

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Bohumír Bastl; František Ježek; Miroslav Lávička  
Pythagorův odkaz v geometrickém modelování

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 59 (2014), No. 1, 6--16

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/143734>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2014

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

# Pythagorův odkaz v geometrickém modelování

Bohumír Bastl, František Ježek, Miroslav Lávička, Plzeň

## 1. Úvod

Matematika přináší v mnoha ohledech zajímavé vazby a souvislosti s jinými vědními oblastmi. Jedná se jak o oblast aplikací, tak i motivací a inspirací. V tomto článku poukážeme na vztah základních poznatků geometrie, konkrétně Pythagorovy věty, k moderním výsledkům geometrického modelování, které je základem mnoha oblastí informatiky, kybernetiky a konstrukčních metod. Tímto článkem chceme přispět i k tomu, aby se do škol dostala tolik potřebná motivace ke studiu základních poznatků matematiky a aby bylo možné ve větší míře přesvědčivě poukazovat na aplikační hodnotu učiva. Odborná činnost v moderní oblasti geometrického modelování znamená mnohdy návrat ke kořenům poznání v geometrii, což je snad dobrá zpráva pro učitele, kteří se neradi smiřují s odklonem matematiky od geometrického vidění problémů.

## 2. Pythagorejské trojice

Pokud bychom prováděli anketu mezi lidmi majícími alespoň základní vzdělání, pak na otázku *Jakou geometrickou větu si pamatujete ze školy?* by určitě v drtivém počtu odpovědí zaznělo: *Pythagorovu větu*. Ti zdatnější by si určitě vzpomněli na známou identitu

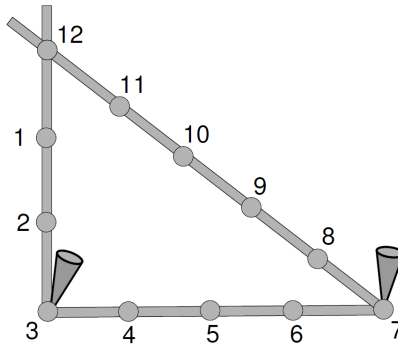
$$a^2 + b^2 = c^2, \quad (1)$$

jež zachycuje vztah mezi odvěsnami o délkách  $a, b$  a přeponou o délce  $c$  pravoúhlého trojúhelníka. Byť tato věta bude už navždy spojena svým pojmenováním s řeckým učencem Pythagorem ze Samu (6.–5. stol. př. n. l.), její znalost a praktické užívání lze na základě archeologických nálezů doložit již ve starověké Mezopotámii, Číně, Indii či Egyptě, a to více jak tisíc let před Pythagorem.

*Pythagorejská trojice* je trojice přirozených čísel  $a, b, c$ , která splňují vztah (1). Nejznámějším příkladem pythagorejské trojice jsou čísla 3, 4, 5. Ostatně již staroegyptští *haperdonapté* (tzv. *napínači lan*) vytyčovali na stavbách pravý úhel právě použitím obrácené Pythagorovy věty a této trojice – používali svázané lano, které bylo 12 uzly rozděleno na 12 stejných úseků, čímž bylo možné snadno sestrojít pravoúhlý trojúhelník se stranami  $3j, 4j, 5j$ , kde  $j$  je jednotková délka – viz obr. 1 a [19] Je zřejmé, že libovolný celočíselný násobek pythagorejské trojice je rovněž pythagorejská trojice (např. čísla 6, 8, 10).

---

Doc. Ing. BOHUMÍR BASTL, Ph.D., doc. RNDr. FRANTIŠEK JEŽEK, CSc., doc. RNDr. MIROSLAV LÁVIČKA, Ph.D., Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd ZČU v Plzni, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň, e-mail: {bastl, jezek, lavicka}@kma.zcu.cz



Obr. 1. Vytýčení pravého úhlu pomocí svázaného lana s dvanácti stejnými úseky

*Generátor pythagorejských čísel* je trojice celočíselných funkcí takových, že dosazením proměnné nebo proměnných do těchto funkcí obdržíme jednotlivé hodnoty pythagorejských čísel  $a, b, c$ . Zřejmě nejznámějším (dvouparametrickým) generátorem je tzv. *Eukleidova formule*, která má tvar

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2, \quad (2)$$

kde  $m, n \in \mathbb{N}$  a  $m > n$ . Pro  $n = 1$  se také hovoří o *Platonově formulí*. Připomeňme některé další jednoparametrické generátory, se kterými se lze v literatuře setkat:

$$a = 2n + 1, \quad b = 2n^2 + 2n, \quad c = 2n^2 + 2n + 1 \quad \text{nebo} \quad a = 4n, \quad b = 4n^2 - 1, \quad c = 4n^2 + 1.$$

