

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Miroslav Lávička; Bohumír Bastl; František Ježek  
Geometrické modelování – od historie k současnosti a budoucnosti

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 58 (2013), No. 2, 89–99

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/143374>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2013

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

# Geometrické modelování – od historie k současnosti a budoucnosti

Bohumír Bastl, František Ježek, Miroslav Lávička, Plzeň

## 1. Geometrické modelování aneb CAGD

Málokterá oblast geometrie se dotýká tolika jiných oblastí jako geometrické modelování. Jeho výsledky lze najít v architektuře, veškerých odvětvích průmyslu včetně závažného, v medicíně, biologii, archeologii, energetice a konečkonců i při psaní textu na počítači, neboť např. fonty v MS Windows jsou uloženy ve formě Bézierových křivek. Vznik geometrického modelování je spojen s nejvyspělejšími návrhy v oblasti automobilového a leteckého průmyslu. Jde o jedno z nejmladších geometrických odvětví, které však významně těží z více než dvoutisícileté historie geometrie a matematiky vůbec.

Zjednodušeně řečeno *geometrické modelování* (nebo též *Computer Aided Geometric Design*, zkráceně *CAGD*) je moderní geometrická disciplína, která se zabývá studiem reprezentací křivek, ploch a těles volného tvaru a především pak možnostmi jejich efektivního užití v následných (technických i netechnických) aplikacích. O širokém záběru této vědní oblasti si může každý udělat alespoň hrubou představu, pokud si projde několik posledních čísel tematicky zaměřeného mezinárodního časopisu *Computer Aided Geometric Design*.<sup>1</sup>

Geometrické modelování současně přináší novou příležitost i pro klasická (nejen geometrická) témata. Například Pythagorova věta se vrací ve formě tzv. křivek s pythagorejským hodografem či ploch s pythagorejskými normálami; kvaterniony se ukazují jako velmi užitečný aparát při popisu určitých prostorových křivek s aplikačním potenciálem v technice; Apolloniova kružnice a její prostorové zobecnění se uplatňuje při studiu křivek a ploch parametrizovaných pomocí délek tětiv; téměř zapomenutá cyklografická projekce je stěžejním nástrojem při studiu křivek a ploch v Laguerrově geometrii; nová praktická uplatnění nacházejí dříve jen teoreticky zajímavé plochy jako třeba Dupinovy či Darbouxovy cyklidy; Minkowského prostor již není jen doménou fyziků a teorie relativity, ale stává se naprosto přirozeným prostředím pro řešení aktuálních geometrických problémů technické praxe, jakými jsou třeba konstrukce přechodových ploch či zaoblování hran – a mohli bychom uvést celou řadu dalších příkladů.

---

<sup>1</sup><http://www.journals.elsevier.com/computer-aided-geometric-design>

Remarque 1 - Le point L peut être extérieur à A  
 des arcs  
 Dans le c  
 La constr  
 elle est

Remarque

$$P = \lambda^3 A + 3\lambda^2 \mu$$

$$\lambda = 1 - \mu$$

A	$\vec{AB}$							
B	$\vec{BC} - \vec{AB}$							
C	$\vec{CD} - \vec{BC}$	$\vec{CD} - 2\vec{BC} + \vec{AB}$						
D	$\vec{DE} - \vec{CD}$	$\vec{DE} - 2\vec{CD} + \vec{BC}$	$\vec{DE} - 3\vec{CD} + 3\vec{BC} - \vec{AB}$					
E	$\vec{DE}$							

pour 4<sup>e</sup> degré:  $E(4) = 6C - 4B + A$      $(D - 3C + 3B - A)$      $P = 0A - 3\mu \cdot \vec{AB}$



Obr. 1. PAUL DE CASTELJAU (\*1930); vlevo náčrt proslulého de Casteljauova algoritmu

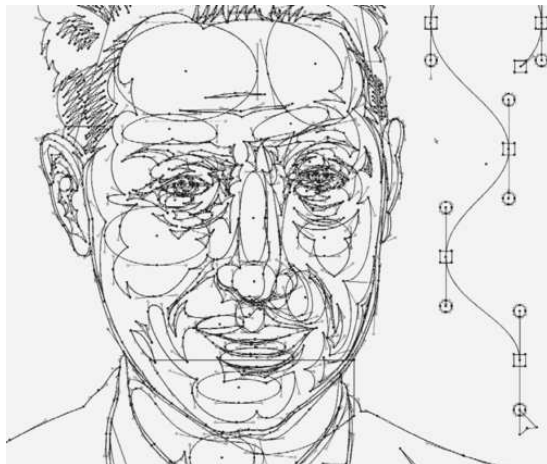
## 2. Vznik a vývoj geometrického modelování

Počátky moderní historie geometrického modelování sahají do 40. let 20. století a jsou spojeny z rozvojem leteckého průmyslu. V roce 1944 propojil R. Liming (viz [21]) poprvé klasické konstrukční techniky s numerickými metodami a algoritmy a významně tak ovlivnil navrhování tvaru letadel v následujících letech.

