

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Michal Křížek; Filip Křížek

Před 80 lety objevil Zwicky temnou hmotu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 58 (2013), No. 2, 107–123

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/143377>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2013

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Před 80 lety objevil Zwicky temnou hmotu

Michal Krížek, Filip Krížek, Praha

1. Úvod

V roce 1933 Fritz Zwicky publikoval průlomový článek [30], který později zcela pozměnil vývoj astronomie a kosmologie na mnoho desetiletí. Pomocí věty o viriálu zjistil, že k vysvětlení rychlých pohybů asi 800 galaxií v obří galaktické kupě Abell 1656 v souhvězdí Vlasy Bereniky (*Coma Berenices*) je třeba předpokládat existenci 400krát většího množství hmoty nesvítící než svítící,¹ aby tato kupa držela gravitačně pohromadě. Termín *temná hmota* (něm. die dunkle Materie) použil ve zmíněném článku na straně 125. Temná hmota (skrytá látka) by svými gravitačními účinky měla rozpínání vesmíru brzdit.



Obr. 1. FRITZ ZWICKY (1898–1974)

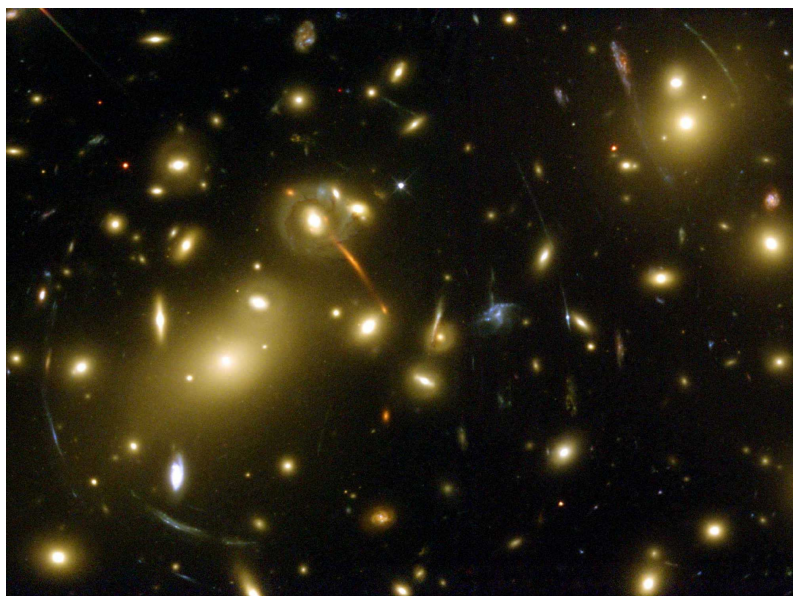
V sedmdesátých letech minulého století bylo předpověděno zrychlující se rozpínání vesmíru (viz [6], [27]), které pak bylo před 15 lety potvrzeno i experimentálně [21]. Proto fyzikové zavedli ještě termín *temná (skrytá) energie*, která naopak rozpínání vesmíru urychluje a působí tak proti gravitaci (viz rozsáhlý přehled literatury v [20]).

¹K podobnému závěru došel v roce 1936 i Sinclair Smith [25] pro nejbližší galaktickou kupu v souhvězdí Panny, která je od nás vzdálena 15 až 22 Mpc. Podle dnešních odhadů by však mělo být nesvítící hmoty zhruba jen o řád více než hmoty svítící [15], [16].

Prof. RNDr. MICHAL KRÍŽEK, DrSc., Matematický ústav AV ČR, v. v. i., Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: krizek@cesnet.cz, RNDr. FILIP KRÍŽEK, Ph.D., Ústav jaderné fyziky AV ČR, v. v. i., 250 68 Řež, e-mail: filip.krizek@cern.ch

Fritz Zwicky se narodil 14. února 1898 v bulharské Varně. Jeho matka Františka roz. Vrčková byla Češka a otec Švýcar. Mladý Fritz v letech 1916–1925 vystudoval matematiku a experimentální fyziku na ETH v Curychu. Pak emigroval do USA. Pracoval na observatořích na Mt. Wilsonu a na Mt. Palomaru a též na California Institute of Technology v Pasadeně, kde získal profesuru v oboru astronomie v r. 1942.

V roce 1934 Zwicky společně s Walterem Baadem (1893–1960) předpověděli existenci neutronových hvězd jako pozůstatků exploze supernov a vyslovili hypotézu, že tento proces by mohl být zdrojem kosmického záření.² Později je napadlo, že by supernovy mohly být slibnými kandidáty pro měření vesmírné expanze, protože jsou pozorovatelné z nejbližších hlubin vesmíru. Jejich myšlenka pak byla použita k odhalení zrychlené expanze vesmíru laureáty Nobelovy ceny za fyziku za rok 2011. V článku [32], s. 237, Zwicky představil novou metodu gravitačního čočkování mezi lehlou galaxií. Uvědomil si totiž, že pravděpodobnost zákrytu dvou galaxií je mnohem větší než pravděpodobnost zákrytu dvou hvězd. Dokonce uvažoval i o gravitačních čočkách tvořených galaktickými kupami (srov. obr. 2).



Obr. 2. Deformaci prostoročasu galaktickou kupou A2218 odhaluje gravitační čočkování, které předpověděl Zwicky (foto Hubble Space Telescope).

Když v roce 1929 astronomové Edwin Hubble a Milton L. Humason objevili rozpínání vesmíru,³ Zwicky na sebe v téže době upozornil článkem [29]. V něm červený posuv galaxií vysvětluje jinak než rozpínajícím se vesmírem. Předložil svou vlastní teorii tzv. unaveného světla. Domníval se, že červený posuv je způsobený ztrátou energie fotonů, které část své hybnosti předávají míjející hmotě. Zwicky měl pravdu jen částečně. Foton přicházející z hvězdy skutečně může předat část své hybnosti nějakému

²Viz Proc. Nat. Acad. Sci. 20 (1934), 254–263. O dva roky dříve se také L. Landau v článku [10], s. 288, krátce zmiňuje o hvězdách, které by mohly mít hustotu atomového jádra.

³Podrobný chronologický popis tohoto objevu je popsán v monografii [15].

atomu, přitom ale změni směr, takže jej nezaregistrujeme. Mezigalaktické prostředí je v průměru tak řídké (řádově jen proton na m^3 , kde $m_{\text{proton}} \doteq 1.67 \times 10^{-27}$ kg), že většina nemodifikovaných fotonů dorazí do našich detektorů bez problémů, o čemž svědčí ostré spektrální čáry. Později si Zwicky svůj omyl uvědomil a napsal další článek [31] o tom, jak lze interpretovat proměnlivou šíři spektrálních čar z rotujících galaxií.

V následujících kapitolách se podrobněji podíváme, jak Zwicky objevil temnou hmotu. Opět zde hrál významnou roli červený posuv spektrálních čar.

2. Věta o viriálu

Zwickyův objev temné hmoty je založen na větě o viriálu, která slouží k přibližnému odhadu kinetické energie stabilizovaných systémů. Tuto větu se nejprve pokusíme zformulovat. Uvažujme soustavu N hmotných bodů o hmotnostech m_1, \dots, m_N , které na sebe vzájemně gravitačně působí a nejsou ovlivňovány žádnými jinými silami. Označme jejich polohové vektory r_1, \dots, r_N , tj. pro každý časový okamžik t je $r_i(t) \in \mathbb{R}^3$ bod trajektorie i -tého bodu. Pak kinetická a potenciální energie této soustavy jsou dány vztahy

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i, \quad V = - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{Gm_i m_j}{|r_j - r_i|}, \quad (1)$$

kde $\dot{r}_i = dr_i/dt$ je časová derivace, \cdot je skalární součin v \mathbb{R}^3 , $|\cdot|$ je norma v \mathbb{R}^3 a $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ je gravitační konstanta. Závislost T , V , r_i, \dots na čase t nebudeme pro jednoduchost vyznačovat.

