Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jan Brandts; Michal Křížek

O Hadamardově determinantu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 57 (2012), No. 3, 232–238

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/143204`

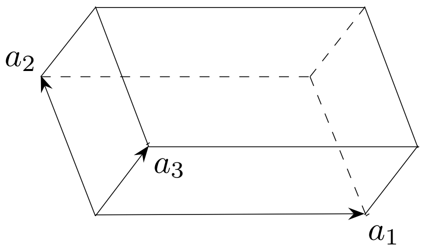
O Hadamardově determinantu

Věnováno panu profesorovi Františku Kuřinovi k jeho 80. narozeninám

Jan Brandts, Amsterdam, Michal Křížek, Praha

1. Úvod

Absolutní hodnotu determinantu reálné čtvercové matice se sloupci $a_1, \dots, a_n$ si lze geometricky představit jako objem rovnoběžnostěnu, jehož hrany jsou právě vektory $a_1, \dots, a_n$ (viz obr. 1).



Obr. 1. Objem rovnoběžnostěnu s hranami a_1, a_2, a_3 je roven $|\det A|$, kde a_1, a_2, a_3 jsou sloupce matice A.

Koncem 19. století si francouzský matematik Jacques Hadamard[1] (viz obr. 2) položil přirozenou otázku, jaká je největší možná absolutní hodnota determinantu matice, jejíž prvky patří do dané kompaktní podmnožiny M komplexní roviny $\mathbb{C}$. V roce 1893 pak dokázal následující větu (viz [6]):

Věta 1 (Hadamardova). *Splňují-li prvky komplexní matice A typu $n \times n$ nerovnost $|a_{ij}| \le \mu$, pak*

$$|\det A| \le \mu^n n^{n/2}. \tag{1}$$

[1] Jacques Hadamard se narodil v roce 1865 ve Versailles poblíž Paříže. Vystudoval École Normale Supérieure. V roce 1892 získal prestižní cenu *Grand Prix des Sciences Mathématiques* za pojednání o Riemannově zeta funkci. Zabýval se problémy matematické fyziky, teorií čísel, teorií pravděpodobnosti, funkcionální analýzou, variačním počtem, geometrií a didaktikou matematiky. V roce 1916 byl zvolen do Francouzské akademie věd a v roce 1929 se stal zahraničním členem Akademie věd SSSR. Zemřel v Paříži v roce 1963 ve věku 97 let.

Assoc. Prof. Jan Brandts, Ph.D., Korteweg-de Vries Institute, University of Amsterdam, Science Park 904, 1098 XH Amsterdam, Nizozemí, e-mail: `janbrandts@gmail.com`
Prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc., Matematický ústav AV ČR, v.v.i., Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: `krizek@math.cas.cz`

Obr. 2. Jacques Hadamard (1865–1963)

Zabývejme se nyní otázkou, kdy platí v (1) rovnost. Bez újmy na obecnosti budeme nadále předpokládat, že $\mu = 1$, tj. nerovnost (1) bude tvaru

$$|\det A| \le n^{n/2}. \tag{2}$$

2. Hadamardova matice

Na čtyřech příkladech si nyní ukažme, jak lze volit matici A, aby byla splněna rovnost v (2).

Pro $n = 1$ je zřejmě $A = 1$ a $\det A = 1$.

Pro $n = 2$ je $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\det A = 2$.

Pro $n = 3$ bohužel nelze najít reálnou matici 3×3 tak, aby platila rovnost v (2), ale lze najít takovou matici komplexní

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i} \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det A = -3\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

Všimněme si, že ve všech třech předchozích příkladech je matice A Vandermondova matice, jejíž řádky jsou tvořeny konečnými geometrickými posloupnostmi. Přesněji řečeno, její prvky jsou tvaru $a_{ij} = \zeta_i^{j-1}$ pro $i, j = 1, \ldots, n$, kde $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ jsou všechny n-té kořeny z jedničky. Tímto způsobem můžeme najít komplexní matice splňující rovnost v (2) i pro $n > 3$. Další možností je definovat $a_{ij} = \zeta^{ij}$, kde ζ je n-tý primitivní kořen z jedničky (tj. $\zeta^k \neq 1$ pro $k = 1, \dots, n-1$ a $\zeta^n = 1$).