V 60. letech 20. století P. de Casteljau vyvinul během své práce pro Citroën nový přístup k popisu křivek a ploch volného tvaru. Křivku definoval pomocí tzv. *řídícího polygonu*, přičemž konstruovaný objekt nemusí body řídícího polygonu procházet, ale přesto změna jejich polohy ovlivňuje tvar křivky či plochy (viz obr. 1). Pro popis křivek používal Bernsteinovy polynomy a odvodil algoritmus pro generování bodů na těchto křivkách (viz [10]). Bohužel jeho výsledky byly dlouho drženy jako utajené a nemohly být publikovány.

Nezávisle na P. de Casteljau pracoval na podobném problému P. Bézier (viz obr. 2) ve společnosti Renault. Pro popis křivek používal také polynomiální reprezentaci a později se ukázalo, že jeho výsledky byly obdobné výsledkům P. de Casteljau. Jeden z členů jeho týmu, D. Vernet, také nezávisle vyvinul de Casteljauův algoritmus pro generování bodů na těchto křivkách. Na rozdíl od P. de Casteljau však bylo P. Bézierovi dovoleno publikovat výsledky jeho práce, viz [2], [3], [4], a proto se dnes hovoří o Bézierových křivkách a plochách a ne o de Casteljauových. Od 60. let byl také systém UNISURF, vyvíjený společností Renault pro číslicové řízení obráběcích strojů, kompletně založen na Bézierových výsledcích.

Zavedení dodnes používaných B-splínových objektů s uniformními uzly se datuje do 40. let 20. století a je spojeno se jménem I. Schoenberg (viz [27]), přičemž zobecnění pro neuniformní rozdělení provedl o rok později H. Curry (viz [9]). K větší popularizaci B-splínových křivek ale došlo až v 60. letech, kdy tuto reprezentaci začal dále rozvíjet C. de Boor, který vyvinul algoritmus pro generování bodů na B-splínových křivkách. Tento algoritmus je analogický k de Casteljauově metodě. To umožnilo širší využití



Obr. 2. PIERRE BÉZIER (1910–1999); vpravo jeho portrét vymodelovaný pomocí Bézierových křivek

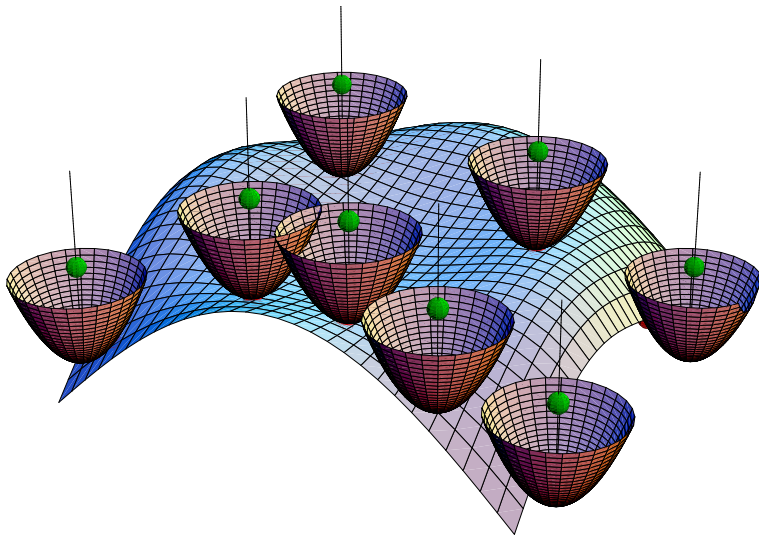
B-splínových křivek v technické praxi, jelikož jednou z důležitých vlastností tohoto algoritmu je, že je numericky stabilní. Následoval intenzivní výzkum v této oblasti (viz např. [5], [6], [7]).