Ze tří Newtonových zákonů (z gravitačního zákona, z 2. zákona síly, tj. $F_i = m_i \ddot{r}_i$, a z 3. zákona akce a reakce) pro zrychlení i -tého tělesa dostáváme diferenciální rovnici

$$\ddot{r}_i = \sum_{j \neq i}^N \frac{Gm_j (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^3}. \quad (2)$$

Odtud a z (1) plyne, že

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j \neq i}^N \frac{Gm_j (r_j - r_i) \cdot (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^3} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j \neq i}^N \frac{Gm_j (r_j - r_i) \cdot r_i}{|r_j - r_i|^3} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j \neq i}^N \frac{Gm_j (r_i - r_j) \cdot r_j}{|r_i - r_j|^3} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot r_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \ddot{r}_j \cdot r_j = \sum_{i=1}^N F_i \cdot r_i, \end{aligned} \quad (3)$$

kde v poslední dvojsoumě na konci druhého řádku a též v (2) jsme přeznačili i a j .

Označíme-li stopu tenzoru momentu setrvačnosti $I = \sum_i m_i r_i \cdot r_i$ (Zwicky v [32], s. 228, ji nazývá *polar moment of inertia*), pak z (1) a (3) plyne, že

$$\ddot{I} = 2 \sum_{i=1}^N m_i (\dot{r}_i \cdot \dot{r}_i + \ddot{r}_i \cdot r_i) = 4T + 2V. \quad (4)$$

Pro ustálené mnohačasticové systémy je hodnota I v čase téměř konstantní. Rovněž celková kinetická energie T a celková potenciální energie V jsou téměř neměnné. Jedna z verzí věty o viriálu pro hmotné body působící na sebe gravitačně tvrdí, že pokud $\ddot{I} = 0$, pak

$$V = -2T. \quad (5)$$

Za předpokladu, že se celková mechanická energie $E = T + V$ soustavy nemění (srov. [9]), pro gravitačně stabilizované systémy podle (5) navíc platí

$$E = \frac{1}{2}V. \quad (6)$$

Co je gravitačně stabilizovaný systém, se ale definuje velice obtížně. Kdybychom např. uvažovali jen dvě tělesa, která kolem sebe obíhají po protáhlých eliptických drahách, tak rovnost (6) neplatí, protože na její levé straně je konstanta, zatímco pravá strana osciluje. Proto je třeba volit $N \gg 1$ a místo E , T a V uvažovat jen zprůměrované hodnoty přes dlouhé časové intervaly.

Věta o viriálu tedy není matematická věta s přesně formulovanými předpoklady, ale jen jakési tvrzení ověřené zejména experimentálně. Byla známa již na počátku 19. století a z této doby pochází i název *virial* pro potenciální energii $V = \sum_i F_i \cdot r_i$ (viz (3) a [26], s. 263). V roce 1870 Rudolf Clausius odvodil **větu o viriálu** (srov. (1), (3) a (5)) za předpokladu $E < 0$ ve tvaru

$$\left\langle \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^N F_i \cdot r_i \right\rangle = 0,$$

kde lomené závorky vyjadřují střední hodnoty výrazů uvnitř za velmi dlouhou dobu.

3. Jak Zwicky použil větu o viriálu na galaktickou kupu Abell 1656

Zwicky se stále zabýval otázkou záhadných červených posuvů galaxií. Bylo mu divné, proč mají posuvy spektrálních čar jednotlivých galaxií z kupy A1656 (viz obr. 3) tak velké rozptyly od vystředovaného červeného posuvu celé kupy. V pozorované oblasti jsou rychlosti dokonce tak velké, že asi 15 galaxií vykazuje modrý posuv,⁴ přestože se celá kupa od nás vzdaluje rychlostí vyšší než 2% rychlosti světla díky expanzi⁵ dané současnou hodnotou Hubbleovy konstanty [19]

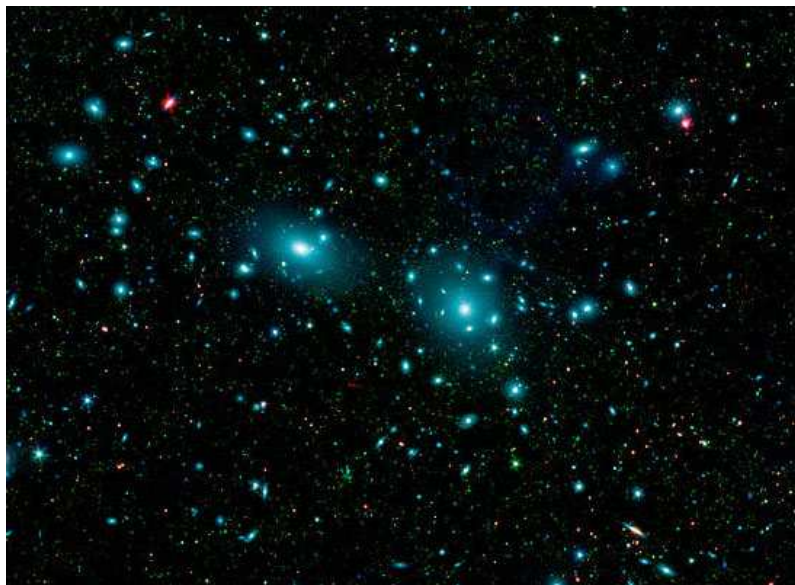
$$H_0 \approx 68 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (7)$$

V práci [30] Zwicky zjistil, že některé galaxie obíhají kolem středu kupy mnohem rychleji, než odpovídá větě o viriálu. Předpokládal, že kupa obsahuje $N = 800$ galaxií. Z naměřených svítivostí galaxií dále odhadl, že každá z nich má v průměru miliardu hvězd. Celkovou hmotnost kupy pak aproximoval takto (viz [30], s. 124):

$$\mathcal{M} = 800 \times 10^9 \times M_\odot = 1.6 \times 10^{42} \text{ kg}, \quad (8)$$

⁴Tyto galaxie pozorované jen v projekci se k nám přibližují rychlostmi dosahujícími až 350 km/s. Podle levé části histogramu z obr. 8 však do kupy A1656 v současnosti nepatří, i když v dávné minulosti tomu tak mohlo být.

⁵Určit současnou hodnotu Hubbleova parametru $H(t)$ není snadné, protože se vždy díváme do minulosti. V našem blízkém okolí je měření $H_0 = H(0)$ deformováno lokálními pohyby galaxií. Z rychlostí ve vzdáleném vesmíru je zase obtížné spolehlivě extrapolovat současnou hodnotu H_0 .



Obr. 3. Obří galaktická kupa Abell 1656 v souhvězdí Vlasy Bereniky. Uprostřed trůní dvě gigantické eliptické galaxie NGC 4889 a NGC 4874, které pohltní jakoukoliv galaxii, která se jim připlete do cesty.

kde $M_{\odot} = 2 \times 10^{30}$ kg je hmotnost Slunce. Z věty o viriálu však odvodil 400krát větší hmotnost kupy než \mathcal{M} (viz jeho článek [30], s. 125, z roku 1933). O čtyři roky později pak publikoval jemnější analýzu [32], kde podobný faktor snížil na 150 (srov. (8) a (17)). Aby tento paradox vysvětlil, předpokládal, že existuje obrovské množství jakési temné hmoty, která má gravitační účinky.

Podívejme se nyní podrobněji na Zwickyovu metodu pro určování hmotností galaktických kup pomocí věty o viriálu. Přitom se co nejvíce budeme držet jeho původního značení z článků [30] a [32].

