktionen (deren sonstige Details hier nicht weiter in Betracht kommen) eine das ganze Intervall für α von Null bis 2 umfassende, aber nur für nicht zu grosse Werte von x brauchbare Entwicklung

$$\varphi(x, 1 + \vartheta) = e^x \left[\frac{(1 - x^\vartheta \Gamma(1 - \vartheta))}{\vartheta} + \frac{1}{1 - \vartheta} \frac{x}{1!} - \frac{1}{2 - \vartheta} \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3 - \vartheta} \frac{x^3}{3!} - \dots \right], \quad (12)$$

wo ϑ zwischen -1 und $+1$ variieren kann. Die Werte der Euler'schen Γ -Funktion sind aus Tabellenwerken zu entnehmen.

Auch wenn ϑ sehr nahe bei Null liegt bleibt nach den Elementarsätzen über die Euler'schen Integrale der Term

$$\frac{1 - x^\vartheta \Gamma(1 - \vartheta)}{\vartheta} = \frac{1 - \Gamma(1 - \vartheta)}{\vartheta} + \frac{1 - x^\vartheta}{\vartheta} \Gamma(1 - \vartheta)$$

endlich, und für $\vartheta \rightarrow 0$ geht die Formel (12) in die zweite Formel (1) über. Ist anderseit ϑ nahe 1, oder α nahe 2, so benützt man am einfachsten die Formel (11a) in der Gestalt $\varphi(x, \alpha) = \frac{1 - x\varphi(x, \alpha - 1)}{\alpha - 1}$

um wieder auf den vorigen Fall zurückzukommen.

Nun bleibt noch die Frage der Entwicklung von $\varphi(x, \alpha)$ für diejenigen Werte von x , welche eine bestimmte Untergrenze x_0 haben. Da die Differentialgleichung für $f(x, \alpha)$ gemäss (3).

$$\frac{d}{dx} \frac{\varphi(x, \alpha)}{e^x x^{\alpha-1}} = \frac{1}{e^x x^{\alpha-1}} \frac{d\varphi(x, \alpha)}{dx} - \left[\frac{1}{e^x x^{\alpha-1}} + \frac{\alpha-1}{e^x x^\alpha} \right] \varphi(x, \alpha) = -e^{-x} x^{-\alpha} \quad (13)$$

lautet, oder nach Multiplikation mit $e^x x^\alpha$

$$x \frac{d\varphi(x, \alpha)}{dx} - (x + \alpha - 1) \varphi(x, \alpha) + 1 = 0 \quad (14)$$

liegt hier betreffs der Formel (3a) das Beispiel vor

$$F(x) = x, \quad G(x) = x + \alpha - 1, \quad H(x) = 1, \quad n = 1 \quad (14a)$$

und nach Formel (5) ist zu setzen

$$\varphi(x, \alpha) = \frac{\beta + \varphi_1(x, \alpha)}{T(x, \alpha)}, \quad T(x, \alpha) = x + \varrho, \quad \varrho = \text{const.} \quad (15)$$

wodurch für $\varphi_1(x, \alpha)$ eine Differentialgleichung, vgl. (5a), mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} F_1(x) &= x(x + \varrho), \quad G_1(x) = x^2 + x(\varrho + \alpha) + \varrho(\alpha - 1) \\ H_1(x) &= (x + \varrho)^2 - \beta[x^2 + x(\varrho + \alpha) + \varrho(\alpha - 1)] \end{aligned} \quad (16)$$

resultiert. Damit aber wiederum der Grad von $H_1(x)$ geringer als der von $F_1(x)$, $G_1(x)$ ausfällt, muss $\beta = 1$ gewählt werden, sodass

$$H_1(x) = x(\varrho - \alpha) + \varrho(\varrho + 1 - \alpha) \quad (16a)$$

wird. Entweder soll jetzt $H_1(x)$ für grosse Werte von x positiv oder negativ sein: Im ersteren Falle genügt es, für ϱ den kleinstmöglichen Wert $\varrho = \alpha$ zu nehmen, und $H_1(x)$ reduziert sich für alle x auf die positive Konstante α . Im letzteren Falle reicht es aus zu bewirken, dass $H_1(x_0)$ negativ ausfällt, d. h. der Ungleichung entsprechend

$$x_0(\varrho - \alpha) + \varrho(\varrho - \alpha + 1) < 0, \quad \varrho < \alpha$$