Je poměrně obtížné říci, kdo jako první zavedl dnes tak populární neuniformní racionální B-splínové (NURBS) křivky. Přestože první systematické studium NURBS křivek provedl K. Versprille (viz [31]), mnoho jiných výzkumníků, např. S. Coons nebo A. R. Forest, se zabývalo racionálními křivkami již dříve. Velkou výhodou NURBS reprezentace křivek je, že umožňují jednotný popis pro řadu různých objektů, jako jsou splíny, Bézierovy a B-splínové křivky, ale i kuželosečky, tedy pro většinu běžně používaných objektů. Od té doby, a vlastně dodnes, se NURBS reprezentace křivek a ploch stala standardem v moderních CAD/CAM<sup>2</sup> systémech. Pro informatiky NURBS představují nástroj pro univerzální datový model tvarově složitých objektů, což umožňuje zjednodušení mnohých algoritmů. Je ale nutné poznamenat, že tak, jako se množiny nestaly *univerzálním, vše řešícím základem* matematiky, tak také NURBS objekty neřeší některé problémy geometrického modelování.

V 60. letech také vznikl další z dnes běžně používaných typů křivek volného tvaru. J. Ferguson a D. MacLaren ve společnosti Boeing použili rovinné a prostoro-  
vé po částech  $C^2$  spojité kubické parametrické křivky. Zavedli tak, na rozdíl od výše zmíněných Bézierových a B-splínových křivek, (interpolační) *kubické splínové křivky* (viz [14], [22]).

Systematické studium ploch volného tvaru začalo v 50. letech 20. století. J. Ferguson nejprve využil svých výsledků pro křivky a zavedl metodu pro interpolaci sítě bodů bikubickými pláty napojenými ve třídě spojitosti  $C^1$ . Později S. Coons publikoval svou slavnou práci zaměřenou na interpolaci čtyř okrajových křivek tzv. bilineárním *plátem*, neboli *záplatou* (viz [8]). Jeho metoda byla později zobecněna W. Gordonem pro

<sup>2</sup>Computer Aided Design (CAD), Computer Aided Manufacturing (CAM)



Obr. 3. Ofset racionální plochy při tříosém obrábění (ofset je určen pohybem referenčního bodu na ose frézy) není obecně racionální.

libovolnou čtyřúhelníkovou síť křivek (viz [17], [18]). Jelikož bilineární Coonsovy pláty obecně nezajišťují *plátování*, tj. pláty se nenapojují<sup>3</sup> ve třídě spojitosti  $C^1$  (popř.  $G^1$ ), i když okrajové křivky do této třídy spojitosti patří, byly později zobecněny na bikubické Coonsovy pláty, které již tuto vlastnost mají.

Důležitým zlomem v historii geometrického modelování byla první konference věnována tomuto tématu v Utahu v roce 1974, která je považována za ustavující konferenci CAGD jako samostatného vědního oboru, který se vyčleňuje z počítačové grafiky a přináší i *renesanci geometrie*. Z této konference také vznikl velmi inspirující a důležitý sborník prací [1]. V roce 1984 R. Barnhill and W. Boehm založili specializovaný časopis oboru s názvem *Computer Aided Geometric Design*, který je dnes prestižním časopisem pro publikaci vědeckých výsledků z oboru geometrického modelování.

### 3. Pár slov o racionalitě algebraických křivek a ploch

Zkoumáme-li historii geometrického modelování, zjistíme, že racionální techniky a studium vlastností polynomiálních/racionálních reprezentací křivek a ploch jsou nedílnou součástí geometrického modelování již od samého počátku. To je podmíněno tím, že jedním ze základních principů geometrického modelování je právě reprezentace geometrických objektů pomocí polynomiálních či racionálně lomených funkcí. V dnešní době se jedná o populární téma, kterému je věnováno významné množství článků v odborných časopisech, příspěvků ve sbornících konferencí, ale i monografií. Výzkum v této oblasti je navíc motivován skutečností, že řada geometrických operací často používaných v geometrickém modelování obecně nezachovává racionalitu výsledných objektů (viz obr. 3).

<sup>3</sup>Křivky se napojují ve třídě spojitosti  $G^1$ , mají-li v napojovacím bodě společnou tečnu. Obdobně pro  $G^1$  spojitost ploch, které mají společnou tečnou rovinu v bodech napojovací křivky.

Volba vhodného popisu (explicitní, parametrický, implicitní) geometrického objektu je stěžejní pro vývoj následných aplikací a algoritmů. Zatímco třeba počítačová grafika využívá všech výše uvedených reprezentací, pro CAD je charakteristický především parametrický popis. A mezi všemi parametrickými reprezentacemi sehrává nejvýznamnější roli právě popis pomocí polynomických a racionálních lomených funkcí, neboť právě tyto parametrizace mohou být snadno implementovány prostřednictvím NURBS do standardních CAD systémů a tím využívány v technické praxi. Připomeňme, že parametrické popisy umožňují snadno generovat body na křivkách a plochách, jsou velmi vhodné pro vykreslování, umožňují získávat popisy paralelních (ofsetových) objektů, jsou nezbytné při výpočtech křivosti, při práci s transformacemi, při výpočtech průniků atd. Na druhou stranu, implicitní reprezentace jsou výhodné, pokud chceme např. rozhodnout, zda daný bod leží na objektu či nikoliv.