Celkovou hledanou hmotnost vyšetřované galaktické kupy označme

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (9)$$

a nechť \bar{v}_i je na čase nezávislá průměrná rychlost i -té galaxie vzhledem k pozemskému pozorovateli. Potom se těžiště kupy od nás vzdaluje průměrnou rychlostí

$$\bar{v} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i. \quad (10)$$

Zwicky pak kinetickou energii v těžišťovém systému kupy aproximoval veličinou

$$\bar{T} := \frac{1}{2} M \bar{v}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\bar{v} - \bar{v}_i)^2, \quad (11)$$

kde střední kvadratická rychlost \bar{v} všech galaxií vzhledem k těžišti kupy je definována poslední rovností v (11).

K odhadu potenciální energie Zwicky předpokládal, že galaxie jsou rozloženy zcela rovnoměrně uvnitř koule o poloměru R . Sílu, která působí na galaxii o hmotnosti m_i , jejíž poloha je dána rádiusvektorem r_i , lze tedy aproximovat vztahem

$$F_i \approx -\frac{GMm_i r_i}{R^3},$$

uvážíme-li, že $M - m_i \approx M$. Odpovídající potenciální energie i -té galaxie potom je

$$V_i = F_i \cdot r_i \approx -\frac{GMm_i |r_i|^2}{R^3}. \quad (12)$$

Pak pomocí druhého momentu Zwicky odvodil, kolik je střední kvadratická hodnota vzdálenosti \bar{r} od středu kupy pro typickou galaxii [32], s. 230,

$$\bar{r}^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i |r_i|^2 \approx \frac{3}{4\pi R^3 \rho} \int_0^R r^2 \times 4\pi r^2 \rho dr = \frac{3R^2}{5}, \quad (13)$$

kde ρ je předpokládaná konstantní hustota kupy. Z (3), (12), (9) a (13) pak plyne, že

$$V = \sum_{i=1}^N F_i \cdot r_i \approx -\frac{GM}{R^3} \sum_{i=1}^N m_i |r_i|^2 \approx -\frac{GM\bar{r}^2}{R^3} \sum_{i=1}^N m_i = -\frac{3GM^2}{5R}.$$

Odtud, z věty o viriálu (5) a odhadu (11) potom Zwicky získal přibližný vztah

$$\boxed{M = \frac{5R\bar{v}^2}{3G}} \quad (14)$$

pro hledanou celkovou hmotnost kupy (viz [30], s. 124, a též [32], s. 230).

K určení poloměru R použil následující údaje. Kupu A1656 pozoroval na nebeské sféře pod úhlem $\theta = 1.7^\circ$. (Měsíc má pro srovnání 0.5° .) Hubble s Humasonem tehdy odhadli vzdálenost kupy na 13.8 Mpc. Protože $1 \text{ pc} = 3.086 \times 10^{16} \text{ m}$, máme

$$R = 13.8 \times 10^6 \times 3.086 \times 10^{16} \times \sin \frac{1}{2}\theta = 6.318 \times 10^{21} \text{ m}, \quad (15)$$

tj. $R \doteq 0.2 \text{ Mpc}$. Radiální rychlosti jednotlivých galaxií lze dobře stanovit pomocí Dopplerova jevu. Podle dat, která byla tehdy k dispozici, Zwicky zjistil, že jejich červené posuvy mají značný rozptyl od střední hodnoty celé kupy, i když podle [24], s. 14, a [16], s. 57, uvažoval jen 8 největších galaxií. Odtud vypočítal čtverec průměrné radiální rychlosti $\bar{v}_{\text{radial}}^2 = 5 \times 10^{11} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ vzhledem k těžišti kupy. V důsledku předpokládané izotropie rychlostí a sférické symetrie kupy pro průměrnou hodnotu rychlosti \bar{v} dostal

$$\bar{v}^2 = 3\bar{v}_{\text{radial}}^2 = 1.5 \times 10^{12} (\text{m/s})^2 \quad \text{a} \quad \bar{v} = 1.22 \times 10^6 \text{ m/s}. \quad (16)$$

Dosazením (15) a (16) do (14) obdržíme,

$$M = 2.367 \times 10^{44} \text{ kg}, \quad (17)$$

což je cca 150krát větší hodnota než v (8). Tento důležitý Zwickyův objev byl však po desetiletí zcela ignorován.

Zwicky v [32] navrhl ještě další dvě metody pro zjišťování temné hmoty. První z nich je pomocí gravitačního čočkování mezilehlou galaxií (viz obr. 2). Druhá jeho metoda se opírá o statistické vyhodnocení luminozity jednotlivých typů galaxií. V úvodu článku [32] se Zwicky zabývá i rotačními křivkami galaxií, což je další nástroj k zjišťování účinků temné hmoty.⁶

4. Problém chybějící hmoty

Zwickyův přístup k postulování existence temné hmoty si zasluhuje podrobnější rozbor.

1. Podle současných měření není vzdálenost vyšetřované kupy galaxií 13.8 Mpc, ale kolem 100 Mpc. To je skoro o řád dále. Dosadíme-li 100 Mpc do (15), dostaneme větší poloměr

$$R = 1.48 \text{ Mpc} = 4.58 \times 10^{22} \text{ m} \approx 5 \times 10^6 \text{ ly}, \quad (18)$$

a tím pádem ještě větší hmotnost než v (17). Celkem z (14), (16) a (18) dává věta o viriálu hmotnost

$$M = 1.71 \times 10^{45} \text{ kg},$$

což je cca 1000krát více než v (8). Abychom si udělali názornou představu o velikosti kupy A1656, uveďme, že vzdálenost naší Galaxie od nejbližší velké galaxie M31 v Andromedě je přibližně 0.88 Mpc (srov. s (18)).

2. Úhlový průměr $\theta = 1.7^\circ$ z (15) je patrně o trochu větší. Podle některých zdrojů se kupa A1656 nalézá v oblasti $2.7^\circ \times 2.5^\circ$ s nejasně určenou hranicí.
3. Zwicky v (8) předpokládá, že galaxie mají v průměru hmotnost miliardu sluncí. Tyto údaje jsou na druhé straně dosti podhodnocené. Značnou část světla hvězd totiž blokuje mezihvězdný prach. Pro srovnání uveďme, že naše Galaxie má kolem 400 miliard hvězd a její celková hmotnost činí $M_G \approx 10^{12} M_\odot$ (viz [11], s. 127), což je dokonce více než celková hmotnost \mathcal{M} všech 800 galaxií v (8) podle Zwickyho. Mléčná dráha však patří spíše k těm větším galaxiím. Z těchto důvodů se fyzikové v současnosti domnívají, že temné hmoty je asi o řád více než svítící baryonové látky. Přitom temná hmota nezáří v žádném oboru elektromagnetického spektra.

Zwicky udělal celou řadu dalších aproximací, které mají podstatný vliv na výslednou vypočtenou hmotnost:

4. Odhad celkového počtu galaxií $N = 800$ (viz (8)) je rovněž mírně podceněný, i když Zwicky v [32], s. 244, připouští $N \geq 1500$. V současnosti známe v kupě A1656 přes tisíc galaxií. V 1 Mpc³ je tak v průměru přes 70 galaxií. Navíc Zwicky před 80 lety jen těžko mohl z osmnáctipalcového dalekohledu na Mt. Palomaru⁷ spatřit tzv. trpasličí galaxie, které také zčásti přispívají k celkové hmotnosti. Např. v bezprostředním okolí naší Galaxie jich bylo poměrně nedávno nalezeno cca deset.

⁶Teorii rotačních křivek galaxií pak v 70. letech rozpracovala Vera Rubinová [23]. Objevila, že spirální galaxie mají „ploché“ rotační křivky a že rotují příliš rychle. Usoudila, že by měly obsahovat mnohem více nespítící látky než svítící, aby držely pohromadě [16].