ϱ zu wählen. Jedoch wird diese letztere Wahl von ϱ hier nicht weiter verfolgt, sondern $\varrho = \alpha$ genommen. Dann ist $F_1(x)$, $G_1(x)$ quadratisch, $H_1(x)$ konstant

$$F_1(x) = x(x + \alpha), \quad G_1(x) = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - \alpha, \quad H_1(x) = \alpha \quad (16b)$$

somit muss bei dem nächsten Schritt der Entwicklung

$$\varphi_1(x, \alpha) = \frac{\beta_1 + \varphi_2(x, \alpha)}{T_1(x, \alpha)}$$

der Nenner $T_1(x)$ den zweiten Grad in x besitzen.

Aber auch bezüglich der Polynome $T_2(x)$, $T_3(x)$, ... wird im Folgenden nur der Fall betrachtet, das jedes unter ihnen vom zweiten Grad in x , d. h. in der Entwicklung (6a)

$$\varphi_\nu(x, \alpha) = \frac{\beta_\nu + \varphi_{\nu+1}(x, \alpha)}{T_\nu(x, \alpha)}, \quad T_\nu(x, \alpha) = x^2 + \varrho_\nu x + \sigma_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

zu setzen ist. Dies hat zur Voraussetzung, dass der Grad von $G_\nu(x)$ denjenigen von $H_\nu(x)$ um 2 übersteigt, sonach werden, wie man leicht abzählt, die Grade von F_ν , G_ν , H_ν gleich 2ν , 2ν , $2\nu - 2$ (für $\nu = 1, 2, \dots$).

Die Konstanten β_ν und ϱ_ν sind aber bereits durch die Forderung, dass $H_{\nu+1}(x)$ den Grad 2ν besitzen soll, fixiert. Denkt man sich nämlich $F_\nu(x)$, $G_\nu(x)$, $H_\nu(x)$ nach Potenzen von x entwickelt

$$\begin{aligned} F_\nu(x) &= x^{2\nu} + F_{\nu 1} x^{2\nu-1} + \dots \\ G_\nu(x) &= x^{2\nu} + G_{\nu 1} x^{2\nu-1} + \dots \\ H_\nu(x) &= H_{\nu 0} x^{2\nu-2} + H_{\nu 1} x^{2\nu-1} + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

so folgt, gemäss (9), für $H_{\nu+1}(x)$ der Ausdruck

$$(H_{v_0}x^{2v-2} + H_{v_1}x^{2v-3} + \dots)(x^4 + 2\varrho_v x^3 + \dots) - \\ - \beta_v [(x^{2v} + G_{v_1}x^{2v-1} + \dots)(x^2 + \varrho_v x + \sigma_v) + \\ + x^{2v} + F_{v_1}x^{2v-1} + \dots](2x + \varrho_v)]$$

und damit derselbe wie verlangt, den Grad $2v$ besitzt, müssen die Koeffizienten von x^{2v+2} , x^{2v+1}

$$H_{v_0} - \beta_v, (H_{v_1} + 2\varrho_v H_{v_0}) - \beta_v (G_{v_1} + \varrho_v + 2)$$

verschwinden, es sind also $\beta_v \varrho_v$ nicht mehr willkürlich wählbar, sondern fixiert durch

$$\beta_v = H_{v_0}, \quad \varrho_v = G_{v_1} + 2 - \frac{H_{v_1}}{H_{v_0}}. \quad (18a)$$

Danach ist für $v = 1$, vgl. (16b)

$$\beta_1 = \alpha, \quad \varrho_1 = 2\alpha + 2. \quad (18b)$$

Die noch zu lösende Aufgabe besteht nun darin, die bisher offen gelassenen Konstanten $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ passend zu wählen. Es könnte z. B. als Bedingung gestellt werden, dass jedes σ_k (eventuell unter Erfüllung gewisser Nebendingungen) den kleinsten Wert besitzen soll, für den sowohl $T_k(x)$ als $H_{k+1}(x)$ positiv für alle $x > x_0$ ausfällt, oder noch allgemeiner, dass die ersten k der Grössen $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ entsprechend dieser Bedingung zu bestimmen sind, hingegen die übrigen $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_v$ — wofern die Entwicklung mit dem $(v+1)$ -ten Term abgebrochen wird — durch die Forderung, dass die Summe der ersten $v+1$ Terme

$$\frac{\beta}{T(x)} + \frac{\beta_1}{T(x)T_1(x)} + \dots + \frac{\beta_v}{T(x)T_1(x)\dots T_v(x)} \quad (19)$$

für v - k spezielle Werte von x mit dem genauen oder angenäherten Werte von $\varphi(x, \alpha)$ zusammenfällt.