Abychom uvedli konkrétní příklad, uvažujme jednotkovou kružnici danou implicitní rovnicí  $k : x^2 + y^2 - 1 = 0$ , která má dobře známý parametrický popis

$$\mathbf{x}(t) = \left( \frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right), \quad (1)$$

který lze odvodit např. s využitím stereografické projekce. Obdobně např. kulová plocha popsána implicitně rovnicí  $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$  má racionální parametrizaci

$$\mathbf{x}(s, t) = \left( \frac{2s}{s^2 + t^2 + 1}, \frac{2t}{s^2 + t^2 + 1}, \frac{s^2 + t^2 - 1}{s^2 + t^2 + 1} \right). \quad (2)$$

Nicméně (a bohužel) ne každá algebraická křivka či plocha má racionální parametrizaci – tato vlastnost je naopak velmi výjimečná a racionálně parametrizovatelné objekty tak zaujímají ve světě CAGD výsadní postavení. Opačná úloha (tj. nalezení implicitního popisu racionální křivky či plochy, tzv. *implicitizace*) je naopak obecně řešitelná, např. metodami moderní algebry.

Pokusme se výše uvedený problém uvést exaktněji. Nechť  $\mathcal{V}$  je algebraická varieta dimenze  $d$  nad tělesem  $\mathbb{K}$ . Potom varieta  $\mathcal{V}$  se nazývá *uniracionální* nebo *parametrická*, právě když existuje racionální zobrazení  $\mathcal{P} : \mathbb{K}^d \rightarrow \mathcal{V}$  takové, že  $\mathcal{P}(\mathbb{K}^d)$  je hustá množina ve  $\mathcal{V}$ . Hovoříme o (*racionální*) *parameterizaci*  $\mathcal{P}(t_1, \dots, t_d)$  variety  $\mathcal{V}$ . Pokud navíc  $\mathcal{P}$  definuje biracionální zobrazení, potom se  $\mathcal{V}$  nazývá *racionální*. Vzhledem k tomu, že problémy geometrického modelování jsou formulovány (z pochopitelných důvodů) zejména jakožto reálné (tedy pracujeme nad tělesem reálných čísel), je nutné se jak při řešení, tak především při interpretaci výsledků vypořádat s řadou problémů způsobených skutečností, že většina používaných algebraicko-geometrických technik je formulována pro algebraicky uzavřená tělesa.

Připomeňme alespoň, jak se tato skutečnost dotýká racionality rovinných křivek a ploch v prostoru. Podle Lürothovy věty je rovinná křivka uniracionální, právě když je racionální, což nastává právě tehdy, je-li její rod (genus) roven nule, a to pro libovolné těleso – viz [30]. Algoritmy pro parametrizace racionálních křivek lze najít např. v [32], [33]. V případě ploch v trojrozměrném prostoru je situace poněkud rozdílná, jak říká Castelnuovova věta, která je vyslovena pro algebraicky uzavřená tělesa charakteristiky nula. Podle této věty je plocha uniracionální, právě když je racionální, což nastává právě tehdy, jsou-li její aritmetický rod (genus)  $p_a$  a druhý plurigenus  $P_2$  současně rovny nule (viz [30] pro více podrobností). Problém parametrizace ploch je

algoritmicky mnohem obtížnější než pro křivky a je většinou řešen jen pro určité třídy ploch – viz např. [25], [26].

#### 4. Racionální reprezentace používané v CAGD

Podívejme se nyní velmi stručně na standardně používané reprezentace křivek a ploch v geometrickém modelování. Bezesporu hlavním průlomem v oblasti geometrického modelování bylo zavedení polynomických Bézierových a B-splínových křivek, které podnítilo další bouřlivý rozvoj této vědní disciplíny (viz např. [13]).

V současné době je za standard v moderních CAD/CAM systémech považována NURBS (NeUniformní Racionální B-Splíne) reprezentace objektů, jelikož umožňuje jednotnou formou reprezentovat širokou škálu objektů, jakými jsou např. elementární splínové křivky a plochy, kuželosečky, kvadriky a mnoho dalších (a běžných) objektů technické praxe. V následujícím textu uvedeme pouze základy teorie NURBS křivek a ploch a racionálních trojúhelníkových Bézierových plátů. Pro podrobnější informace odkazujeme čtenáře např. na [12], [24].