⁷Slavný pětimetrový palomarský dalekohled byl zprovozněn až v r. 1949.

5. Zwicky předpokládal [32], s. 227, že hustota mezigalaktické hmoty uvnitř a vně kupy je stejná. V centrální oblasti kupy je však hustota mezigalaktické hmoty větší. Je zde více plynu či osamělých hvězd, které byly v důsledku rozmanitých gravitačních kolizí vymrštny z galaxií ven.
6. Zwicky uvažoval rovnoměrné rozložení galaxií uvnitř koule [32], s. 229. Smith [25] tento předpoklad neakceptuje a uvažuje podstatně menší hmotnost $M = \frac{1}{2}R\bar{v}^2/G$ než v (14), kde koeficient $\frac{5}{3}$ je oproti $\frac{1}{2}$ poněkud nadhodnocený. Kupu navíc vidíme jen v projekci, může být ev. zploštělá do tvaru elipsoidu či lívance. Vykazuje vyšší vzrůst (plošné) hustoty směrem ke středu, než by odpovídalo rovnoměrnému rozložení. Menší galaxie jsou přitom obecně dále od středu než větší (podobně jako je tomu u rozložení hvězd v kulových hvězdokupách). Zwicky však ve svém výpočtu uvažoval pouze ty nejjasnější galaxie. Nerovnoměrné rozložení galaxií je dobře patrné také z obr. 9.
7. Zwicky odhadl pouze přibližně kinetickou energii \bar{T} vzhledem k těžišti kupy, kde střední rychlost přes dlouhé časové intervaly \bar{v}_i z (11) aproximoval současnou hodnotou rychlosti $v_i = v_i(t) = |\dot{r}_i(t)|$ pro dané $i \in \{1, \dots, N\}$. Dnes sice známe mnohem přesněji hodnoty heliocentrických⁸ radiálních rychlostí jednotlivých galaxií, ale stanovit jejich střední hodnoty přes dlouhé časové intervaly nelze. Podle dat uvedených v [1], [2] a [5] pro galaxie, které patří do kupy A1656, vychází (srov. (16))

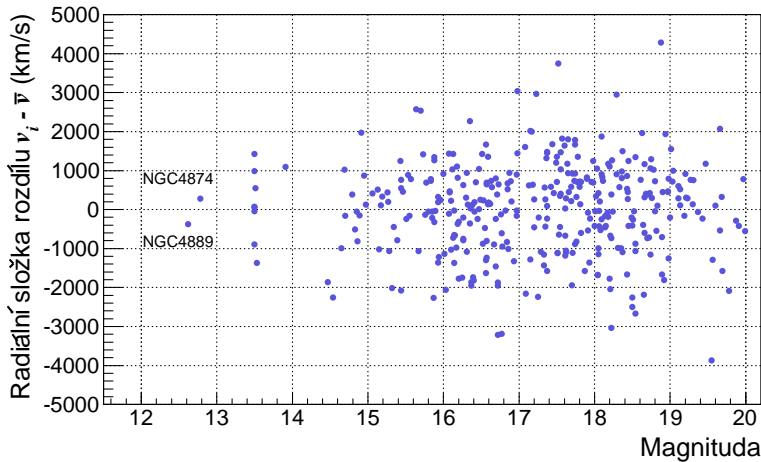
$$\bar{v} \approx 1.686 \times 10^6 \text{ m/s.} \quad (19)$$

8. Zwicky předpokládal izotropní rozložení rychlostí. Avšak mírná anizotropie v rozdělení radiálních rychlostí je dobře patrná z odchylky histogramu od Gaussovy křivky na obr. 8. Také rozptyl radiálních rychlostí malých galaxií⁹ je o něco větší než rozptyl radiálních rychlostí velkých galaxií (viz obr. 4).
9. K velkým rychlostem galaxií může přispívat i temná energie. Nemáme žádný důvod předpokládat, že by se nějakým způsobem kupě A1656 vyhýbala. Podle (7) a (18) je hodnota Hubbleovy konstanty přeškálovaná na poloměr kupy rovna $RH_0 \approx 10^5 \text{ m/s}$, což je více než 5% rychlosti (19) a zvyšovala by tak počítanou hmotnost. Navíc je rychlost ve vztahu (14) v kvadrátu! Jinými slovy, hodnověrná znalost radiálních rychlostí je velice podstatná pro výpočet celkové hmotnosti.
10. Zwicky se omezil na případ, že všechny galaxie mají stejnou hmotnost nezávislou na čase [32], s. 231. Galaxie si však neustále vyměňují hmotu s mezigalaktickým prostředím a jejich pozorované magnitudy se liší o 8 řádů, tj. rozdíl v hmotnostech je více než 3 řády. Aby zaokrouhlovací chyby nezneškodnily výslednou přesnost, je třeba sčítat součiny $m_i\bar{v}_i$ a $m_i(\bar{v} - \bar{v}_i)^2$ v (10) a (11) od nejmenších členů počínaje.

Uvedme ještě některé další skutečnosti, které je třeba vzít v úvahu pro důkladnou analýzu chyby.

⁸Rozumí se vzhledem ke Slunci.

⁹Hvězdy v okolí Slunce obíhají střed Galaxie rychlostmi kolem 250 km/s. Občas se ale objeví hvězda letící rychlostí přes 1000 km/s. Předpokládá se, že dochází k jejich vystřelování z kulových hvězdokup, ev. z okolí černých děr. K tomu stačí, aby se dvojhvězda dostatečně přiblížila k jinému masivnímu objektu, který gravitačně zachytí většinou těžší složku na eliptickou dráhu a lehčí složku naopak odmrští po hyperbolické dráze. K podobným kolizím galaxií dochází i v kupě A1656.



Obr. 4. Závislost radiální složky rozdílu rychlostí $v_i - \bar{v}$ galaxií kupy A1656 na magnitudě, kde $v_i = v_i(t)$ odpovídá současnosti.

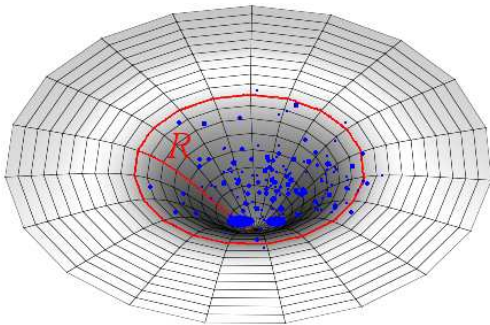
- Zwicky předpokládal, že systém A1656 je v rovnováze a že věta o viriálu platí přesně. Za dobu existence kupy však mohla typická galaxie oběhnout její střed jen několikrát rychlostí \bar{v} z (19), protože jeden oběh trvá odhadem

$$2\pi\bar{r}/\bar{v} = 4.11 \times 10^9 \text{ let}, \quad (20)$$

kde $\bar{r} = \sqrt{3R}/\sqrt{5}$ je střední vzdálenost z (13) a R je dáno v (18). I když jsou \bar{r} a \bar{v} mírně nadhodnocené vůči průměrným hodnotám, jen těžko můžeme hovořit o ustáleném (relaxovaném) systému. Nabízí se tedy otázka, zda je vůbec mechanické použití věty o viriálu obhajitelné.