Splnění pythagorejské podmínky (1) pro výše uvedené generátory se snadno ověří – např. pro Eukleidovu formuli můžeme psát

$$a^2 + b^2 = (2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2 = c^2.$$

Zdůrazněme, že Eukleidova formule (2) negeneruje pro nesoudělná čísla  $m, n$  všechny pythagorejské trojice (např. nedostaneme trojici 6, 8, 10), ale jen všechny primitivní pythagorejské trojice, podrobněji viz např. [9]. Pythagorejská trojice se nazývá *primitivní*, jestliže  $a, b, c$  jsou po dvou nesoudělná čísla. Chceme-li získat univerzální generátor, je nutné upravit Eukleidovu formuli na tvar

$$a = \ell \cdot 2mn, \quad b = \ell \cdot (m^2 - n^2), \quad c = \ell \cdot (m^2 + n^2), \quad (3)$$

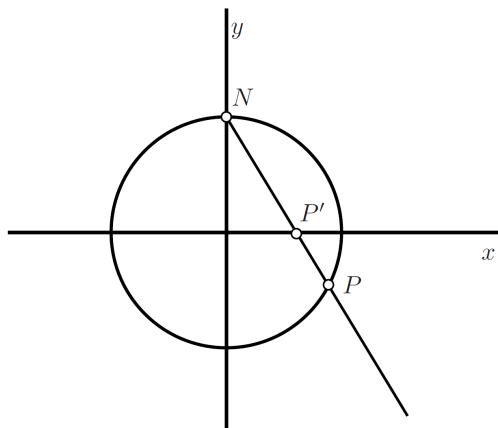
kde  $m, n, \ell \in \mathbb{N}$  a  $m > n$  jsou nesoudělná čísla.

Je zajímavé, že Eukleidovu formuli (a tedy i pythagorejské trojice) nalezneme i v jiné, v souvislosti s Pythagorem možná neočekávané, oblasti matematiky. Uvažujme komplexní číslo

$$z = x + yi, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1. \quad (4)$$

Potom platí

$$z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$



Obr. 2. Stereografická projekce, pomocí níž lze najít racionální parametrizaci jednotkové kružnice

Neboli je vidět, že pro přirozená čísla  $x > y$  tvoří

$$\Re(z^2) = x^2 - y^2, \quad \Im(z^2) = 2xy, \quad |z|^2 = x^2 + y^2$$

pythagorejskou trojici, která je generována Eukleidovou formulí (2).

Závěrem této části ještě připomeňme, že od pythagorejských trojic se dá přejít k pythagorejským čtveřicím (vzpomeňme např. na výpočet délky tělesové úhlopříčky  $d$  kvádrů o délce hran  $a, b, c$ , pro niž platí  $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ), které lze generovat pomocí vztahů

$$a = m^2 + n^2 - p^2 - q^2, \quad b = 2mq + 2np, \quad c = 2nq - 2mp, \quad d = m^2 + n^2 + p^2 + q^2. \quad (5)$$

A lze samozřejmě hovořit obecně i o pythagorejských  $n$ -ticích, viz [13].

### 3. Racionální parametrizace kružnice a kulové plochy

Volba vhodného popisu geometrického objektu (křivky, plochy) je zásadní pro vývoj následných aplikací a algoritmů. Pro oblast CAD (Computer Aided Design) je typický především parametrický popis objektů. A mezi všemi parametrickými reprezentacemi sehrává nejvýznamnější roli popis pomocí polynomiálních a racionálních lomených funkcí, neboť právě tyto parametrizace mohou být snadno implementovány prostřednictvím NURBS (NeUniformní Racionální B-Spline) reprezentace do standardních CAD systémů a tím přímo využívány v technické praxi, více např. v [1], [3].