Zaměříme se nejprve na křivky. Mějme celé číslo  $k \geq 0$  (tzv. *stupeň*), uspořádanou neklesající posloupnost reálných čísel  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m$  (tzv. *uzlový vektor*) a definujme rekurzivně funkce  $N_i^k(t)$  předpisem

$$\begin{aligned} N_i^0(t) &:= \begin{cases} 1 & \text{pro } t_1 \leq t < t_{i+1}, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \\ N_i^r(t) &:= \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i} N_i^{r-1}(t) + \frac{t_{i+r+1} - t}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{r-1}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

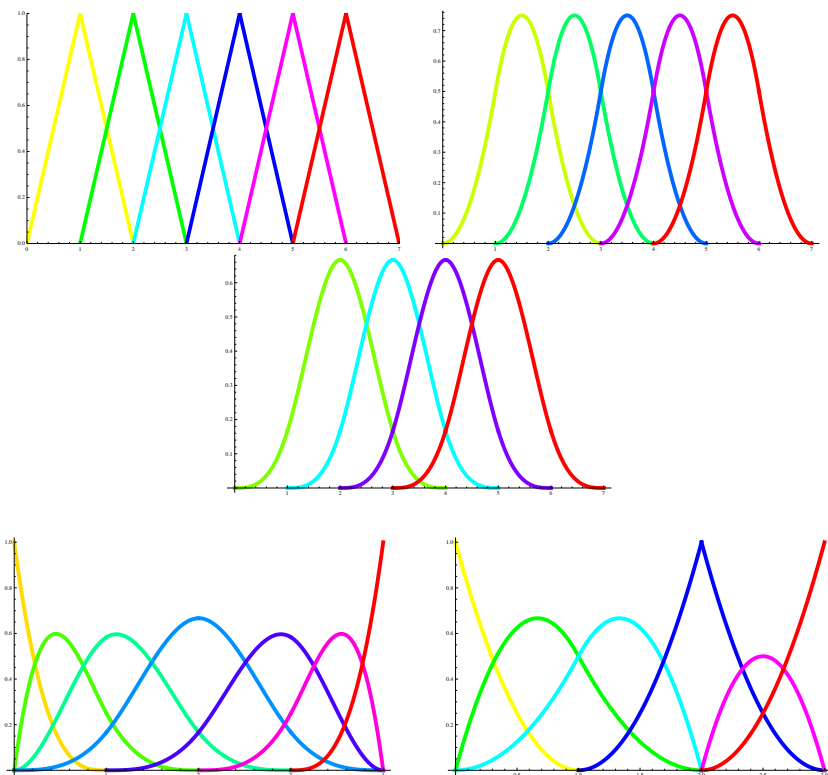
pro  $1 \leq r \leq k$ . Funkce  $N_i^k(t)$  se nazývají *B-splínové bázevé funkce* stupně  $k$  příslušné uzlovému vektoru  $T = (t_0, t_1, \dots, t_m)$ . Obecně rozlišujeme dva různé tvary uzlového vektoru:

- *periodický* uzlový vektor  $T = (t_0, t_1, \dots, t_m)$ , kde není vyžadována žádná speciální struktura uzlového vektoru a je nezbytné doplnit informaci o stupni B-splínových bázevéch funkcí (viz obr. 4 nahoře),
- *neperiodický* uzlový vektor  $T = (\underbrace{a, \dots, a}_{k+1}, t_{k+1}, \dots, t_n, \underbrace{b, \dots, b}_{k+1})$ , kde  $k$  je stupeň příslušných bázevéch funkcí (viz obr. 4 dole).

Bernsteinovy polynomy, používané pro matematickou reprezentaci Bézierových křivek, jsou speciálním případem B-splínových bázevéch funkcí pro uzlový vektor  $T = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k+1})$ .