Pro $n = 4$ ale lze najít reálnou matici splňující rovnost v (2),

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det A = 16.$$

Hadamard dokázal následující větu:

Věta 2. *Nabývá-li se rovnost v* (2) *pro reálnou matici, pak buď* $n \in \{1, 2\}$, *nebo je* n *dělitelné* 4.

Hadamard dále vyslovil domněnku, že platí i obrácená věta. Nazveme-li reálnou matici nabývající rovnost v (2) *Hadamardova matice*, pak můžeme jeho domněnku formulovat takto:

Hadamardova domněnka. *Je-li* $n \in \{1, 2\}$ *nebo je* n *dělitelné* 4, *pak existuje Hadamardova matice stupně* n.

Hadamardova domněnka je dokázána pro všechna $n < 668 = 4 \cdot 167$ dělitelná čtyřmi. Přitom existuje jen 13 přirozených čísel m menších než 500:

$$167, 179, 223, 251, 283, 311, 347, 359, 419, 443, 479, 487, 491, \tag{3}$$

pro něž dosud není známa Hadamardova matice stupně $4m$. Všechna tato m jsou prvočísla tvaru $4k + 3$. Více než 100 let stará Hadamardova domněnka tak dodnes není rozřešena pro obecné n dělitelé čtyřmi. Nazývá se též *problém Hadamardova determinantu*.

Níže ukážeme (viz věty 4 a 5), že podmínky obsažené v Hadamardově domněnce jsou nutné. Nejprve však vyslovíme několik pomocných tvrzení.

Věta 3. *Nechť* A *je reálná matice typu* $n \times m$ *se sloupci* $a_1, \dots, a_m$. *Pak*

$$\det(A^\top A) \leq \prod_{j=1}^{m} \|a_j\|^2,$$

kde rovnost nastává právě tehdy, když $A^\top A$ *je diagonální matice.*

Stručně si naznačíme důkaz. Jestliže jsou vektory a_j lineárně závislé, pak tvrzení zřejmě platí. Vyjádřeme tedy A ve tvaru $A = QR$, kde $Q \in \mathbb{R}^{n \times m}$ má ortogonální sloupce a $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je horní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále. Protože $\det R = 1$, platí

$$\det(A^\top A) = \det(R^\top Q^\top Q R) = \det R^\top \det(Q^\top Q) \det R = \det(Q^\top Q) = \prod_{j=1}^{m} \|q_j\|^2$$

a $\|q_j\| \leq \|a_j\|$.

Důsledek 1. *Je-li* A *symetrická pozitivně definitní matice, pak*

$$\det A \leq a_{11} a_{22} \cdots a_{nn},$$

kde rovnost platí právě tehdy, když A *je diagonální.*

Důsledek 2. *Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $n \times m$ a $|a_{ij}| \leq 1$. Pak*

$$\det(A^\top A) \leq n^m,$$

kde rovnost platí právě tehdy, když $a_{ij} = \pm 1$ pro všechny indexy i a j a

$$A^\top A = nI_m, \tag{4}$$

kde I_m je jednotková matice stupně m.

Reálnou matici typu $n \times m$, pro niž platí (4) a jejíž prvky patří do množiny $M = \{-1, 1\}$, nazveme *H-matice.* Vidíme, že její sloupce jsou ortogonální vektory. Když $m = n$, pak H-matice je Hadamardova matice. Následující věta nám udává poměrně silná omezení na strukturu H-matic.