Um beispielsweise die Fragestellung für $k=1$ zu formulieren: Nach Ausrechnung der Polynome $F_2(x), G_2(x), H_2(x)$, welche unter Benützung von (9) und (18b)

$$F_2(x) = x(x + \alpha) [x^2 + (2\alpha + 2)x + \sigma_1],$$

$$G_2(x) = x^4 + (4\alpha + 4)x^3 + (\sigma_1 + 5\alpha^2 + 7\alpha + 2)x^2 + 2\alpha(\sigma_1 + \alpha^2 - \alpha)x + \sigma_1(\alpha^2 - \alpha), \quad (20)$$

$$H_2(x) = \alpha x^2(\sigma_1 - \alpha^2 + \alpha + 2) + 2\alpha[(\alpha + 2)\sigma_1 - \alpha^2(\alpha + 1)]x + \alpha\sigma_1(\sigma_1 - \alpha^2 + \alpha)$$

ergibt, die Konstante σ_1 kleinstmöglich derart zu wählen, dass sowohl $T_1(x) = x^2 + (2\alpha + 2)x + \sigma_1$ als $H_2(x)$ für alle $x > x_0$ das positive Vorzeichen besitzt, d. h. es muss $T_1(x_0)$ positiv sein und $H_2(x)$ darf keine positive Wurzel grösser als x_0 haben. Hierzu ist noch die Darstellung der zur Bestimmung der Wurzeln von $H_2(x) = 0$ in Betracht kommenden Grösse

$$H_{21}^2 - 4H_{20}H_{22} = -4\alpha^2[\sigma_1 - \alpha^2 - \alpha][\sigma_1^2 - \sigma_1(2\alpha^2 + \alpha + 2) + \alpha^3(\alpha + 1)]$$

auszuführen. Im Folgenden wird aber das Problem nur in seiner einfachsten Form erörtert, wonach einerseits lediglich $T(x) = x + \alpha$ fixiert, anderseits den Konstanten σ_1, σ_2 die Bedingung auferlegt wird, dass die Summe der ersten drei Glieder der Entwicklung (19) für zwei Werte x_0, x_1 , von x (genau oder näherungsweise) mit $\varphi(x, \alpha)$ übereinstimmt. Da sich nach (18a) die Grössen β_2 und ρ_2 durch σ_1 ausdrücken lassen

$$\beta_2 = \alpha[\sigma_1 - \alpha^2 + \alpha + 2], \rho_2 = 4\alpha + 6 - 2 \frac{(\alpha + 2)\sigma_1 - \alpha^2(\alpha + 1)}{\sigma_1 - \alpha^2 + \alpha + 2} \quad (20a)$$

lauten die ersten drei Glieder der Entwicklung (19)

$$\frac{1}{x + \alpha} \left[1 + \frac{\alpha}{x^2 + \rho_1 x + \sigma_1} + \frac{\alpha(\sigma_1 - \alpha^2 + \alpha + 2)}{(x_1^2 + \rho_1 x + \sigma_1)(x^2 + \rho_2 x + \sigma_2)} \right] \quad (21)$$

und nun sind die beiden Unbekannten σ_1, σ_2 derart zu bestimmen, dass der Ausdruck (21) für $x = x_0, x_1$ die vorgegebenen Werte $\bar{\varphi}(x_0, \alpha), \bar{\varphi}(x_1, \alpha)$ annimmt. (Der kleine Horizontalstrich über dem Funktionszeichen φ charakterisiert die nach Willkür angenäherte Übereinstimmung mit $\varphi(x_0, \alpha)$ resp. $\varphi(x_1, \alpha)$.) Diese Aufgabe erfordert die Auflösung einer Gleichung 3. Grades.

