Aktuárské vědy

Josef Korous

Remarque à propos de l'article de M. Pólya concernant la déduction de la loi des erreurs de Gauss

Aktuárské vědy, Vol. 1 (1930), No. 1, 37–41

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/144505`

feste Jahresprämie in der Privatversicherung undenkbar ist; denn die Prämienreserve dieser Leistung ist dann fast immer negativ, was allerdings von vornherein mit Rücksicht darauf zu erwarten ist, dass die Hauptbelastung in den niedrigeren Altern liegt, während die Prämie während der ganzen Dauer der Aktivität gezahlt wird. Ein Bild über die Prämienreserven bietet die angeschlossene Tabelle für 100 Kč Ausstatungsbeitrag für einige Eintrittsalter und Versicherungszeiten.

Tabelle Nr. 4. $4^1/_2\%$

ξ \ n	5	10	20	30	40
20	— 7,66	— 26,99	— 32,35	— 24,60	— 11,63
30	— 2,00	— 4,78	— 5,28	— 2,77	
40	— 0,11	— 0,91	— 0,77		
50	+ 0,11				

Daraus ist zu erkennen, dass in der Sozialversicherung die Höhe des Ausstattungsbeitrages so zu bemessen ist, dass die übrigen Leistungen diesen durch ihren Wert erheblich übersteigen, damit nicht negative Prämienreserven für die Gesammtheit der Ansprüche entstehen. Dies ist allerdings mit Rücksicht auf den Einfluss des Ausstattungsbeitrages in unserem Gesetze von vornherein ausgeschlossen.

Die Methoden sowie die statistischen Grundlagen, die der Entwurf der Zentralsozialversicherungsanstalt für die Bewertung der durch die Einführung des Ausstattungsbeitrages entstehenden Belastung verwendete, wurden — ungeachtet geringfügiger Aenderungen der Zahlen, die durch eine andere Interpolation ermittelt wurden — ohne Abänderung im endgültigen Entwurfe des sozialpolitischen Ausschusses benützt.

Die grössten Aenderungen erfuhren die Bedingungen für die Zuerkennug der Witwenrente. Schon der ursprüngliche Regierungsentwurf gewährte den Witwen, welche über 65 Jahre alt sind, eine Rente und liberaler löste diese Frage der Entwurf der Zentralsozialversicherungsanstalt, welcher die Rente auch einer Witwe zuerkennt, die für zwei oder mehr Kinder unter 17 Jahren sorgen muss. Diese Bedingungen übernahm auch, wie sie im Entwurfe der Zentralsozialversicherungsanstalt formuliert wurden, der endgültige Entwurf des sozialpolitischen Ausschusses und in dieser Form wurden sie auch in das Gesetz, aufgenommen. Selbstverständlich war es bei derart komplizierten Bedingungen schwer, geeignete statistische Grundlagen zu finden, und man musste sich bloss mit einer genügend annähernden Bewertung dieser Aenderungen begnügen. Deshalb musste sehr vorsichtig vorgegangen werden, damit das Risiko nicht uterschätzt würde. (Fortsetzung folgt.)

Remarque à propos de l'article de M. Pólya concernant la déduction de la loi des erreurs de Gauss.

Dr. Josef Korous.
(Du seminaire du Prof. Dr. Schoenbaum.)

Dans les récents travaux sur le calcul des probabilités, l'arithmétique politique, la statistique mathématique et les mathématiques appliquées en général, on s'efforce de plus en plus dedéduire toutes les lois d'axiomes proposés d'avance et formulés en conformité à l' experience comme c' est, d'ailleurs, le cas de l'édifice tout entier des mathématiques, reposant sur un nombre restreint d'axiomes fondamentaux. Récemment, il vient de paraître de nombreux travaux qui introduisent cette méthode même dans la théorie des erreurs en déduisant la loi des erreurs de plusieurs axiomes. Une de ces déductions figure déjà chez Cauchy dans quelques-uns de ses travaux traitant de la loi des erreurs.