Je-li  $k$  kladné přirozené číslo,  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ ,  $k \leq n$ , tzv. *řídící body* v prostoru  $\mathbb{R}^d$  s příslušnými kladnými váhami  $w_0, \dots, w_n$  a  $T$  uzlový vektor, potom příslušná NURBS *křivka* je definována vztahem

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i N_i^k(t) \mathbf{b}_i}{\sum_{i=0}^n w_i N_i^k(t)}. \quad (4)$$



Obr. 4. Nahoře: B-splínové bázové funkce stupně  $k$  pro uzlový vektor  $T = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$  a  $k = 1$  (vlevo),  $k = 2$  (uprostřed),  $k = 3$  (vpravo); dole: B-splínové bázové funkce pro uzlový vektor  $T = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4)$  vlevo a  $T = (0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3)$  vpravo

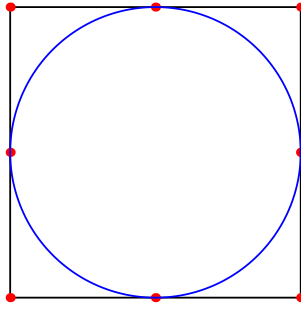
Řídící body NURBS křivky, stejně tak i rozložení parametrů v uzlovém vektoru, určují tvar křivky a každý bod křivky je potom možné získat jako váženou sumu řídicích bodů (kde váhy závisí na parametrech v uzlovém vektoru). NURBS křivky jsou zobecněním jak Bézierových, tak B-splínových křivek (váhy všech řídicích bodů jsou stejné) zmíněných výše. Je možné ukázat, že libovolnou racionálně parametrizovanou křivku je možné vyjádřit ve tvaru (4), tj. každá racionální křivka je současně NURBS křivkou. Například jednotková kružnice (1), o níž víme, že je racionální křivkou, má NURBS popis (viz obr. 5)

$$\{\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_8\} = \left\{ (1, 0, 1), \left(1, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (0, 1, 1), \left(-1, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (-1, 0, 1), \right. \quad (5)$$

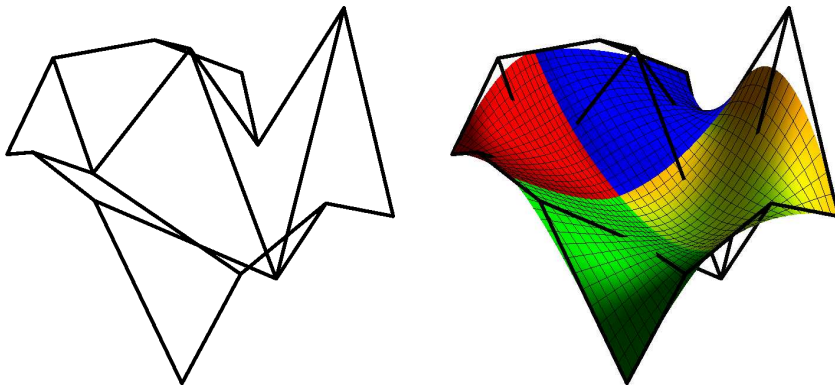
$$\left. \left(-1, -1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (0, -1, 1), \left(1, -1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (1, 0, 1) \right\}, \quad (6)$$

kde poslední „souřadnice“ představuje váhu řídicího bodu. Uzlový vektor potom je  $T = (0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1)$ .





Obr. 5. Řídicí polygon pro NURBS popis kružnice



Obr. 6. Vlevo: řídicí síť NURBS plochy; vpravo: řídicí síť a příslušná NURBS plocha

Přímým zobecněním NURBS křivek jsou *NURBS plochy*, které spadají mezi tzv. plochy tenzorového součinu a jsou vyjádřeny ve tvaru

$$\mathbf{s}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} N_i^k(u) N_j^\ell(v) \mathbf{b}_{ij}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} N_i^k(u) N_j^\ell(v)}, \quad (7)$$

kde  $\mathbf{b}_{ij}$  jsou řídicí body s příslušnými váhami  $w_{ij}$  a  $N_i^k(u)$ ,  $N_j^\ell(v)$  jsou B-splínové báze funkce stupně  $k$ , resp.  $\ell$ , určené uzlovými vektory  $U = (u_0, u_1, \dots, u_{n+k+1})$ , resp.  $V = (v_0, v_1, \dots, v_{m+\ell+1})$  (viz obr. 6).

Připomeňme alespoň některé důležité vlastnosti NURBS objektů:

- Je možné rychle a numericky stabilně generovat body na NURBS křivkách/plochách;
- NURBS reprezentace poskytuje jednotný matematický popis jak pro standardní analytické objekty (např. kuželosečky nebo kvadriky), tak křivky a plochy volného tvaru běžně využívané např. v průmyslu nebo architektuře;

- Generování bodů NURBS objektů je invariantní vzhledem k projektivním transformacím, tj. operace jako rotace, posunutí, afinita nebo lineární perspektiva mohou být aplikovány na NURBS křivky a plochy tak, že jsou aplikovány jen na jejich řídicí body;
- Díky tomu, že NURBS objekty jsou jednoznačně určeny pomocí relativně mála množství dat, umožňují tak efektivně redukovat paměťové nároky na jejich uchování (jde tedy vlastně o kompresi geometrické informace).