Führt man nämlich statt der gesuchten Grössen σ_1, σ_2 zwei andere τ, τ' ein

$$\tau = \sigma_1 - \alpha^2 + \alpha + 2, \tau' = \sigma_2(\sigma_1 - \alpha^2 + \alpha + 2) \quad (22)$$

und ausserdem die, von τ, τ' unabhängigen Funktionen

$$\mathfrak{A}(x, \alpha) = x^2 + \rho_1 x, \mathfrak{B}(x, \alpha) = x^2 + \rho_1 x + \alpha^2 - \alpha - 2 \quad (23)$$

so wird unter Berücksichtigung der aus (20a) leicht abzuleitenden Beziehung zwischen σ_1, σ_2

$$\sigma_2 = \sigma_1 \left(1 + \frac{4}{\tau} \right) \quad (24)$$

der Ausdruck (21) gleich

$$\frac{1}{x + \alpha} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{\tau + \mathfrak{B}(x, \alpha)} + \frac{\alpha\tau}{[\tau + \mathfrak{B}(x, \alpha)][\mathfrak{A}(x, \alpha) + \frac{4\rho_1 x}{\tau} + \frac{\tau'}{\tau}]} \right\}$$

und damit sein Wert gleich $\bar{\varphi}(x_0, \alpha), \bar{\varphi}(x_1, \alpha)$ für $x = x_0, x_1$ werde, haben τ, τ' die beiden Gleichungen zu erfüllen

$$\frac{(x_0 + \alpha)\bar{\varphi}(x_0, \alpha) - 1}{\alpha} = \frac{1}{\tau + \mathfrak{B}(x_0, \alpha)} + \frac{\tau^2}{[\tau_0 + \mathfrak{B}(x_0, \alpha)][(\tau\mathfrak{A}(x_0, \alpha) + 4\rho_1 x_0 + \tau')}]}$$

$$\frac{(x_1 + \alpha)\bar{\varphi}(x_1, \alpha) - 1}{\alpha} = \frac{1}{\tau + \mathfrak{B}(x_1, \alpha)} + \frac{\tau^2}{[\tau + \mathfrak{B}(x_1, \alpha)][\tau\mathfrak{A}(x_1, \alpha) + 4\rho_1 x_1 + \tau']}$$

Bezeichnet man hierin der Kürze halber die linken Seiten mit γ_0, γ_1 und $\mathfrak{A}(x_0, \alpha), \mathfrak{A}(x_1, \alpha), \mathfrak{B}(x_0, \alpha), \mathfrak{B}(x_1, \alpha)$ der Reihe nach mit $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1$ so erhalten diese Gleichungen die Gestalt

$$\gamma_0(\tau + \mathfrak{B}_0) - 1 = \frac{\tau^2}{\mathfrak{A}_0\tau + 4\varrho_1x_0 + \tau'},$$

$$\gamma_1(\tau + \mathfrak{B}_1) - 1 = \frac{\tau^2}{\mathfrak{A}_1\tau + 4\varrho_1x_1 + \tau'},$$

oder, nach Entfernung der Nenner

$$\begin{aligned} [\gamma_0(\tau + \mathfrak{B}_0) - 1] [\mathfrak{A}_0\tau + 4\varrho_1x_0 + \tau'] &= \tau^2, \\ [\gamma_1(\tau + \mathfrak{B}_1) - 1] [\mathfrak{A}_1\tau + 4\varrho_1x_1 + \tau'] &= \tau^2 \end{aligned}$$

voraus durch Multiplikation mit $\gamma_1(\tau + \mathfrak{B}_1) - 1$ resp. $\gamma_0(\tau + \mathfrak{B}_0) - 1$ und nachherige Subtraktion eine Gleichung für τ allein folgt:

$$\begin{aligned} [\gamma_0(\tau + \mathfrak{B}_0) - 1] [\gamma_1(\tau + \mathfrak{B}_1) - 1] [(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_0)\tau + 4\varrho_1(x_1 - x_0)] &= \\ = \tau^2 [\gamma_0(\tau + \mathfrak{B}_0) - \gamma_1(\tau + \mathfrak{B}_1)]. \end{aligned}$$