- Zwicky použil Newtonovu mechaniku s nekonečnou rychlostí šíření gravitační interakce, zatímco skutečná rychlost šíření je zřejmě konečná. V kupě, která má průměr deset milionů světelných let, efekty gravitační aberace jistě nejsou zanedbatelné [9], protože podle obr. 8 se některé galaxie v kupě pohybují vzhledem k jejímu těžišti rychlostmi většími, než je 1% rychlosti světla, tj. i dlouhodobě působící drobné relativistické efekty ovlivňují vývoj systému. Máme dobře vyzkoušeno, jak funguje Newtonova mechanika na krátkých časových škálách a nízkých rychlostech ve Sluneční soustavě. Uvažovaná kupa má však podle (18) průměr cca $3 \text{ Mpc} > 6 \times 10^{11} \text{ au}$, kde $1 \text{ au} \doteq 150 \times 10^9 \text{ m}$ je střední vzdálenost Země od Slunce. Není jasné, zda jsme vůbec oprávněni používat Newtonovy zákony na systémy o tolik řádů větší. To je podobné, jako kdybychom aplikovali zákony kvantové mechaniky na objekty o velikosti desítek metrů.
- Zwicky nahradil galaxie o průměru až 10^{10} au hmotnými body. To pak ale znemožňuje uvažovat momenty hybnosti rotujících galaxií, které jistě přispívají k celkovému momentu hybnosti.¹⁰ Také nelze zahrnout vliv slapů, které podstatně ovlivňují celkovou dynamiku. Např. „izolovaná“ soustava dvou galaxií obíhající blízko

¹⁰Například soustavě Země-Měsíc narůstá orbitální moment hybnosti, protože jí klesá rotační moment hybnosti v důsledku slapů.



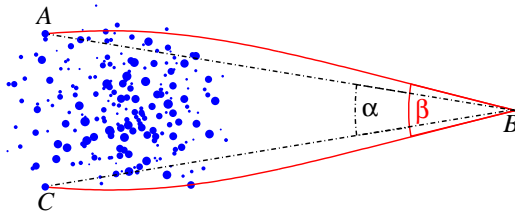
Obr. 5. Vlevo: Deformace prostoročasu galaktickou kupou o poloměru R . Obvod kružnice o poloměru R je menší než $2\pi R$. Vpravo: Tři stejné velké rybičky v kulovém akváriu mají úhlový rozměr tím větší, čím jsou dále od čelní stěny.

kolem sebe není stabilní, protože galaxie časem splynou právě v důsledku slapového tření, zatímco klasický problém dvou těles má periodické řešení.

Zwicky se navíc omezil jen na případ, že N je konstantní. Jenomže občas některé galaxie splynou nebo se roztrhají v důsledku nejrůznějších kolizí v dosti přehluštěném prostoru (viz obr. 3).

14. Časoprostor zakřivený více než tisícem galaxií (viz obr. 5 vlevo) o celkové hmotnosti řádově 10^{45} kg Zwicky nahradil eukleidovským prostorem. Deformaci prostoru obsahujícího kupu galaxií (srov. obr. 2 a 6) dokazuje gravitační čočkování, které zvětšuje¹¹ pozorované úhlové vzdálenosti galaxií od středu kupy, a tím i R ve vztazích (14), (15) a (18). Nadto objem koule v takto deformovaném prostoru není $4\pi R^3/3$ (srov. např. (13) a obr. 5 vlevo), ale je menší, jak plyne z Bishopovy-Gromovovy nerovnosti [8], s. 183 (viz též [12], s. 1099). Také povrch koule integrovaný v (13) je v zakřiveném prostoru menší než $4\pi r^2$.

Zakřivení prostoročasu vyvolává i další drobné efekty. Celkový červený posuv způsobuje nejen expanze vesmíru, ale částečně i červený gravitační posuv. Fotony musí překonat nejen potenciálovou jámu příslušné hvězdy,¹² ale i hlubší jámy jednotlivých galaxií a též potenciálovou jámu celé kupy (vztah pro změnu frekvence fotonů v poli centrální síly je uveden např. v [26], s. 261).



Obr. 6. Schematické znázornění obyhu světelných paprsků gravitačním polem galaktické kupy. Pozorovaný úhel $\beta = \sphericalangle ABC$ je větší než úhel $\alpha = \sphericalangle ABC$.

¹¹Podobně, když se díváte do kulového akvária, rybičky i jejich rychlosti se jeví větší, než ve skutečnosti jsou (viz obr. 5 vpravo). V tomto případě tedy není třeba uvažovat mezilehlou galaxii, jak to Zwicky navrhoval, protože samotná kupa A1656 zdánlivě zvětšuje své vlastní objekty.

¹²Červený gravitační posuv fotonů z neutronových hvězd odpovídá svou velikostí kosmologickému posuvu až z ≈ 0.4 . Pro obyčejné hvězdy je však nepatrný.

15. Další zdroje chyb jsou ve vstupních datech. Např. některé práce uvádějí vzdálenost středu kupy 99 Mpc, jiné 103 Mpc. Podle [2] je rektascenze středu kupy $\alpha = 12\text{ h } 57.3\text{ m}$ a deklinace $\delta = 28^\circ 14.4'$. Jiné prameny uvádějí poněkud odlišné údaje, např. podle [22] je $\alpha = 13\text{ h } 00\text{ m } 00.7\text{ s}$ a $\delta = 27^\circ 56' 51''$. Není totiž zřejmé, jak vůbec definovat střed kupy, když ji vidíme jen v projekci s nepřesně danou hranicí a navíc ani neznáme rychlost šíření gravitační interakce nutnou k určení „středu“.

Velké množství drobných chyb nejružnějšího původu může podstatně zkreslit vypočtenou hmotnost M . Zwicky si byl dobře vědom, že se dopustil celé řady aproximací, které uvádíme např. v bodech 2, 4, 6, 11, 15 (viz [32], s. 230, 231, 233, 242, 244). Neuvážoval však některé další důležité skutečnosti uvedené např. v bodech 9, 12, 13, 14.

5. Analýza současných dat

Galaktická kupa Abell 1656 se nachází na počátku vlákna galaxií (s anglickým názvem Great Wall) dlouhého více než miliardu světelných let. Kupa má poměrně dobře změřené červené posuvy a magnitudy všech svých galaxií. Poblíž středu se nalézají dvě obří (angl. supergiant) eliptické galaxie NGC 4889 a NGC 4874, které jsou cca 10krát větší než Mléčná dráha a výrazně ovlivňují celkovou dynamiku kupy (viz obr. 3). Jejich magnitudy jsou po řadě 12.62 a 12.78. Uprostřed galaxie NGC 4889 se nachází největší známá černá díra o hmotnosti $10^{10} M_\odot$. Galaxie NGC 4874 zase obsahuje rekordní počet 30 000 kulových hvězdokup. V kupě Abell 1656 je desítky dalších galaxií, které jsou větší než Mléčná dráha.

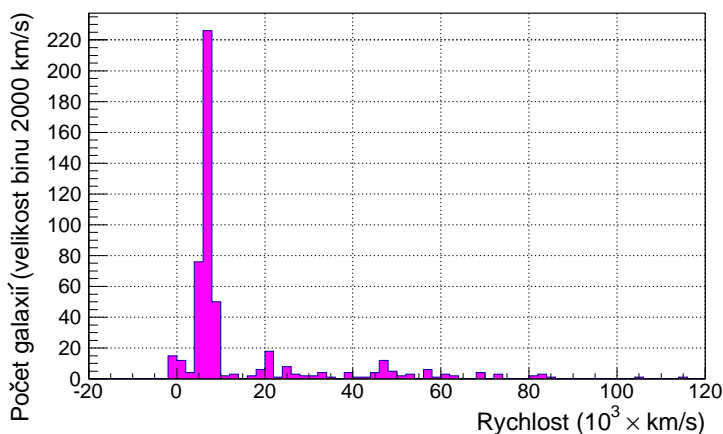
Zwicky v [30] a [32] bohužel neuvádí žádná konkrétní data o rychlostech či magnitudách jednotlivých galaxií z kupy A1656 a neuvádí ani rychlost těžiště \bar{v} . Omezuje se jen na R a \bar{v} z (15) a (16).