Uveďme konkrétní příklad racionálně popsateľné křivky. Uvažujeme jednotkovou kružnici (se středem v počátku souřadnicového systému) danou implicitní rovnicí  $k: x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Tuto kružnici lze samozřejmě snadno popsat parametricky ve tvaru

$$\mathbf{x}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi), \quad \varphi \in (0, 2\pi). \quad (6)$$

Funkce kosinus a sinus jsou však transcendentní, což pro řízení obráběcích strojů není vhodné. Dále si proto ukážeme, jak lze snadno odvodit racionální popis kružnice  $k$

pomocí stereografické projekce. Kružnici  $k$  umístíme do souřadnicového systému a na souřadnicové ose  $x$  uvažujeme pohyblivý bod

$$P' = [t, 0], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Užitím inverzní stereografické projekce se středem v severním pólu  $N = [0, 1]$  získáme na kružnici bod  $P \neq N$  jakožto průsečík  $NP' \cap k$ , který má souřadnice

$$P = \left[ \frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right],$$

viz obr. 2. Parametrizace jednotkové kružnice se středem v počátku má tedy tvar

$$\mathbf{x}(t) = \left( \frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Přitom bod  $N \in k$  dostaneme jako limitu pro  $t \rightarrow \pm\infty$ . Tato parametrizace je evidentně racionální alternativou k výše uvedené goniometrické parametrizaci (6). Navíc snadno nahlédneme souvislost s Pythagorovou větou a pythagorejskými trojicemi. Platí

$$a^2 + b^2 = c^2 \iff \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Tedy bod o kartézských souřadnicích  $x = a/c$ ,  $y = b/c$ , kde  $a, b, c$  jsou po dvou nesoudělná čísla, leží na jednotkové kružnici  $x^2 + y^2 = 1$ . Existuje tak vzájemně jednoznačná korespondence mezi body na jednotkové kružnici (vyjma bodu  $N$ ), které mají racionální souřadnice, a primitivními pythagorejskými trojicemi. Navíc ze vztahu (7) snadno nahlédneme Platonovu formuli a po zavedení substituce  $t = m/n$  (a po následné úpravě) i Eukleidovu formuli pro generování pythagorejských trojic.

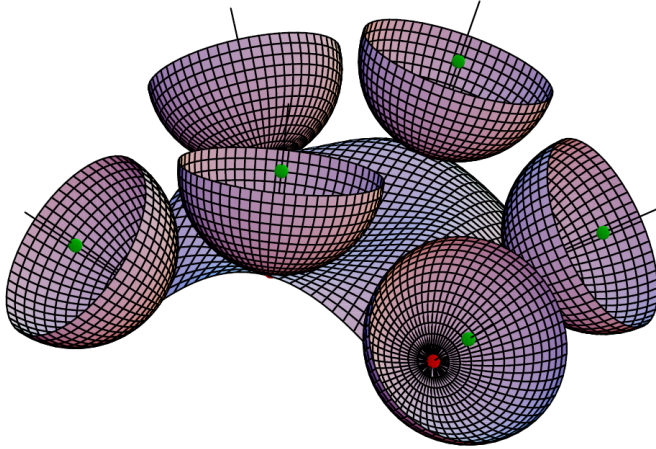
Obdobně lze najít i racionální parametrizaci jednotkové kulové plochy popsané implicitní rovnicí  $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$  ve tvaru

$$\mathbf{x}(s, t) = \left( \frac{2s}{s^2 + t^2 + 1}, \frac{2t}{s^2 + t^2 + 1}, \frac{s^2 + t^2 - 1}{s^2 + t^2 + 1} \right), \quad s, t \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Není asi velkým překvapením, že výše uvedený vztah v sobě ukrývá formuli pro generování pythagorejských čtveřic (5).

#### 4. Křivky s pythagorejským hodografem

Začněme tuto kapitolu motivací. Ačkoliv je v technické praxi požadováno, aby byly uvažované objekty popsány racionální parametrizací, není to často dostačující. A to především s ohledem na jejich obrábění, kdy je nutné popsat i trajektorii obráběcího nástroje opět ve tvaru NURBS reprezentace, tedy pomocí racionálních lomených funkcí. Předpokládáme, že obráběcím nástrojem je kulová fréza o poloměru  $d$ . Pak je nutné studovat podmínky, za kterých je racionální nejen obráběná plocha, ale je racionální i její ekvidistantní (či ofsetová) plocha ve vzdálenosti  $d$ , jež udává polohu středu kulové frézy, viz obr. 3. Poznamenejme, že elektronika pětiosé frézy dokáže nástroj umístit do daného bodu v prostoru (tři osy) a natočit nástroj tak, aby jeho



Obr. 3. Ofset racionální plochy při pětiosém obrábění (ofsetová plocha je určena pohybem středu kulové frézy – zvýrazněné body na normálách plochy)

osa splývala s normálou vytvářené plochy (dvě osy rotace). Takovéto stroje jsou určeny především pro přesnou výrobu tvarově složitých dílů, které v minulosti vytvářeli modeláři ze dřeva nebo jiného materiálu na základě citu.