Alternativou k plochám tenzorového součinu jsou trojúhelníkové Bézierovy pláty, také velmi často používané v různých aplikacích (např. modelování terénu). Racionální parametrickou plochu stupně  $n$  je možné reprezentovat pomocí  $\binom{n+1}{2}$  řídicích bodů  $\mathbf{b}_{ijk}$  s příslušnými váhami  $w_{ijk}$  ve tvaru

$$s(u, v, w) = \frac{\sum_{i,j,k \in \mathbb{Z}^+, i+j+k=n} w_{ijk} \mathbf{b}_{ijk} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k}{\sum_{i,j,k \in \mathbb{Z}^+, i+j+k=n} w_{ijk} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k}, \quad (8)$$

kde  $u + v + w = 1$ . Položíme-li  $w = 1 - u - v$ , dostáváme standardní reprezentaci v mocninné bázi s parametry  $u, v$ , kde parametrickou oblastí je trojúhelník v  $\mathbb{R}^2$ .

Tuto část uzavřeme zmínkou, že kromě NURBS reprezentace objektů se v poslední době objevila řada dalších metod, jak popsat zejména křivky a plochy. Tyto metody v jistém smyslu rozšiřují a doplňují možnosti, které nabízí NURBS reprezentace. Za všechny zmiňme alespoň následující příklady:

- *hierarchické B-spline plochy* (viz [15], [16]), příp. *T-spline plochy* (viz [28], [29]), které umožňují lokálně zjemňovat řídicí síť, což má značný význam např. pro nedávno zavedenou metodu izogeometrické analýzy založenou na využití společných bázevých funkcí pro geometrické modelování a numerické výpočty (viz [20]), a NURBS plochy jsou jejich speciálním případem;
- *subdivision křivky a plochy* (dělené křivky a plochy, viz např. [23]), které umožňují pracovat i s objekty složitější topologie než NURBS objekty a které se v současné době velmi často využívají např. pro tvorbu animovaných filmů.

## 5. Závěr

Cílem tohoto článku bylo představit geometrické modelování (CAGD) jakožto jedno z nejmladších odvětví geometrie, které (nejen) díky propojení s výpočetní technikou zažívá v současné době významný rozkvět a přináší celou řadu zajímavých teoretických i aplikovaných úkolů. Stručně byla zmíněna historie této vědní disciplíny, která se už od svého počátku významně rozvíjí i u nás (viz např. [19]), a byla diskutována souvislost mezi vývojem geometrického modelování, racionálními reprezentacemi a studiem racionálních technik. Pro konzervativní obdivovatele geometrie jakožto krásné a čisté (a rozhodně nepočítačové) vědy by pak mohlo být zajímavé, že geometrické modelování přináší novou příležitost uplatnit klasická geometrická témata a významně tak přispívá

k znovuobjevení geometrie mezi inženýry, techniky, programátory i umělci. V rámci geometrického modelování dostávají mnohé starší poznatky z geometrie nový smysl a nové uplatnění. Dokonce lze i tvrdit, že geometrické modelování zvýšilo např. mezi techniky úctu ke geometrickým poznatkům a ke vzdělávání studentů v této oblasti.

Připomeňme, že rozvoj počítačové grafiky a geometrického modelování u nás a na Slovensku je spojen s význačným vkladem osobností, které vystudovaly deskriptivní geometrii a našly pro ni nové uplatnění. Mezi tyto osobnosti patřil prof. O. Koníček, prof. L. Drs, doc. J. Novák, prof. V. Medek, doc. J. Zámožík či doc. L. Granát. Již v roce 1981 se na našich vysokých školách vyučovaly základy geometrického modelování podle skript [11].

**Poděkování.** Autoři článku jsou podporováni evropským projektem NTIS – Nové technologie pro informační společnost – CZ.1.05/1.1.00/02.0090 operačního programu VaVpI.