Podívejme se proto nyní, co by Zwicky svojí metodou dostal pro současná data. K aktualizaci jeho výpočtu využijeme údaje zveřejněné v [1] \cup [2] \cup [5]. Některé zde uváděné galaxie do kupy A1656 evidentně nepatří, i když se ve sledovaném výseku oblohy nacházejí. Například je zde asi 50 galaxií, jejichž radiální rychlosti přesahují 40 000 km/s. Jedna galaxie (viz obr. 7 vpravo) se dokonce pohybuje rychlostí 114 990 km/s, což je více než třetina rychlosti světla! Podle relativistického vztahu $z = \sqrt{(c+v)/(c-v)} - 1$ uvedeného v [7], s. 348, je její červený posuv $z \approx 0.5$. Dále podotkněme, že vzdálenost odpovídající poloměru kupy (18) by galaxie vzdalující se rychlostí 40 000 km/s urazila za necelých 50 milionů let. Galaxie nacházející se v pravé části histogramu na obr. 7 se tedy v kupě nemohou nalézat.

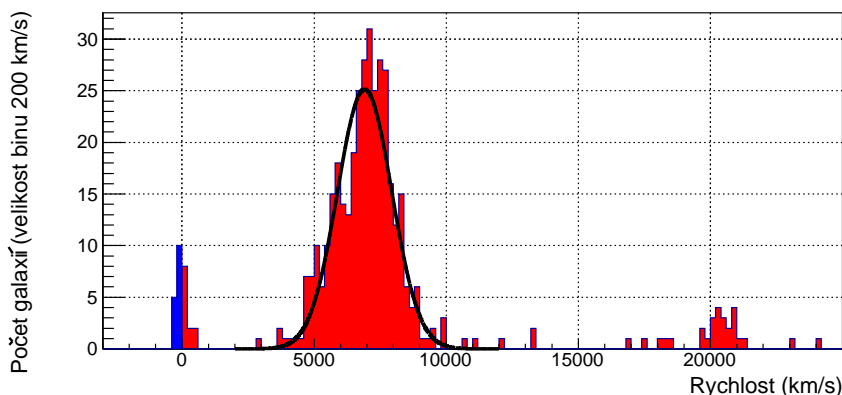
Nerovnoměrné rozložení rychlostí vzhledem k těžišti kupy je dobře patrné z histogramů na obr. 7 a 8. Všimněte si ještě, že galaxie vykazující modrý a malý červený posuv tvoří samostatnou skupinu na obr. 8 vlevo.¹³ Proto jsme se při výpočtu (19) (a též (21) níže) omezili jen na rychlosti z intervalu 2 000 až 12 000 km/s.

Protože kupa má relativně malý úhlový průměr, mají všechny její galaxie přibližně stejnou vzdálenost od Země. Proto lze pro jednoduchoost předpokládat, že hmotnosti m_i jsou podle Pogsonova vztahu úměrné $10^{-0.4\text{mag}_i}$, kde mag_i je změřená magnituda i -té galaxie (viz [7], s. 370 a [17], s. 22). Tento trik nám umožňuje vypočítat průměrnou

¹³Tato menší kupa působí jako slabá předsádková spojná čočka.



Obr. 7. Histogram radiálních rychlostí galaxií s magnitudou nepřesahující 20, které se v projekci zobrazují do kupy A1656.



Obr. 8. Detail histogramu z obr. 7 pro radiální rychlosti menší než 25 000 km/s. Galaxie s modrým posuvem jsou vlevo. Plná čára představuje proložení uvažovaných dat Gaussovou křivkou.

radiální rychlost \bar{v} (resp. $\overline{\bar{v}}$) ve vztahu (10) (resp. (11) a (19)), aniž bychom znali konkrétní hodnoty m_i . Tak dostáváme

$$\bar{v} \approx 6877 \text{ km/s.} \quad (21)$$

Z Hubbleova vztahu $\bar{v} = H_0 d$ a (7) vidíme, že kupa A1656 je od nás vzdálena $d \approx 100$ Mpc (srov. (18)). Červený posuv z odpovídající (21) je přímo úměrný vzdálenosti d pro $z \ll 1$, tj. platí

$$z = \frac{H_0}{c} d = 0.023,$$

kde $c = 3 \times 10^8$ m/s je rychlost světla ve vakuu.

Podle (14), (18) a (19) tak vychází celková hmotnost kupy¹⁴

$$M = 3.25 \times 10^{45} \text{ kg.}$$

Pro srovnání (viz též (8)) uveďme dolní odhad hmotnosti kupy založený na Pogsonově vztahu a změřených svítivostech galaxií

$$\mathcal{M} > C \sum_i 10^{-0.4\text{mag}_i} = 3.3 \times 10^{44} \text{ kg,}$$

kde sčítáme jen přes 352 nejjasnějších galaxií se známými magnitudami nepřesahujícími 20, $C = m 10^{0.4\text{mag}}$ je škálovací konstanta a $\text{mag} = 12.78$ je referenční magnituda srovnávací galaxie NGC 4874, která je podle [33] desetkrát hmotnější než naše Galaxie, tj.

$$m = 10M_G = 10^{13}M_\odot = 2 \times 10^{43} \text{ kg,} \quad (22)$$

kde celková hmotnost naší Galaxie $M_G = 10^{12}M_\odot$ je uvedena v [11], s.127. Vidíme, že hmotnost M určená z věty o viriálu je o řád větší než dolní odhad hmotnosti \mathcal{M} . Nicméně vzniká otázka, kolik činí celková hmotnost cca tisíce nezapočítaných trpasličích galaxií, mezigalaktické nesvítící baryonové hmoty apod.

Pokud tvrdíme, že temná hmota existuje, měli bychom nejprve umět spolehlivě odhadnout všechny chyby, kterých jsme se dopustili v bodech 1–15 v předchozí kapitole 4. Zejména chyby v 9 a 11–15 mohou být dosti velké. Také rozložení hmoty v kupě A1656 diskutované v bodě 6 není příliš rovnoměrné. Např. její centrální oblast přitahuje rychlostí cca $v = 1000 \text{ km/s}$ svou menší podkupu soustředěnou kolem galaxie NGC 4839 s magnitudou 13.51. To se občas komentuje tak, že centrum tvořené dvěma gigantickými eliptickými galaxiemi NGC 4889 a NGC 4874 se „chystá k obědu“ (viz obr. 9). Ze vztahu $t = s/v$, kde s určíme podobně jako R v (18), snadno odvodíme, že tato hostina potrvá asi miliardu let.

6. Co je podstatou temné hmoty?

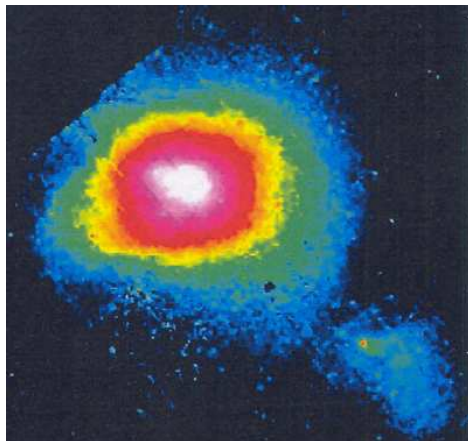
V současnosti probíhá rozsáhlá diskuze o tom, co je temná hmota. Její část jistě tvoří známé částice. Zatím ale neumíme spolehlivě experimentálně ověřit, kolik temné hmoty připadá např. na neutrina (zejména reliktní). Hovoří se také o mezihvězdném prachu či temných oblačích plynu, ale i o objektech MACHO (Massive Compact Halo Objects), což mohou být osamělé černé díry, vyhaslé hvězdy, hnědí trpaslíci, bludné planety apod. Přispívat mohou i temné galaxie, v nichž je tvorba hvězd potlačena, protože hustota látky klesla pod určitou kritickou mez nutnou pro tvorbu hvězd (jako např. u galaxie LEO IV v těsné blízkosti naší Galaxie). Svítivost takových galaxií je malá, i když mají stále dostatek nesvítící baryonové hmoty.