Pro zjednodušení uvažujme analogickou situaci pro křivky v rovině. Nechť  $C$  je křivka daná parametrizací  $\mathbf{c}(t)$ . Její *jednostranný ofset* (ekvidistantní křivka)  $C_d$  ve vzdálenosti  $d > 0$  je potom dán parametrizací

$$\mathbf{c}_d(t) = \mathbf{c}(t) + d \cdot \mathbf{n}(t), \quad (9)$$

kde  $\mathbf{n}(t)$  je jednotkový vektor hlavní normály křivky  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ , viz obr. 4. Připomeňme, že *oboustranný ofset* křivky můžeme získat jako obálku jednoparametrického systému kružnic

$$S(t) : (\mathbf{x} - \mathbf{c}(t)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}(t)) = d^2$$

se středy kružnic na křivce  $C$ . Eliminací parametru  $t$  z rovnic

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, t) &= (\mathbf{x} - \mathbf{c}(t)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}(t)) = d^2, \\ F_t(\mathbf{x}, t) &= 2(\mathbf{x} - \mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = 0, \end{aligned}$$

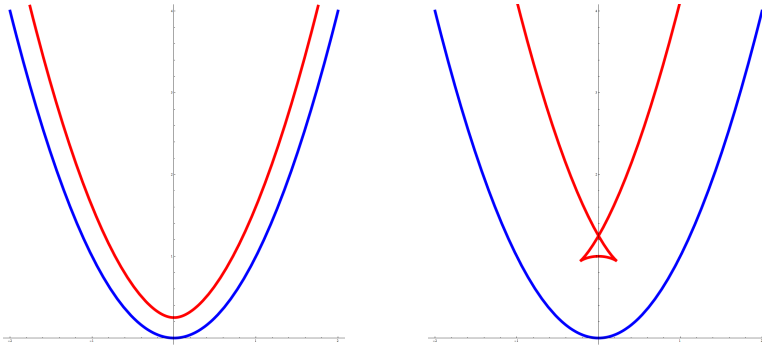
kde  $F_t$  značí derivaci  $F$  podle  $t$ , získáme implicitní vyjádření daného *oboustranného ofsetu*.

Pokud studujeme racionalitu ofsetu (9), pak si stačí uvědomit, že jednotkový normálový vektor  $\mathbf{n}(t)$  křivky  $\mathbf{c}(t)$  má tvar

$$\mathbf{n}(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}. \quad (10)$$

Racionalita  $C_d$  tedy bude zachována, pokud bude existovat jistá racionální funkce  $\sigma(t)$  taková, že platí

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (\sigma(t))^2. \quad (11)$$



Obr. 4. Jednostranný ofset (horní křivka) paraboly (spodní křivka). Vlevo:  $d = \frac{1}{4}$ ; vpravo:  $d = 1$

A toto byl první krok k úvahám vedoucím k teorii křivek s pythagorejským hodografem (neboli tzv. PH křivek), jednomu z fenoménů současného geometrického modelování (jejich pojmenování je velmi výstižné, neboť souvislost (11) s pythagorejskou identitou (1) je více než zřejmá), více podrobností v [4]. Jen doplníme, že pro parametrickou křivku  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$  rozumíme jejím hodografem asociovanou křivku o parametrizaci  $(x'(t), y'(t))$ .

Vzhledem ke zjevné souvislosti vztahů (11) a (1) je rozumné předpokládat, že analogické vztahy jako pro pythagorejské trojice platí i pro generování pythagorejských hodografů – jen místo číselných proměnných musíme nyní uvažovat polynomy. A skutečně je možné ukázat (viz [12]), že hodograf libovolné polynomiální PH křivky je možné zapsat ve tvaru

$$x'(t) = 2w(t)u(t)v(t), \quad y'(t) = w(t)(u(t)^2 - v(t)^2), \quad \sigma(t) = w(t)(u(t)^2 + v(t)^2), \quad (12)$$