## L i t e r a t u r a

- [1] BARNHILL, R., RIESENFELD, R. F. (eds.): *Computer aided geometric design*. Academic Press, 1974.
- [2] BÉZIER, P.: *Définition numérique des courbes et surfaces I*. *Automatisme XI* (1966), 625–632.
- [3] BÉZIER, P.: *Définition numérique des courbes et surfaces II*. *Automatisme XII* (1967), 17–21.
- [4] BÉZIER, P.: *Procédé de définition numérique des courbes et surfaces non mathématique*. *Automatisme XIII* (1968), 189–196.
- [5] BOEHM, W.: *Cubic B-spline curves and surfaces in computer aided geometric design*. *Computing 19* (1977), 29–34.
- [6] BOEHM, W.: *Inserting new knots into B-spline curves*. *Computer-Aided Design 12* (1980), 199–201.
- [7] COHEN, E., LYCHE, T., RIESENFELD, R.: *Discrete B-splines and subdivision techniques in computer aided geometric design and computer graphics*. *Comput. Graphics and Image Process. 14* (1980), 87–111.
- [8] COONS, S.: *Surfaces for computer aided design*. Tech. Rep. MIT, 1964. Available as AD 663 504 from the National Technical Information Service, Springfield, VA 22161.
- [9] CURRY, H.: *Review*. *Math. Tables Aids Comput. 2* (1947), 167–169, 211–213.
- [10] DE CASTELJAU, P.: *Courbes et surfaces à pôles*. Tech. Rep. A. Citroën, Paris, 1963.
- [11] DRŠ, L., JEŽEK, F., NOVÁK, J.: *Počítačová grafika*. ČVUT, Praha, 1981.
- [12] FARIN, G.: *Curves and surfaces for CAGD: A practical guide*. Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, CA, USA, 2002.
- [13] FARIN, G., HOSCHEK, J., KIM, M.-S. (eds.): *Handbook of computer aided geometric design*. Elsevier, 2002.
- [14] FERGUSON, J.: *Multivariable curve interpolation*. *J. ACM 11* (1964), 221–228.

- [15] GIANNELLI, C., JÜTTLER, B.: *Bases and dimensions of bivariate hierarchical tensor-product splines*. J. Comput. Appl. Math. 239 (2013), 162–178.
- [16] GIANNELLI, C., JÜTTLER, B., SPELEERS, H.: *THB-splines: The truncated basis for hierarchical splines*. Computer Aided Geometric Design 29 (7) (2012), 485–498.
- [17] GORDON, W.: *Free-form surface interpolation through curve networks*. Tech. Rep. GMR-921. General Motors Research Laboratories, 1969.
- [18] GORDON, W.: *Spline-blended surface interpolation through curve networks*. J. Math. and Mechanics 18 (1969), 931–952.
- [19] GRANÁT, L., SECHOVSKÝ, H.: *Počítačová grafika*. SNTL, 1980.
- [20] HUGHES, T., COTTRELL, J., BAZILEVS, Y.: *Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 194 (2005) 39–41, 4135–4195.
- [21] LIMING, R. A.: *Practical analytical geometry with applications to aircraft*. Macmillan, 1944.
- [22] MACLAREN, D.: *Formulas for fitting a spline curve through a set of points*. Tech. Rep. 2. Boeing Appl. Math. Rpt., 1958.
- [23] PETERS, J., REIF, U.: *Subdivision surfaces (geometry and computing)*. Springer, 2008.
- [24] PIEGL, L., TILLER, W.: *The NURBS book*, 2nd ed. Monographs in Visual Communication. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [25] SCHICHO, J.: *Rational parametrization of surfaces*. J. Symbolic Comput. 26 (1) (1998), 1–29.
- [26] SCHICHO, J.: *Proper parametrization of real tubular surfaces*. J. Symbolic Comput. 30 (November 2000), 583–593.
- [27] SCHOENBERG, I. J.: *Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions*. Quart. Appl. Math. 4 (1946), 45–99.
- [28] SEDERBERG, T. W., CARDON, D. L., FINNIGAN, G. T., NORTH, N. S., ZHENG, J., LYCHE, T.: *T-spline simplification and local refinement*. J. ACM Transactions on Graphics (TOG), Proceedings of ACM SIGGRAPH 2004 23 (2004), 276–283.
- [29] SEDERBERG, T. W., ZHENG, J., BAKENOV, A., NASRI, A.: *T-splines and T-NURCCs*. J. ACM Transactions on Graphics (TOG), Proceedings of ACM SIGGRAPH 2003 22 (2003), 477–484.
- [30] SHAFAREVICH, I. R.: *Basic algebraic geometry*. Springer Verlag, 1974.
- [31] VERSPRILLE, K.: *Computer aided design applications of the rational B-spline approximation form*. Ph.D. Thesis. Syracuse University, 1975.
- [32] WALKER, R.: *Algebraic curves*. Princeton University Press, 1950.
- [33] WINKLER, F.: *Polynomial algorithms in computer algebra*. Texts and Monographs in Symbolic Computation. Springer-Verlag, 1996.