Věta 4. *Nechť A je H-matice typu $n \times m$. Jestliže $n > 1$, potom n je sudé a každé dva různé sloupce mají stejné prvky právě v $n/2$ řádcích.*

D ů k a z. Označme a_{jk} prvky matice A. Je-li $j \neq k$, pak podle (4) je

$$a_{1j}a_{1k} + \cdots + a_{nj}a_{nk} = 0.$$

Protože $a_{ij}a_{ik} = 1$, pokud j-tý a k-tý sloupec mají stejný prvek v i-tém řádku, a protože $a_{ij}a_{ik} = -1$ v opačném případě, počet řádků, v nichž j-tý a k-tý sloupec mají stejný prvek, musí být $n/2$. $\square$

Platí ale ještě silnější omezení na H-matice.

Věta 5. *Nechť A je H-matice typu $n \times m$. Jestliže $n > 2$, potom n je dělitelné 4 a každé tři různé sloupce mají stejné prvky právě v $n/4$ řádcích.*

D ů k a z. Jestliže j, k, ℓ jsou různé, pak podle (4) máme

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{ij} + a_{ik})(a_{ij} + a_{i\ell}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = n.$$

Všimněme si, že součin $(a_{ij} + a_{ik})(a_{ij} + a_{i\ell}) = 4$, pokud j-tý, k-tý a ℓ-tý sloupec mají stejný prvek v i-tém řádku; v opačném případě je tento součin 0. Tudíž počet řádků, ve kterých j-tý, k-tý a ℓ-tý sloupec mají stejný prvek, je přesně $n/4$. $\square$

Dosud bylo nalezeno několik nekonečných tříd Hadamardových matic. Např. již v roce 1867 James Joseph Sylvester (1814–1897) pomocí Hadamardových matic stupně 1 a 2 zkonstruoval Hadamardovy matice, jejichž stupeň je libovolná mocnina 2 (viz [8]).

3. Aplikace

Hadamardova nerovnost (1) hraje důležitou roli v teorii lineárních integrálních rovnic vyvinutých Fredholmem v roce 1900 (viz [3]), v teorii čísel, kombinatorice, teorii samoopravných kódů a v teorii grup. Hadamardovy matice našly uplatnění i při zvyšovaní přesnosti spektrometů či při studiu konečných projektivních rovin [2]. Uveďme si několik dalších konkrétních příkladů jejich použití.

Příklad 1. Při měření určitých veličin dostaneme mnohem přesnější výsledky, když budeme měřit jejich vhodné lineární kombinace, než když budeme měřit každou veličinu zvlášť (viz [2, s. 273]). Pro určitost předpokládejme, že potřebujeme stanovit hmotnosti m těles pomocí $n \geq m$ vážení na dvouramenných vahách. Výsledky experimentu jsou dány maticí $A = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = 0$, pokud se j-té těleso neúčastní i-tého vážení, a $a_{ij} = \pm 1$ podle toho, jestli jej dáme na levou či pravou stranu dvouramenné váhy. Tak pro neznámý vektor jednotlivých hmotností $x = (x_1, \ldots, x_m)^\top$ dostaneme soustavu lineárních algebraických rovnic

$$Ax = y, \tag{5}$$

kde $y = (y_1, \ldots, y_n)^\top$ jsou výsledky n vážení, tj. hmotnosti dovažovacích závaží se záporným či kladným znaménkem, podle toho, zda se dovažovala pravá či levá strana.

Označme $\overline{x}$ vektor přesných hmotností těles a položme $\overline{y} = A\overline{x}$. Pokud je chyba měření v eukleidovské normě uvnitř koule $\|y - \overline{y}\| \leq r$ o poloměru r v prostoru $\mathbb{R}^n$, pak x se nalézá uvnitř elipsoidu $(x - \overline{x})^\top A^\top A(x - \overline{x}) \leq r^2$ v $\mathbb{R}^m$. Protože objem elipsoidu je $(\det(A^\top A))^{1/2}$ krát menší než objem koule, můžeme hledat matici A tak, aby příslušný elipsoid měl co nejmenší objem. To vede na úlohu maximalizace $\det(A^\top A)$, kde $a_{ij} \in M = \{-1, 0, 1\}$.