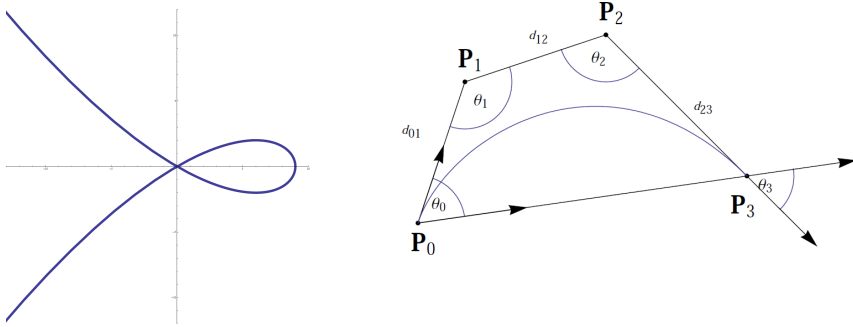
kde  $u(t)$ ,  $v(t)$  a  $w(t)$  jsou nenulové nesoudělné polynomy. Obdobně je možné využít komplexních polynomů jako analogie ke generování pythagorejských trojic pomocí komplexních čísel (viz [8]), kdy  $\mathbf{c}(t) = x(t) + iy(t)$  je PH křivkou, jestliže existuje komplexní polynom  $\mathbf{p}(t) = u(t) + iv(t)$  takový, že

$$x'(t) + iy'(t) = \mathbf{p}(t)^2 = u(t)^2 - v(t)^2 + i2u(t)v(t).$$

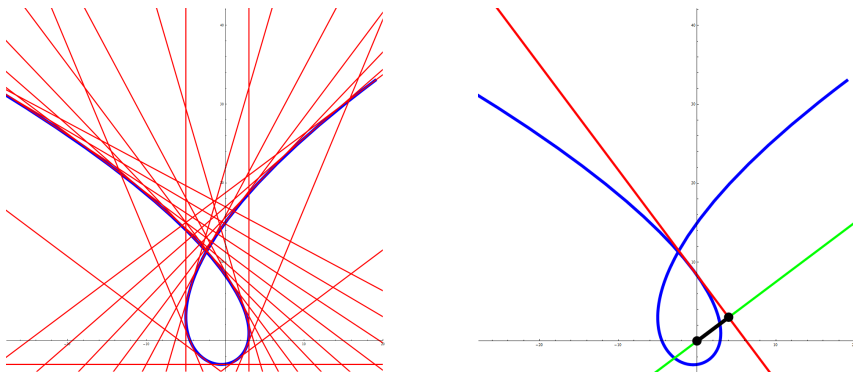
Hlavními výhodami PH křivek je již výše zmíněná racionalita jejich ofsetů a také po částech polynomiální délka oblouku – pro polynomiální PH křivky je tedy velice jednoduché určit, jakou vzdálenost jsme po dané křivce urazili, což může např. významně zjednodušit řízení obráběcího stroje při CNC obrábění (kde CNC značí Computer Numeric Control, tedy číslicové řízení počítačem).

Nejjednodušším netriviálním příkladem polynomiálních PH křivek jsou kubické křivky, které dostaneme v případě, že zvolíme polynomy  $u(t)$  a  $v(t)$  jako lineární a  $w(t) = 1$ . Nicméně hovořit o kubických PH křivkách je poněkud nadnesené – volbou polynomů  $u(t)$  a  $v(t)$  dostáváme pouze transformované (a to působením podobných zobrazení) různé části jedné kubické polynomiální křivky, tzv. Tschirnhausovy kubiky (viz obr. 5 vlevo), která má parametrické vyjádření

$$x(t) = 1 - 3t^2, \quad y(t) = t(3 - t^2).$$



Obr. 5. Vlevo: Tschirnhausova kubika; vpravo: řídicí polygon kubické Bézierovy křivky



Obr. 6. Vlevo: duální reprezentace křivky; vpravo: ilustrace pro opěrnou funkci křivky

Podíváme-li se na tyto křivky z pohledu standardních objektů geometrického modelování, je možné každou část PH kubiky popsat jako Bézierovu křivku, a tedy pomocí příslušného řídicího polygonu o čtyřech bodech (viz obr. 5 vpravo). Splnění podmínky (11) je možné potom převést na splnění určitých geometrických vazeb mezi řídicími body a jejich spojnicemi (viz [6]). Konkrétně v tomto případě musí platit

$$d_{12} = \sqrt{d_{01}d_{23}} \quad \text{a} \quad \theta_1 = \theta_2.$$

Jelikož PH křivky sudých stupňů typicky obsahují singulární body (pro jejich získání je možné volit  $w(t) \neq 1$ ), v praxi se používají zejména křivky lichých stupňů. Jejich využití spočívá především v náhradě obecných křivek volného tvaru spline křivkami, které jsou po částech PH křivkami zvoleného stupně. Jejich konstrukce je lokální – na zadané křivce určíme body a příslušné tečné vektory, příp. i vektory vyšších derivací, v těchto bodech a pro tato data najdeme interpolační PH křivky. Zpravidla se pro jednoduchost používají PH křivky nízkých stupňů, např. interpolaci dvou bodů s příslušnými tečnými vektory je možné provést buď jednou kvintickou PH křivkou (viz [5]), nebo dvojicí kubických PH křivek (viz [2]).

