Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Luboš Pick; Mirko Rokyta

O princezně a píd'alce

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 57 (2012), No. 3, 217–231

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/143203

O princezně a píďalce

Luboš Pick, Mirko Rokyta, Praha

Tento článek je rozšířením příspěvku [5], který byl určen středoškolským studentům. Proto prosíme laskavého čtenáře, pro kterého by snad některé pasáže byly příliš jednoduché, aby tyto přeskočil.

1. Úvod do problému

Budeme se zabývat úlohou, v níž vystupují následující dvě bytosti:

- princezna (*homo sapiens*), stádium: mladá, krásná, svobodná,
- píďalka angreštová (*abraxas grossulariata*), stádium: těsně před přeměnou v motýla.

Popis situace. *Princezna proběhne dveřmi, které se za ní zabouchnou a přiskřípnou její závoj. Princezna si toho nevšimne a běží dál rychlostí V. Závoj je nekonečně pružný a při běhu se neustále rovnoměrně natahuje. Na závoji mezi dveřmi a princeznou sedí píďalka a pohybuje se po něm směrem k princezně rychlostí v. Předpokládáme* $0 < v < V$ *(za jakýchkoli jiných okolností se stává úloha velmi nezáživnou).*

Otázka: *Dožene píďalka princeznu nebo ne?*

Než se pustíme do analýzy tohoto problému, zkusme si představit, jak by to mohlo dopadnout. Odpověď může například znít: „ano, píďalka princeznu dožene za všech okolností“. Nebo by také mohla znít: „ne, píďalka nemá za žádných okolností šanci princeznu dohnat“. Ač se to na první pohled nezdá, existuje ještě třetí možnost, a to: „výsledek závisí na velikosti rychlostí v a V“.

Jako první bod programu, než začnete číst dále, si zkuste na základě intuice tipnout, která ze tří odpovědí je správná. Podle zkušeností, které jsme při podobném výzkumu veřejného mínění nasbírali, se zdá, že intuice může být občas trochu zavádějící a v mnoha případech vede k nesprávnému závěru. My budeme na úlohu nahlížet z ryze matematického hlediska, což mimo jiné znamená, že rychlosti princezny i píďalky budou nepatrné ve srovnání s rychlostí světla, že nikde nevznikne žádné tření, že obě bytosti žijí (teoreticky) nekonečně dlouho a podobně.

V tomto článku ukážeme dva zcela odlišné způsoby, jak se s problémem vypořádat. První je založen na teorii nekonečných posloupností a řad reálných čísel, druhý na poněkud pokročilejší teorii obyčejných diferenciálních rovnic.

Prof. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc.; doc. RNDr. Mirko Rokyta, CSc., Katedra matematické analýzy MFF UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: `pick@karlin.mff.cuni.cz`, `rokyta@karlin.mff.cuni.cz`

Problémy, při jejichž řešení je třeba matematicky popsat jakýkoli *pohyb* nebo *změnu*, spadají do matematické disciplíny, zvané *matematická analýza*. Matematická analýza se hodí ve všech oblastech života. Jako motivaci ke studiu tohoto oboru uvedeme jeden příklad z politické scény, který hovoří za vše. Jedná se o citát Richarda Nixona, který během kampaně za své znovuzvolení do prezidentského úřadu USA v roce 1972 prohlásil: „Rychlost růstu inflace se zpomaluje". Tento výrok byl den nato komentován v tisku takto: „Jde o první historicky doložený případ využití třetí derivace ve vrcholné politice."

2. Můžeme se spolehnout na intuici?

Než se pustíme do řešení naší úlohy, připomeneme si několik dalších matematických problémů zdánlivě fyzikální povahy, které kdysi zamotaly hlavy mnoha slovutným vědcům. U některých z nich také často vede intuice k nesprávnému závěru. Jejich společným jmenovatelem je to, že k řešení potřebujeme matematickou analýzu.

2.1. Carrollova opice

Lewis Carroll, slavný autor neméně slavné Alenky, který působil jako profesor matematiky v Oxfordu v 19. století, popisuje v jednom ze svých deníků fyzikální úlohu, která v roce 1893 vyvolala bouřlivé dohady mezi učenci své doby. Popis jsme převzali z [3, str. 23], ilustrace (obr. 1) je z [4].

Úloha: *Opice šplhá po laně, které je připevněno ke kladce. Na druhé straně kladky je na laně zavěšeno závaží stejné hmotnosti, jako je hmotnost opice. Kam se pohybuje závaží, nahoru nebo dolů?*

Problém sám snad není ani tolik zajímavý jako spíše diskuse, které vyvolal. Carroll je zapsal zcela přesně i se jmény jednotlivých diskutérů a připojil poznámku: „Je velice zvláštní, jak rozdílná stanoviska zaujali k této otázce někteří dobří matematici a fyzici." Postupně se totiž objevily následující názory:

- závaží směřuje *nahoru* s rostoucí rychlostí (Price),
- závaží směřuje *nahoru* se stejnou rychlostí, jakou šplhá opice (Clifton, Harcour),
- závaží směřuje *dolů* (Sampson).