Zur leichteren Auswertung der Koeffizienten berechnet man vorher noch die Grössen

$$b_0 = 1 - \gamma_0\mathfrak{B}_0, \quad b_1 = 1 - \gamma_1\mathfrak{B}_1, \quad \varrho' = 4\varrho_1(x_1 - x_0) \quad (26)$$

und hat schliesslich eine Gleichung 3. Grades*) für τ

$$\begin{aligned} 0 = \tau^3 [(\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_0)\gamma_0\gamma_1 + \gamma_1 - \gamma_0] + \\ + \tau^2 [b_0 - b_1 - (\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_0)(b_0\gamma_1 + b_1\gamma_0) + \varrho'\gamma_0\gamma_1] - \\ - \tau [\varrho'(b_0\gamma_1 + b_1\gamma_0) - (\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_0)b_0b_1] + \varrho'b_0b_1 \end{aligned} \quad (27)$$

deren Auflösung auch die gesuchten Konstanten σ_1, σ_2 mittels der Gleichungen (22) liefert

$$\sigma_1 = \tau + \alpha^2 - \alpha - 2 \quad (28)$$

$$\sigma_2 = \frac{\tau'}{\tau} = \frac{\tau}{\gamma_0\tau - b_0} - \mathfrak{A}_0 = \frac{4\varrho_1x_0}{\tau}.$$

Ausserdem müssen σ_1, σ_2 der oben gestellten Forderung entsprechen, dass T_1, T_2 im Intervall x_0 bis ∞ nicht verschwinden.

Die rechnerische Durchführung der bisher abgeleiteten Formeln für den Fall $\alpha = 1$, unter der Annahme $x_0 = 1, x_1 = 2$ zeigt, dass nicht die möglichst genaue Anpassung der Näherungsfunktion (21) an die Funktion $\varphi(x, 1)$ an diesen Stellen $x_0 = 1, x_1 = 2$ das kleinste Fehlermaximum hervorbringt, sondern eine bloss angenäherte. Demgemäss erscheinen $\overline{\varphi}(1, 1), \overline{\varphi}(2, 1)$ bei Verwendung der in der Einleitung angeführten Konstantenwerte $\sigma_1 = \frac{2}{3}, \sigma_2 = 18, \tau = \frac{8}{3}$ mit einem relativen Fehler von ungefähr $2 \cdot 10^{-6}$ (zu gross) resp. $2 \cdot 10^{-5}$ (zu klein) behaftet.

*) In ganz derselben Weise bestimmt man, wenn $T(x), T_1(x), \dots, T_{k-1}(x)$ vorgegeben sind, $T_k(x)$ und $T_{k+1}(x)$ aus der Bedingung, dass für die zwei Werte x_0, x_1 von x die Summe der ersten $k+2$ Terme von (19) mit $\varphi(x, a)$ übereinstimmt.

Aber auch schon die Formel (21) verdient, bei fixem a und veränderlichem x , den Vorzug vor der bekannten Fakultätenreihe für $\varphi(x, a)$, vgl. Schlömilch, Kompendium der höh. Analysis 2. Bd. 2, Auflage (1874), S. 266. Die letztere schreibt Blaschke irrtümlich dem Versicherungsmathematiker Laudi zu.

Will man jetzt für irgend ein anderes α zwischen 1 und 2, ebenfalls bei $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ die Konstanten σ_1 , σ_2 bestimmen, so empfiehlt es sich, bezüglich des Fehlers von $q(1, \alpha)$ $q(2, \alpha)$ eine mit derjenigen beim Fall $\alpha = 1$ konforme Annahme zu machen, damit nicht die Möglichkeit verloren geht, den Zusammenhang der Grössen σ_1 , σ_2 mit α , unter sonst gleichen Voraussetzungen, zu erkennen.

Hienach ergeben sich für die Fälle $\alpha = \frac{3}{2}$ und $\alpha = 2$ bei $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ als Werte der Konstanten

$$\begin{aligned} \tau &= 2.7, \quad \sigma_1 = 1.45, \quad \sigma_2 = 45.13 & (\alpha = \frac{3}{2}) \\ \tau &= 2.78, \quad \sigma_1 = 2.78, \quad \sigma_2 = 72.37 & (\alpha = 2) \end{aligned} \quad (29)$$

was bereits die sehr geringe Variabilität der Grösse τ im ganzen Intervall $\alpha = 1$ bis 2 zeigt (von 2.666 . . . bis 2.78). Man könnte also z. B. die Grösse τ in ihrer Abhängigkeit von α angenähert durch dasjenige quadratische Polynom von α definieren, welches für $\alpha = 1, \frac{3}{2}, 2$ die Werte 2.666 . . . , 2.7, 2.78 besitzt, bei strengerer Rechnung aber τ gleich der dem Werte dieses Polynoms nächstbenachbarten Wurzel von (27) setzen.