Une déduction remarquable et très élégante de la loi de Gauss est la „Herleitung des Gausschen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung" par M. Pólya, publiée dans Math. Zeitschrift Bd. 18 (1923). Dans la présente rémarque, je vais tout d'abord esquisser la méthode dont se sert M. Pólya, après quoi je donnerai une nouvelle demonstration ainsi qu'une certaine généralisation d'un théorème qui, pour ainsi dire, sert de base à la démonstration de M. Pólya.

M. Pólya appele loi des erreurs toute fonction $\varphi(x)$ qui vérifie les deux conditions suivantes:

$$\varphi(x) \geqq 0, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = 1, \tag{2}$$

de sorte que l'intégrale $\int_a^b \varphi(x)\, dx$ indique la probabilité que l'erreur est située entre les limites a, b. La racine carrée de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\ \varphi(x)\ dx$ est nommée dispersion, si cette intégrale a bien un sens. Il est évident, si $\varphi(x)$ est une loi des erreurs, que $\frac{1}{a}\ \varphi\left(\frac{x}{a}\right)$, où $a > 0$, est encore une loi des erreurs. De telles lois se nomment semblables.

M. Pólya introduit ensuite la notion de combinaison linéaire de deux lois des erreurs. On dit que la loi $\chi(x)$ donnée par la relation

$$\chi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\, \psi(x-u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-v)\, \psi(v)\, dv,$$

où $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sont des lois des erreurs (cette fonction vérifie évidemment les deux conditions (1) et (2), résulte de la combinaison linéaire des lois $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

Maintenant, M. Pólya pose la question: Laquelle des lois des erreurs ayant une dispersion finie, étant linéairement combinée avec une loi semblable, produit une nouvelle loi semblable? et il démontre que la seule loi de Gauss possède cette propriété.

En formulant ce problème mathématiquement, on voit qu'il s'agit de la solution de l'équation fonctionnelle suivante:

$$\frac{1}{c}\varphi\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{ab}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{u}{a}\right) \varphi\left(\frac{(x-u)}{b}\right) du$$

à ces conditions secondaires:

1. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $\varphi(x) \geqq 0$.

2. L'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x)\, dx$ a un sens.

3. $\varphi(x)$ est, à chaque intervalle, bornée est intégrable au sens de Riemann.

Il n' est plus nécessaire de supposer (2), car il suit, de l'analyse de ces conditions, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x\, \varphi(x)\, dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x)\, dx = \sigma^2,$$

où σ désigne la dispersion. Des mêmes conditions, on tire encore

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

On se servira de ces résultats pour déternier la fonction

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\, \varphi(t)\, dt,$$

qui satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\Phi(x) = \Phi(\alpha x)\, \Phi(\beta x),$$

où $\alpha = \frac{a}{c}, \beta = \frac{b}{c}$. Il suit de cette équation

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt - \frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt$$

ou

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \left(\varphi(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\right) dt = 0.$$

La dernière équation est vérifiée pour toutes les valeurs réelles de x, d'où l'on tire, comme je vais démontrer,

$$\varphi(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = 0$$

à tous les points de discontinuité de la fonction $\varphi(x)$. On peut démontrer. que $\varphi(x)$ est partout continue, et que, par conséquent,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

pour toutes les valeurs de x.