Pro $n > m$ je soustava (5) evidentně přeurčená a její řešení se hledá obvykle metodou nejmenších čtverců. Zvolme např. $n = 4$, $m = 3$ a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pak $A^\top A = 4I_3$, tj. platí rovnost (4). V tomto případě lze jednotlivé hmotnosti stanovit s dvojnásobnou přesností, než kdybychom určovali každou hmotnost zvlášť.

Příklad 2. Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix}
+ & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + \\
+ & + & + & + & + & + & - & - & - & - & - & - \\
+ & + & + & - & - & - & + & + & + & - & - & - \\
+ & - & + & - & + & - & - & + & - & + & - & + \\
+ & + & - & - & - & + & - & - & + & + & - & + \\
- & + & + & + & - & - & + & - & - & + & - & + \\
+ & - & + & - & - & + & + & - & - & + & + & - \\
+ & - & + & + & - & - & - & - & + & - & + & + \\
+ & + & - & - & + & - & + & - & - & - & + & + \\
- & + & + & - & + & - & - & - & + & + & + & - \\
+ & + & - & + & - & - & - & + & - & + & + & - \\
- & + & + & - & - & + & - & + & - & - & + & +
\end{pmatrix},$$

kde pro jednoduchost $+$ značí 1 a $-$ značí -1. Lze dokázat (viz [2, s. 294]), že každá Hadamardova matice stupně 12 vznikne z A permutací sloupců, permutací prvních tří řádků, permutací posledních sedmi řádků nebo změnou znaménka některých řádků a sloupců. Nejsnáze zkonstruovatelná Mathieuova sporadická grupa M_{12} (viz [1], [7]) je vlastně redukovaná grupa automorfismů jakékoliv Hadamardovy matice stupně 12.

Mathieuova sporadická grupa M_{24} je též svázána s Hadamardovou maticí stupně 24 (viz [2]).

Příklad 3. Nechť B je binární matice typu $(n-1)\times(n-1)$ obsahující jen nuly a jedničky. Potom platí

$$|\det A| = 2^{n-1}|\det B|,$$

kde

$$A = ee^\top - \left(\begin{array}{c|c} 0 & o^\top \\ \hline o & 2B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & o^\top \\ \hline e & I \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & e^\top \\ \hline o & -2B \end{array}\right), \tag{6}$$

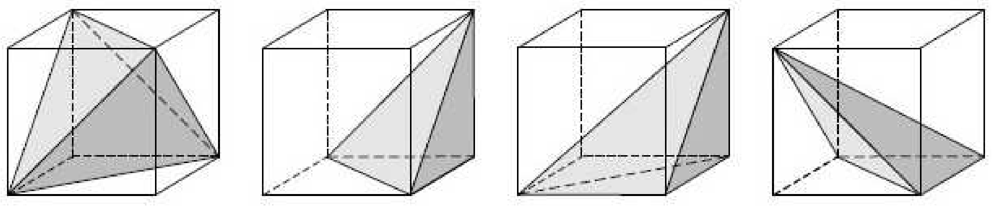
e značí sloupcový vektor složený z jedniček a o nulový sloupcový vektor. Vidíme tedy, že maximální determinant matice A typu $n\times n$ obsahující pouze prvky $\{-1,1\}$ je 2^{n-1}krát větší než determinant binární matice B typu $(n-1)\times(n-1)$. Vztah (6) nám tedy umožňuje převádět H-matice na speciální binární matice s maximálním determinantem a $M=\{0,1\}$. Stupeň binárních matic je $3 \pmod 4$ nebo 1.