Im allgemeinen verringert sich bei Anwendung der Formel (21) der relative Fehler mit wachsendem x und der Genauigkeitsgrad ist, bei α zwischen 1 und 2, ungefähr derselbe wie bei $\alpha = 1$ und gleichem x .

Von weiteren Kalkulationen auf Grund der eben erhaltenen Werte wird indes hier abgesehen, weil vielleicht noch besser geeignete Wahlen von x_0 , x_1 , τ_1 , τ_2 existieren könnten.

§ 3. Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen der bisher betrachteten Aufgabe der Berechnung der Prym'schen Funktion und der Aufgabe, die (kontinuierlichen) Leibrentenwerte nach irgend einer Sterbetafel, deren Lebendenzahl beim Alter x durch eine oder mehrere Makeham-Formeln dargestellt ist

$$l_x = ks^x g^{c^x} + k_1 s_1^x g_1^{c_1^x} + \dots, \quad c, c_1 \dots > 1, \quad g, g_1, \dots < 1 \quad (30)$$

zu berechnen. Denn die allgemeine Formel für den Wert a^x der kontinuierlichen Leibrente von Jahresausmasse 1

$$l_x \bar{a}_x = \int_0^{\infty} l_{x+u} v^u du, \quad (31)$$

wobei x das Beitrittsalter und v der Abzinsungsfaktor ist, geht, wenn l_{x+u} durch die Formel (30) bestimmt wird, in eine Summe von Integralen über

$$l_x \bar{a}_x = ks^x \int_0^{\infty} (sv)^u g^{c^{x+u}} du + k_1 s_1^x \int_0^{\infty} (s_1 v)^u g_1^{c_1^{x+u}} du + \dots, \quad (32)$$

deren jedes sich auf eine Prym'sche Funktion zurückführen lässt. Man braucht, um dies für das erste Integral zu zeigen, nur $g^{c^{x+u}} = e^{-t}$ oder

umgekehrt

$$t = -c^{x+u} \lg g = \xi c^u, \quad \xi = -c^x \lg g \quad (33)$$

zu setzen, so folgt aus der Beziehung zwischen t , u , nachdem ξ eine wesentlich positive Grösse vorstellt, dass den Grenzen $0, \infty$ von u die neuen Grenzen $t = \xi, \infty$ entsprechen. Daher verschafft die Einführung der neuen Integrationsvariablen t wegen

$$t = \xi c^u, \quad u = \frac{\lg(t/\xi)}{\lg c}, \quad du = \frac{dt}{t \lg c}$$

und wenn man auch $(sv)^u$ durch t ausdrückt

$$(sv)^u = e^{u \lg(sv)} = \left(\frac{t}{\xi}\right)^{\frac{\lg(sv)}{\lg c}}$$

dem ersten Integral in (32) die Gestalt

$$\int_{\xi}^{\infty} \left(\frac{t}{\xi}\right)^{\frac{\lg(sv)}{\lg c}} \cdot \frac{e^{-t} dt}{t \lg c} \quad (34)$$

oder weiters, wenn noch zur Abkürzung $\alpha = 1 - \frac{\lg(sv)}{\lg c}$ gesetzt wird

$$\frac{\xi^{\alpha-1}}{\lg c} \int_{\xi}^{\infty} t^{-\alpha} e^{-t} dt = \frac{e^{-\xi} \varphi(\xi, \alpha)}{\lg c} = \frac{g^{c^x} \varphi(\xi, \alpha)}{\lg c} \quad (35)$$

Nimmt man die analoge Umformung bei jedem der übrigen Integrale in (32) vor, so gelangt man, wie behauptet, zu einer Darstellung von \bar{a}_x durch Prym'sche Funktionen

$$\bar{a}_x = \frac{k s^x g^{c^x}}{\lg c} \varphi(\xi, \alpha) + \frac{k_1 s_1^x g_1^{c_1^x}}{\lg c_1} \varphi(\xi_1, \alpha_1) + \dots, \quad (36)$$

$$\xi = -c^x \lg g, \quad \alpha = 1 - \frac{\lg(sv)}{\lg c} = 1 - \frac{\log(sv)}{\log c}, \quad \xi_1 = -c_1^{x_1} \lg g_1, \dots$$

die sich vereinfacht, wenn nur eine einzige Makehamformel zugrundeliegt:

$$\bar{a}_x = \frac{\varphi(\xi, \alpha)}{\lg c}, \quad \xi = -c^x \lg g, \quad \alpha = 1 - \frac{\lg(sv)}{\lg c} \quad (36a)$$