Hledají se i nové elementární částice, jež by mohly vysvětlit podstatu temné hmoty, např. axiony¹⁵ či WIMPy (Weakly Interacting Massive Particles¹⁶). Za tímto účelem

¹⁴Odtud a z (18) dostaneme průměrnou hustotu kupy $\rho = 8 \times 10^{-24} \text{ kg/m}^3$, což je podstatně více, než činí současná průměrná hustota vesmíru $\approx 10^{-27} \text{ kg/m}^3$. Pro srovnání uveďme, že v [3] se hustota temné hmoty v naší Galaxii odhaduje na $0.008 M_\odot \text{pc}^{-3} = 5.444 \times 10^{-22} \text{ kg/m}^3$. Podle [13] je ale tato hustota přinejmenším o řád menší.

¹⁵Axiony jsou hypotetické částice se spinem 0, které byly postulovány, aby vysvětlily, proč se v silných interakcích (kvantové chromodynamice) nenarušuje CP symetrie (Charge–Parity). Měly by být velice lehké, 10^{-6} až $1 \text{ eV}/c^2$, a s okolím by měly interagovat gravitačně a elektromagneticky.

¹⁶WIMP je souhrnné označení pro hypotetické částice, o kterých se předpokládá, že jsou velice



Obr. 9. Centrální oblast galaktické kupy A1656 se chystá pohltit svoji menší podkupu vpravo dole, která má asi 100 galaxií. Obrázek byl pořízen v měkkém rentgenovém záření [14].

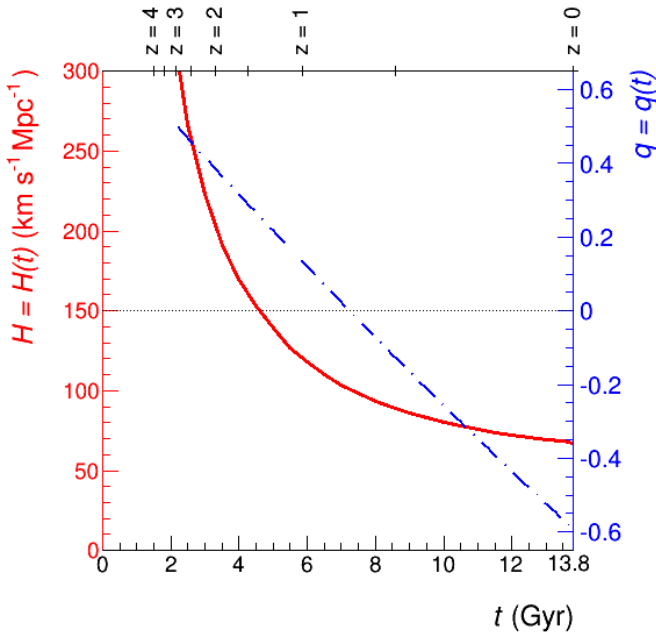
se stavějí různé sofistikované detektory (CDMS, DAMA/LIBRA, ADMX, ...) často umístěné pod zemí, které pátrají po temné hmotě. Zatím marně. Rovněž na urychlovači LHC v CERNu, dosud nebyly objeveny žádné nové částice, jež by vysvětlily temnou hmotu. Pokouší se je nalézt i detektor AMS (Alpha Magnetic Spectrometer) umístěný na mezinárodní vesmírné stanici ISS.

Působení temné hmoty ve Sluneční soustavě se také nepozoruje [13], i když je Slunce značný gravitační atraktor. Zdá se tedy, že temná hmota, pokud existuje, téměř jistě není schopna disipovat svou vnitřní energii. Proto se nemůže usadit v okolí Slunce. Rovněž pozorované kmitání hvězd ve směru kolmém na galaktickou rovinu Mléčné dráhy lze dobře vysvětlit klasickou Newtonovou mechanikou bez přítomnosti temné hmoty (viz [13]). Naproti tomu Clowe [4] uvádí příklad srážky dvou galaktických kup, kde se mezigalaktický plyn zabrzdí, zatímco galaxie společně s temnou hmotou pokračují dále v nezměněném směru a její přítomnost je odhalena pomocí gravitačního čočkování. Takových příkladů existuje už několik (např. Bullet Cluster, Musketball Cluster). Obě kupy jsou vždy zhruba stejně velké a společně s oblaky temné hmoty leží v jedné přímce.

Rychlost rozpínání vesmíru, která je charakterizována Hubbleovým parametrem $H = H(t)$ (viz obr. 10), podstatně závisí na množství temné hmoty a temné energie. Nedávno sonda Planck zpřesnila hodnoty nepatrných fluktuací reliktního záření pro $z \approx 1100$. Z nich pak pomocí extrapoláčnických a iteračních metod založených na obecné teorii relativity a Boltzmannově rovnici bylo odvozeno (viz [19]), že se současný vesmír skládá z 5% baryonové látky, 27% temné hmoty a 68% temné energie. Odpovídající průběh tzv. zpomalovacího parametru $q = q(t) := -1 - \dot{H}(t)/H^2(t)$ je také zakreslen do obr. 10. Hodnota q je v současnosti záporná, protože se rozpínání vesmíru zrychluje.

Na závěr si uveďme ještě příklad ilustrující, kolik temné mezigalaktické hmoty lze v centrální oblasti kupy A1656 očekávat.

hmotné (alespoň 10 GeV/c²) a s okolím interagují slabě a gravitačně. Částice spadající do této kategorie předpovídá např. supersymetrické rozšíření standardního modelu, kde lze roli WIMPu přisoudit neutralinu. V této teorii má každý boson svůj supersymetrický fermionový protějšek a naopak. Neutralino je tedy boson odpovídající neutrinu, což je fermion.



Obr. 10. Na spodní vodorovné ose je čas v miliardách let od Velkého třesku a na horní vodorovné ose je odpovídající červený posuv z . Průběh Hubbleova parametru $H = H(t)$ je vyznačen plnou čarou podle dat z [18]. Čerchovaně je znázorněn průběh zpomalovacího parametru $q = q(t)$, který byl odvozen pomocí numerického derivování funkce $H = H(t)$.

Příklad. Předpokládejme pro jednoduchost, že obě obří eliptické galaxie NGC 4889 a NGC 4874 (viz obr. 3) mají stejnou hmotnost¹⁷ m a že obíhají kolem sebe rychlostí v po kružnici se středem O a poloměrem r . Protože gravitační potenciál uvnitř homogenní kulové vrstvy je konstantní, vnější galaxie ani případná temná hmota vně koule se středem O a poloměrem r nemají na tento pohyb příliš velký vliv. Z Newtonova gravitačního zákona pak dostaneme

$$\frac{Gm^2}{4r^2} = \frac{mv^2}{r}. \quad (23)$$

Vzdálenost obou galaxií na nebeské sféře je $8.15'$, což v projekci na vzdálenost 100 Mpc činí 7.32×10^{21} m. Pro poloměr r tedy platí

$$r \geq 3.66 \times 10^{21} \text{ m}. \quad (24)$$

Podle dat¹⁸ z roku 2005 (viz [1], s. 19) jsou naměřené radiální rychlosti obou galaxií 6472 km/s a 7189 km/s. Přítom jejich průměr $\tilde{v} = 6830.5$ km/s velice dobře korespon-

¹⁷Pokud by jedna z těchto galaxií měla menší hmotnost, tak by obíhala větší rychlostí po delší dráze, a tím by zachycovala více menších galaxií než druhá obří galaxie. Tímto mechanismem se hmotnosti obou galaxií vyrovnávají.