Příklad 4. V předešlém příkladu jsme viděli, že speciální případ Hadamardova problému o maximálním determinantu matice lze pomocí vztahu (6) převést na vyšetřování binárních matic stupně $3 \pmod 4$ nebo 1. Zabývejme se dále obecnějším problémem. Budeme hledat maximální determinant pro všechny stupně binárních matic. To zřejmě odpovídá objemu největšího n-simplexu, jehož vrcholy jsou ve vrcholech jednotkové n-krychle. Protože takových simplexů je velice mnoho, uvažujme pro jednoduchost pouze simplexy, jejichž všechny dihedrální úhly jsou ostré, tj. úhly mezi všemi $(n-1)$-rozměrnými stěnami. Takové simplexy nazveme *ostroúhlé.* Například je pravda, že všechny Hadamardovy matice lze interpretovat jako ostroúhlé simplexy (srov. tučně vyznačené sloupce v tabulce 1). Intuice (falešná) nám říká, že největší objem by měly mít ostroúhlé binární simplexy i pro dimenze, které nejsou $3 \pmod 4$. Podívejme se nyní na tento problém podrobněji.

Pro libovolné n vyšetřujme binární n-rozměrné simplexy, jejichž všechny vrcholy jsou v rozích jednotkové n-rozměrné krychle $[0,1]^n$, tj. souřadnice jejich vrcholů obsahují pouze nuly a jedničky [9]. Mezi všemi takovými binárními simplexy pro $n=3$ má největší objem (tj. absolutní hodnota determinantu odpovídající matice) pravidelný čtyřstěn, jehož všechny dihedrální úhly mezi stěnami jsou ostré (viz obr. 3). Rovněž pro $n=4,5,6,7,8$ největší objem mezi všemi binárními simplexy mají ostroúhlé simplexy. To, že nějaká vlastnost je splněna pro $n=3,4,5,6,7,8$, ovšem neznamená, že platí pro všechna $n>8$, což vyjadřuje tzv. silný zákon malých čísel v [4] a [5]. Numerické výpočty ukazují, že například pro $n=9$ největší objem má binární simplex, který překvapivě není ostroúhlý (viz tabulku 1).

n	2	**3**	4	5	6	**7**	8	9	10	**11**	12	13
všechny simplexy	1	**2**	3	5	9	**32**	56	144	320	**1458**	3645	9477
ostroúhlé simplexy	0	**2**	3	5	9	**32**	56	96	224	**1458**	3645	7290

Tab. 1 Maximální objem, který je pro přehlednost vynásobený $n!$, binárního n-dimenzionálního simplexu.



Obr. 3. Příklady binárních simplexů pro $n = 3$.

Pro $n = 3, 7, 11, \ldots$ je maximální objem binárního simplexu svázán s Hadamardovým determinantem vztahem (6). Právě tudy možná vede cesta, jak vyřešit problém Hadamardova determinantu.

Poděkování. Autoři děkují RNDr. Pavle Pavlíkové, Ph.D., a doc. RNDr. Tomáši Vejchodskému, Ph.D., za inspirující diskuse. Článek byl podpořen výzkumným záměrem RVO 67985840 a grantem IAA 100190803 GA AV ČR.

Literatura

[1] Convey, J. H. et al.: *Atlas of finite groups.* Clarendon Press, Oxford, 1985.

[2] Coppel, W. A.: *Number Theory: An Introduction to Mathematics*, Second edition, Springer, 2009.

[3] Fredholm, I.: *Sur les équations de l'equilibre d'un corps solide élastique.* Acta Math. *23* (1900), 1–42.

[4] Guy, R. K.: *The strong law of small numbers.* Amer. Math. Monthly *95* (1988), 697–712.

[5] Guy, R. K.: *The second strong law of small numbers.* Math. Mag. *63* (1990), 3–20.

[6] Hadamard, J.: *Résolution d'une question relative aux determinants.* Bull. Sci. Math. *17* (1893), 240–246; Selecta, Gauthier-Villars, Paris, 1935, 136–142; Oeuvres, Tome I, CNRS, Paris, 1968, 239–245.

[7] Křížek, M., Somer, L.: *Abelova cena v roce 2008 udělena za objevy v teorii neabelovských grup.* PMFA *53* (2008), 177–187.

[8] Sylvester, J. J.: *Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign successions, and tessellated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers.* Philos. Magazine *34* (1867), 461–475.

[9] Zhong, C. M.: *What is known about unit cubes?* Bull. Amer. Math. Soc. *42* (2005), 181–211.