Der Spielraum für die Grössen $\alpha_1, \alpha_1, \dots$ kann wie oben (§ 2) zwischen 1 und 2 angenommen werden, wodurch alle möglichen Zinsfüsse berücksichtigt sind; derjenige für ξ zumindest im einfachsten Falle $\bar{a}_x = k s^x g^{c^x}$, aber auch noch in anderen Fällen, etwa mit $0 < \xi < 3$, wofern man eben für die höchsten Beitrittsalter, etwa über 85 Jahre, die Leibrentenwerte, deren statistische Unterlagen dort ohnehin recht unsicher werden, nicht von vorneherein auf Grund aller möglichen Makeham-Tafeln ausgerechnet wissen will.

Bei Beschränkung auf den einfachsten Fall $l_x = ks^x g^{c^x}$ könnte man zwar den Spielraum von α , weil diese Grösse mit dem Zinsfuss wächst, etwas verkleinern, indem man den Zinsfuss limitiert, etwa mit 5%, aber dies empfiehlt sich, von anderen Gründen abgesehen, auch mit Rücksicht auf die Berechnung der Verbindungsrenten nicht. Beispielsweise besitzt die Verbindungsrente für zwei Leben y, z nach derselben Sterbetafel $l_y = ks^y g^{c^y}$, $l_z = ks^z g^{c^z}$ und mit der Abzinsung v gerechnet, denselben Wert, wie die Leibrente für eine x — jährige Ersatzperson, aber mit der Abzinsung v' gerechnet, wofern die Bedingungen $c^x = c^y + c^z$, $v' = sv$ erfüllt sind. Der Zinsfuss der Ersatzleibrente übersteigt also (wegen $s < 1$) denjenigen der Verbindungsrente.

Die Ausarbeitung einer Tabelle der Prym'schen Funktion, welchen Umfanges immer, wäre auch vom rein theoretischen Standpunkt wünschenswert, weil dadurch noch Aufschlüsse über manche Eigenschaften dieser wichtigen Funktion zu erwarten sind.

Wien, 5. Juni 1929.

Bemerkung zum oberen Artikel.

Dr. J. Stránský.

Zur Illustration der vom H. Prof. Tauber vorgeführten Methode habe ich die Berechnung des Wertes des Integrallogarithmus für $x = 1,0$ 1,1, 1,2, . . . , 6,9 nach der Formel (2) durchgeführt.

Die nachstehende Tabelle zeigt den Genauigkeitsgrad der angewendeten Methode in Vergleichung mit der Tabelle der Werte des $\int e^{-t} t^{-1} dt$ vor, welche von C. A. Bretschneider nach der Formel

$$\S + lx - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2.2!} - \frac{x^3}{3.3!} \dots$$

berechnet und in der Zeitschrift für M. u. Ph., VI. Jahrg. veröffentlicht wurde.

In der Kolonne (2) sind die Werte des $e^x \int_x^\infty e^{-t} t^{-1} dt$ enthalten, wobei

für den Wert des $\int_x^\infty e^{-t} t^{-1} dt$ die von Bretschneider berechneten Zahlen

benützt wurden, in der Kolonne (3) wurde dieselbe Funktion nach der Formel des H. Prof. Tauber berechnet; die Kolonnen (4) und (5) enthalten die absoluten, beziehungsweise relativen Differenzen.

Die merkwürdige Genauigkeit der Tauberischen Formel hat desto grösseren Wert, dass sie auf eine ganz einfache Weise erreicht wurde.

Gleichzeitig sei erwähnt, dass sich in der zitierten Bretschneiderischen Tabelle 2 Fehler befinden: für $x = 4,9$ ist der Wert des $\int e^{-t} t^{-1} dt = 0,0012914833$ und nicht 0,0012114833, für $x = 6,3$ 0,0002554714 und nicht 0,0002554914.