Il ne s'agit donc que de démontrer que, si l'équation

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(t)\, dt = 0 \tag{3}$$

est verifiée pour toutes les valeurs réelles de x, on a, à de certaines conditions,

$$f(t) = 0$$

presque partout.*) Je vais supposer que l'intégrale de Riemann

$$\int_{-\infty}^{\infty} | f(t) |\, dt \tag{4}$$

ait un sens et je démontrerai que

$$\int_{b}^{a} f(t)\, dt = 0 \tag{4'}$$

pour des valeurs quelconques de a et de b. (4') équivaut à (4).**)

Pour la démonstration je vais me servir du facteur de Dirichlet

On tire de l'équation (3)

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, x)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, x)\, dx = \int_{a}^{b} f(t)\, dt,$$

q. e. d. On désigne par $\varphi(t, x)$ la fonction

$$\frac{1}{x} f(t) \sin \frac{b-a}{2}\, x\, e^{-ix\left(\frac{a+b}{2}-t\right)}.$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{b-a}{2}\, x}{x}\, e^{-ix\left(\frac{a+b}{2}-t\right)}\, dx = \begin{cases} 1 & a < t < b \\ & \qquad ***) \\ 0 & a > t > b. \end{cases}$$

*) La notion „presque partout" et la notion de mesure d'une ensemble de point sont expliquées chez Borel: Leçons sur les fonctions de variables réelles etc. p. 16.

**) Hobson The theory of function of a real variable, p. 350.

***) On déduit la valeur de cette intégrale en s'appuyant sur l'intégrale connue

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin \varepsilon x}{x} = \frac{2}{\pi}\, \frac{|\varepsilon|}{\varepsilon}.$$

(voir Jordan cours d'Analyse II p. 108 (3. ed.). On a

$$\sin \frac{b-a}{2}\, x\, e^{-ix\left(\frac{a+b}{2}-t\right)} = \tfrac{1}{2}\left(\sin (b-t)\, x - \sin (a-t)\, x\right) - i\, sin\, \frac{b-a}{2}\, x\, .$$
$$. \cos \left(\frac{a+b}{2} - t\right) x,$$

d'où l'on voit que l'intégrale considérée est égale à zéro, si $b-t$, $a-t$ ont le même signe.

La possibilité de changer l'ordre d'intégration résulte des conditions nécessaires et suffisantes indiquées à la p. 262 du livre de M. Petr Integrální počet (Calcul intégral). Il est, d'abord, pour A, B, C, D, quelconques

$$\int_A^B dx \int_C^D \varphi(t, x)\, dt = \int_D^C dt \int_A^B \varphi(t, x)\, dx.$$

En effet, l'intégrale double

$$\iint_D \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

où D est un domaine borné quelconque, a un sens, car l'ensemble des points de discontinuité de la fonction $\varphi(t, x)$ est de mesure zéro, la fonction $f(t)$ étant intégrable au sens de Riemann.

Les intégrales

$$\left|\int_B^\infty \varphi(t,x)\, dt\right| < \int_B^\infty |f(t)|\, dt,$$

et

$$\left|\int_D^\infty \varphi(t, x)\, dx\right| < \frac{2\pi\sqrt{2}\, M}{D},$$

où M est la borne supérieure de $|f(t)|$, dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$, d'où l'on a exclu un certain ensemble de mesure zéro, tendent pour $B = \infty$ et $D = \infty$ vers zéro uniformément par rapport à x et t respectivement.

Enfin, l'intégrale

$$\left|\int_B^\infty dt \int_D^\infty \varphi(t, x)\, dx\right| < \frac{2\pi\sqrt{2}}{D}\int_B^\infty f(t)\, dt$$

converge pour $D = \infty$ vers zéro. Ce qui prouve que toutes les conditions citées ci-dessus sont vérifiées.

LITERATURA.

Mises: **Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit.** Berlin, Springer 1928.

Mises-ova kniha, vydaná jako třetí svazek sbírky Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung, jest zajímavým pokusem vysvětliti nematematikovi základy axiomaticky podložené teorie pravděpodobnosti, kterou vyložil autor v řadě pojednání v Mathematische Zeitschrift, Naturwissenschaften a v Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Mám ovšem pochybnost, zdali nematematik bude s to, pochopiti myšlenkovou linii autorových prací, třeba že kniha neobsahuje jediného vzorce, a oceniti