Jedním z možných zobecnění polynomiálních PH křivek jsou *racionální PH křivky*



$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Obr. 7. Vybrané příklady hypocykloid (pod diagonálou) a epicykloid (nad diagonálou) zadané opěrnou funkcí  $h = \cos(m\varphi/n)$  pro nesoudělná  $m, n \in \mathbb{N}$ . Pro další podrobnosti včetně důkazu PH vlastnosti viz [20]

(viz [18]). I tyto křivky jsou stále výhodné z pohledu geometrického modelování, jelikož každou takovou křivku, resp. její část, je možné popsat jako NURBS křivku. Nejdůležitější vlastnost těchto křivek je společná s polynomiálními PH křivkami – i tyto křivky mají racionální ofset. Na druhé straně již pochopitelně nemají polynomiální ani racionální délku oblouku, neboť integraci racionální funkce již obecně nemusíme získat racionální funkci.

Přístup, jak najít popis všech rovinných racionálních PH křivek, je odlišný od polynomiálních. Již nelze použít vztahů pro generování pythagorejských trojic a místo toho se využívá tzv. duální reprezentace křivek, kdy je křivka popsána jako obálka svých tečen (viz obr. 6 vlevo). Libovolnou racionální PH křivku je tedy možné získat z duální reprezentace tvaru

$$\Sigma(t) : n_1(t)x + n_2(t)y = h(t),$$

kde  $(n_1(t), n_2(t))$  představuje jednotkové normálové pole podél křivky a  $h(t)$  je tzv. opěrná funkce, která reprezentuje orientovanou vzdálenost tečny od počátku (viz obr. 6 vpravo). Libovolnou racionální parametrizaci kružnice je pak možné najít de facto ze vztahů (12), vezmeme-li parametrizaci  $(n_1(t), n_2(t)) = (x'(t)/\sigma(t), y'(t)/\sigma(t))$  pro libovolné nesoudělné polynomy  $u(t)$  a  $v(t)$ . Zajímavou třídou křivek, které jsou racionálními PH křivkami, jsou např. velmi dobře známé algebraické (tedy uzavřené) hypocykloidy a epicykloidy ([20]), viz obr. 7.

PH křivky je samozřejmě možné uvažovat i v trojrozměrném prostoru (viz [7]). Jsou definovány vztahem

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 = (\sigma(t))^2, \quad (13)$$

kde  $\sigma(t)$  je racionální funkce. Nejvýznamnější podtřídou jsou opět prostorové *polynomiální* PH křivky (mající jako v rovinném případě polynomiální délku oblouku) a k popisu jejich hodografů lze nyní úspěšně využít generátory pythagorejských čtveřic, viz (5).

## 5. Možná zobecnění PH křivek

Jedním z možných přímých zobecnění PH křivek je přechod od křivek k plochám. I zde je základním požadavkem na pythagorejskou vlastnost plochy  $S$  dané parametrizací  $\mathbf{s}(u, v)$  racionalita jejího ofsetu (tedy ekvidistantní plochy)

$$\mathbf{s}_d(u, v) = \mathbf{s}(u, v) + d \cdot \mathbf{n}(u, v), \quad (14)$$

kde  $\mathbf{n}(u, v)$  značí jednotkové normálové vektory plochy  $\mathbf{s}(u, v)$  v jednotlivých bodech. Analogicky jako v případě rovinných racionálních PH křivek dostaneme, že plocha  $S$  má racionální ofset, jestliže vektorová funkce  $\mathbf{n}(u, v)$  popisující jednotkové normálové vektory plochy  $S$  je racionální, tedy pokud pro velikost normálového vektoru  $\mathbf{s}_u(u, v) \times \mathbf{s}_v(u, v)$  platí

$$\|\mathbf{s}_u(u, v) \times \mathbf{s}_v(u, v)\|^2 = \sigma(u, v)^2, \quad (15)$$

kde tečné vektory  $\mathbf{s}_u(u, v)$  a  $\mathbf{s}_v(u, v)$  parametrických křivek jsou parciálními derivacemi funkce  $\mathbf{s}$  vzhledem k parametrům  $u$  a  $v$  a  $\sigma(u, v)$  je jistá racionální funkce. Plochy, pro které existuje parametrizace splňující tuto podmínku, se nazývají *plochy s pythagorejskou normálou* (neboli *PN plochy*), více viz [18].