¹⁸Podle starších dat [2] z roku 1995 jsou radiální rychlosti obou galaxií 6505 km/s a 7108 km/s, což dává na levé straně (25) menší hodnotu 3.015×10^5 m/s.

duje s průměrnou rychlostí vzdalování celé kupy (21). Pro radiální rychlost v_{radial} vzhledem k \tilde{v} máme podle (22), (23) a (24)

$$\begin{aligned} 3.585 \times 10^5 &= \frac{7\,189\,000 - 6\,472\,000}{2} = v_{\text{radial}} \leq v = \sqrt{\frac{Gm}{4r}} \\ &\leq \sqrt{\frac{6.673 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{43}}{4 \times 3.66 \times 10^{21}}} = 3.02 \times 10^5 \text{ (m/s)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Porovnáme-li levou a pravou stranu, dostaneme mírný nesoulad. Tento zjednodušený příklad tedy naznačuje, že Newtonova mechanika nepopisuje realitu věrně nebo jsou špatně odhadnuty hmotnosti obou eliptických galaxií nebo je třeba předpokládat existenci temné hmoty mezi galaxiemi, i když se nezdá, že by jí mělo být 10krát více než hmoty svítící. Kdybychom např. zahrnuli vliv malých galaxií, které jsou uvnitř koule se středem O a poloměrem r , dostali bychom pravou stranu (25) větší. Také dolní odhad v (24) je menší, protože kupa zvětšuje úhlové vzdálenosti v důsledku gravitačního čočkování. Proto by pravá strana v (25) měla být ve skutečnosti větší. \square

I když data, která Zwicky používal, byla dosti nepřesná, nelze mu upřít prioritu v zajímavé úvaze vedoucí k postulování existence temné hmoty. Je velice pravděpodobné, že Newtonův gravitační zákon na velkých vzdálenostech aproximuje realitu jen velice hrubě. V současnosti se proto rozvíjejí a studují různé modifikace Newtonovy mechaniky MOND (Modified Newtonian Dynamics) využívající např. retardované potenciály. Nasnadě je také otázka správné interpretace naměřených dat. Např. hodně diskutovaná temná energie může být jen důsledkem nesprávného použití stávajících fyzikálních modelů na extrémně dlouhé časové intervaly [9]. Podobně temná hmota může být jen důsledkem mechanického užití Newtonových zákonů na obrovské vzdálenosti v zakřiveném časoprostoru (viz obr. 5).

Poděkování. Autoři děkují RNDr. Luboši Neslušanovi, CSc., Ing. Vladimíru Novotnému a RNDr. Vojtechu Rušinovi, DrSc., za cenné připomínky. Tato publikace byla podpořena projekty RVO 67985840 a OPVK CZ.1.07/2.3.00/20.0207 ESF v ČR.

L i t e r a t u r a

- [1] ADAMI, C., et al.: *The build-up of the Coma cluster by infalling substructures*. A&A 443 (2005), 17–27.
- [2] BIVIANO, A., et al.: *A catalogue of velocities in the central region of the Coma cluster*. Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 111 (1995), 265–274.
- [3] BOVY, J., TREMAINE, S.: *On the local dark matter density*. Astrophys. J. 756 (2012), 89.
- [4] CLOWE, D., et. al.: *A direct empirical proof of the existence of dark matter*. Astrophys. J. Lett. 648 (2006), L109–L113.
- [5] COLLESS, M., DUNN, A. M.: *Structure and dynamics of the Coma cluster*. Astrophys. J. 458 (1996), 435–454.
- [6] GUNN, J. E., TINSLEY, B.: *An accelerating Universe?* Nature 257 (1975), 454–457.
- [7] KLECZEK, J.: *Velká encyklopedie vesmíru*. Academia, Praha, 2002.

- [8] KOWALSKI, O., KRÍŽEK, M.: *Abelova cena v roce 2009 udělena Michailu Gromovovi*. PMFA 54 (2009), 177–187.
- [9] KRÍŽEK, M.: *Antigravitace a její projevy aneb Platí zákon zachování energie? Část 1 a 2*. Čs. čas. fyz. 62 (2013), 105–111, 162–167.
- [10] LANDAU, L.: *On the theory of stars*. Phys. Zeitschrift der Sowjetunion 1 (1932), 285–288.
- [11] LANG, K. R.: *Astrophysical formulae, vol. II*. Springer, Berlin, 2006.
- [12] MISNER, C. W., THORNE, K. S., WHEELER, J. A.: *Gravitation*. 20th edition, W. H. Freeman, New York, 1997.
- [13] MONI BIDIN, C., CARRARO, G., MÉNDEZ, R. A., SMITH, R.: *Kinematical and chemical vertical structure of the Galactic thick disk, II. A lack of dark matter in the solar neighborhood*. Dostupné z arXiv: 1204.3924v1.
- [14] NEUMANN, D. M., LUMB, D. H., PRATT, G. W., BRIEL, U. G.: *The dynamical state of the Coma cluster with XMM-Newton*. Dostupné z arXiv: astro-ph/0212432v1.
- [15] NUSSBAUMER, H., BIERI, L.: *Discovering the expanding universe*. Cambridge Univ. Press, 2009.
- [16] PANEK, R.: *Čtyřprocentní vesmír. Temná hmota, temná energie a hledání zbytku reality*. Argo/Dokořán, Praha, 2012.
- [17] PEEBLES, P. J. E.: *Principles of physical cosmology*. Princeton Univ. Press, New Jersey, 1993.
- [18] PILIPENKO, S. V.: *Paper-and-pencil cosmological calculator*. Dostupné z arXiv: 1303.5961v1, 2013, 1–4.
- [19] Planck Collaboration, Planck 2013 results, I. *Overview of products and scientific results*. Dostupné z arXiv:/submit0674450.
- [20] RATRA, B., VOGLEY, M. S.: *Resource letter: BE-1: The beginning and evolution of the Universe*. Dostupné z arXiv: 0706.1565v1, 2007, 1–95.
- [21] RIESS, A. G., et al.: *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*. Astronom. J. 116 (1998), 1009–1038.
- [22] RINES, K., et al.: *Infrared mass-to-light profile throughout the infall region of the Coma cluster*. Astrophys. J. 561 (2001), L41–L44.
- [23] RUBIN, V.: *A brief history of dark matter*. The Dark Universe. Matter, Energy, and Gravity, M. Livio (ed.), Cambridge Univ. Press, 2003, 1–13.
- [24] SANDERS, R. H.: *The dark energy problem – a historical perspective*. Cambridge Univ. Press, 2010.
- [25] SMITH, S.: *The mass of the Virgo cluster*. Astrophys. J. 83 (1936), 23–30.
- [26] ŠOLC, M., ŠVESTKA, J., VANÝSEK, V.: *Fyzika hvězd a vesmíru*. SPN, Praha, 1983.
- [27] TINSLEY, B.: *Accelerating Universe revisited*. Nature 273 (1978), 208–211.
- [28] WEINTRAUB, D. A.: *How old is the Universe?* Princeton Univ. Press, 2011.
- [29] ZWICKY, F.: *On the red shift of spectral lines through interstellar space*. Proc. Nat. Acad. Sci. 15 (1929), 773–779.
- [30] ZWICKY, F.: *Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln*. Helv. Phys. Acta 6 (1933), 110–127.
- [31] ZWICKY, F.: *Remarks on the redshifts from nebulae*. Phys. Rev. 48 (1935), 802–806.
- [32] ZWICKY, F.: *On the masses of nebulae and clusters of nebulae*. Astrophys. J. 86 (1937), 217–246.
- [33] http://en.wikipedia.org/wiki/NGC_4874