K odvození popisu parametrizací splňujících podmínku (15) se využívá duální reprezentace ploch, kdy je plocha popsána jako obálka systému svých tečných rovin

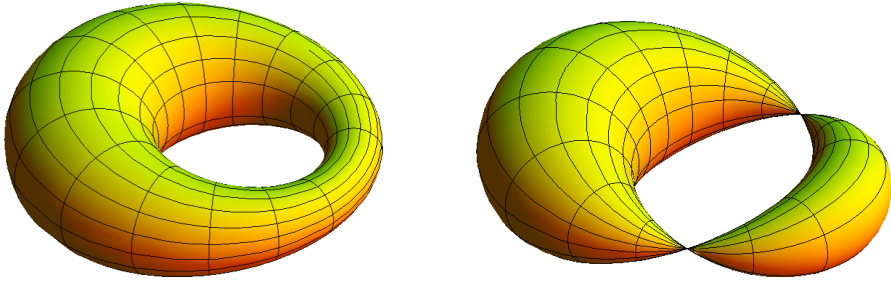
$$\Sigma(u, v) : n_1(u, v)x + n_2(u, v)y + n_3(u, v)z - h(u, v) = 0,$$

kde  $\mathbf{n}(u, v) = (n_1(u, v), n_2(u, v), n_3(u, v))$  je jednotkový normálový vektor a  $h(u, v)$  je opěrná funkce. Vezmeme-li za  $\mathbf{n}(u, v)$  jistou racionální parametrizaci jednotkové sféry a zvolíme-li libovolnou racionální funkci  $h(u, v)$ , pak dostáváme duální popis konkrétní PN plochy. Primární parametrizaci pak získáme řešením lineární soustavy rovnic  $\Sigma = 0$ ,  $\Sigma_u = 0$ ,  $\Sigma_v = 0$ . Pokud za  $\mathbf{n}(u, v)$  dosadíme parametrizaci jednotkové sféry

$$\left( \frac{2a(u, v)c(u, v)}{a(u, v)^2 + b(u, v)^2 + c(u, v)^2}, \frac{2b(u, v)c(u, v)}{a(u, v)^2 + b(u, v)^2 + c(u, v)^2}, \frac{a(u, v)^2 + b(u, v)^2 - c(u, v)^2}{a(u, v)^2 + b(u, v)^2 + c(u, v)^2} \right),$$

je možné odvodit obecný vztah pro všechny parametrizace splňující (15) v závislosti na volbě tří polynomů  $a(u, v)$ ,  $b(u, v)$ ,  $c(u, v)$  a jedné racionální funkce  $h(u, v)$ .

Příkladem významných ploch, které vykazují PN vlastnost, jsou Dupinovy cyklidy (obálky systému sfér dotýkající se tří pevně zvolených sfér, např. anuloid, viz [11], [15])



Obr. 8. Příklady kvartických Dupinových cyklid

a obr. 8), regulární kvadriky (viz [17]), přímkové plochy (viz [17]) nebo všechny kvadratické Bézierovy pláty (tedy kvadraticky parametrizovatelné plochy, viz [14]).

Jinou možností zobecnění PH křivek, která našla v geometrickém modelování praktické uplatnění při studiu ofsetů a jejich oříznutí, je přechod od eukleidovského prostoru k prostoru Minkowského, který je dán Minkowského normou (přesněji pseudonormou) ve tvaru

$$\|(a_1, a_2, a_3)\|^2 = a_1^2 + a_2^2 - a_3^2.$$

*Minkowského křivky s pythagorejským hodografem* (tzv. MPH křivky, viz [16]) v trojrozměrném Minkowského prostoru jsou pak analogicky ke svým eukleidovským protějškům definovány vztahem

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 - (z'(t))^2 = (\sigma(t))^2.$$

S využitím generátorů Minkowského pythagorejských čtveřic pak získáváme obecný popis všech polynomiálních MPH křivek (důkaz v [16]) ve tvaru

$$\begin{aligned} x'(t) &= u(t)^2 - v(t)^2 + p(t)^2 - q(t)^2, \\ y'(t) &= 2u(t)v(t) - 2p(t)q(t), \\ z'(t) &= 2u(t)p(t) - 2v(t)q(t), \\ \sigma(t) &= u(t)^2 + v(t)^2 - p(t)^2 - q(t)^2, \end{aligned}$$

kde  $u(t), v(t), p(t), q(t)$  jsou jisté polynomy. O racionálních MPH křivkách se lze více dočíst např. v [10].

## 6. Závěr

Cíl, který jsme vymezili v úvodu, se v tomto článku naplňuje přímou vazbou mezi pythagorejskými problémy a vytvářením a popisem tvarově složitých objektů pomocí počítače. Křivky a plochy s racionálním popisem jsou základem mnoha návrhových i jiných aplikačních systémů. Popsané výsledky geometrů, kteří vědecky pracují v oblasti CAGD, mají příznivý vliv např. na výrobu tvarově složitých dílů v automobilovém průmyslu nebo v případě energetických strojů (turbín). Touto cestou může také dojít (a reálně i dochází) k příznivějšímu vnímání výuky matematiky, neboť zejména u řady geometrických poznatků jsou souvislosti s aplikacemi velmi zřetelné.

**Poděkování.** Práce na tomto článku byla podpořena z projektu NTIS – Nové technologie pro informační společnost CZ.1.05/1.1.00/02.0090, který je financován z operačního programu VaVpI.

## L i t e r a t u r a

- [1] BASTL, B., JEŽEK, F., LÁVIČKA, M.: *Geometrické modelování – od historie k současnosti a budoucnosti*. PMFA 58 (2) (2013), 89–99.
- [2] BASTL, B., SLABÁ, K., BYRTUS, M.: *Planar  $C^1$  Hermite interpolation with uniform and non-uniform TC-biarscs*. Comput. Aided Geom. Design 30 (1) (2013), 58–77.
- [3] FARIN, G.: *Curves and surfaces for CAD: A practical guide*. Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, CA, 2002.
- [4] FAROUKI, R.: *Pythagorean-hodograph curves*. Handbook of Computer Aided Geometric Design, J. Hoschek, G. Farin, M.-S. Kim (eds), Elsevier, 2002, 405–427.
- [5] FAROUKI, R., NEFF, C.: *Hermite interpolation by Pythagorean-hodograph quintics*. Math. Comp. 64 (212) (1995), 1589–1609.
- [6] FAROUKI, R., SAKKALIS, T.: *Pythagorean hodographs*. IBM J. Res. Develop. 34 (5) (1990), 736–752.
- [7] FAROUKI, R., SAKKALIS, T.: *Pythagorean-hodograph space curves*. Adv. Comput. Math. 2 (1994), 41–66.
- [8] FAROUKI, R. T.: *The conformal map  $z \rightarrow z^2$  of the hodograph plane*. Comput. Aided Geom. Design 11 (4) (1994), 363–390.
- [9] KRÍŽEK, M., SOMER, L., ŠOLCOVÁ, A.: *Kouzlo čísel*. Academia, 2009, reprint 2011.
- [10] KOSINKA, J., LÁVIČKA, M.: *On rational Minkowski Pythagorean hodograph curves*. Comput. Aided Geom. Design 27 (7) (2010), 514–524.
- [11] KRASAUSKAS, R., MÄURER, C.: *Studying cyclides with Laguerre geometry*. Comput. Aided Geom. Design 17 (2) (2000), 101–126.
- [12] KUBOTA, K.: *Pythagorean triples in unique factorization domains*. Amer. Math. Monthly 79 (1972), 503–505.
- [13] LANDAUER, E. G.: *A method of generating Pythagorean  $n$ -tuples*. Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech. 10 (2) (1979), 293–294.
- [14] LÁVIČKA, M., BASTL, B.: *Rational hypersurfaces with rational convolutions*. Comput. Aided Geom. Design 24 (7) (2007), 410–426.
- [15] LÁVIČKA, M., VRŠEK, J.: *On the representation of Dupin cyclides in Lie sphere geometry with applications*. J. Geom. Graph. 13 (2) (2009), 145–162.
- [16] MOON, H.: *Minkowski Pythagorean hodographs*. Comput. Aided Geom. Design 16 (1999), 739–753.
- [17] PETERNELL, M., POTTMANN, H.: *A Laguerre geometric approach to rational offsets*. Comput. Aided Geom. Design 15 (1998), 223–249.
- [18] POTTMANN, H.: *Rational curves and surfaces with rational offsets*. Comput. Aided Geom. Design 12 (2) (1995), 175–192.
- [19] STILLWELL, J.: *Mathematics and its History*. Springer, 2010.
- [20] ŠÍR, Z., BASTL, B., LÁVIČKA, M.: *Hermite interpolation by hypocycloids and epicycloids with rational offsets*. Comput. Aided Geom. Design 27 (2010), 405–417.