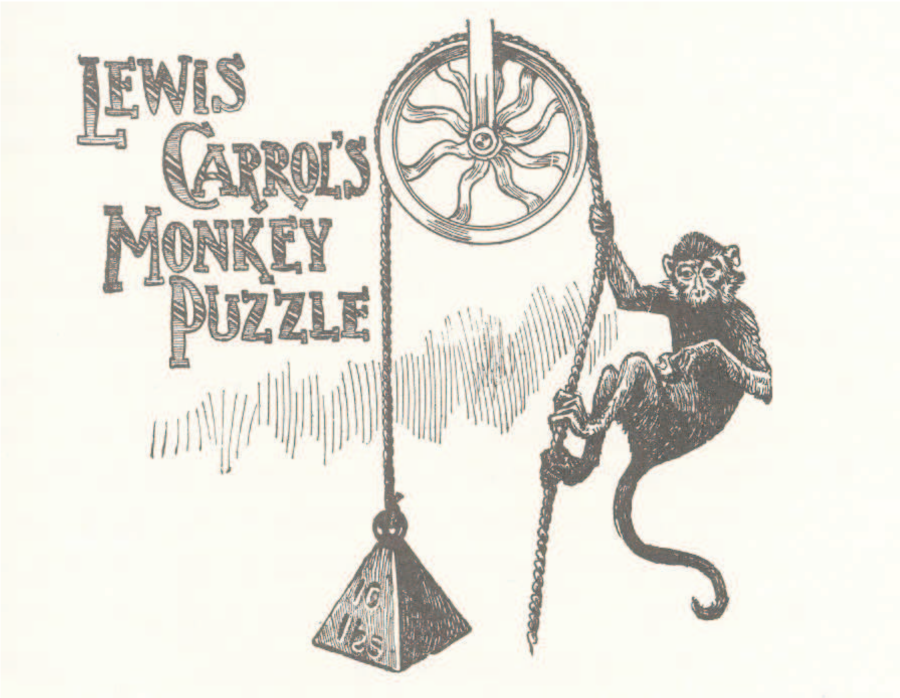
Správné řešení bylo posléze odhaleno, samozřejmě pomocí metod matematické analýzy.

Řešení: *Zanedbáme-li tření, pak se závaží nachází neustále ve stejné výšce jako opice, a to bez ohledu na to, jak a kam opice šplhá, dokonce i v případě, kdy se opice lana pustí a ještě před dopadem na zem se jej znovu chytí.*

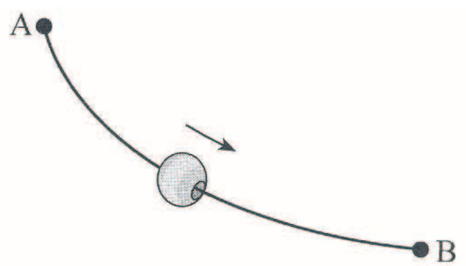
Chcete-li vidět demonstraci tohoto řešení na praktickém pokusu, zajeďte si do Muzea vědy a průmyslu v Chicagu.

2.2. Bernoulliova úloha

Nyní se zaměříme na jiný, avšak neméně pozoruhodný problém, který také kdysi dávno zamotal hlavu několika věhlasným matematikům a fyzikům.



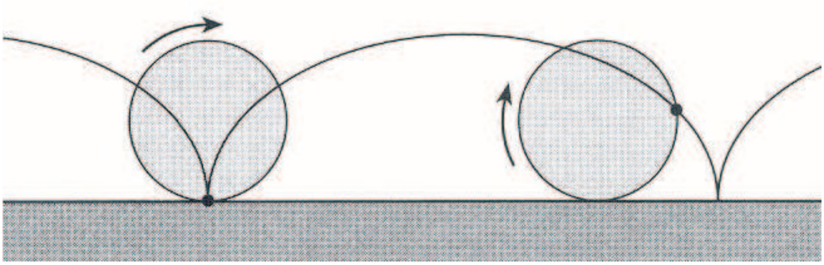
Obr. 1. Carrollova úloha s opicí



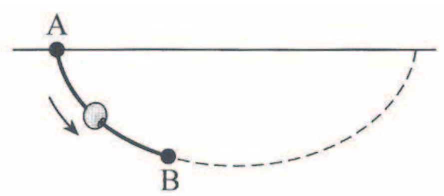
Obr. 2. Bernoulliova úloha

Úloha: *Dva body A a B jsou spojeny drátkem, po kterém klouže kulička. Kulička je na počátku v klidu a nestrkáme do ní. Po jaké křivce tvořené drátkem sklouzne kulička z A do B v nejkratším možném čase?* (Viz obr. 2.)

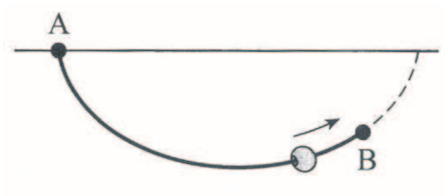
Tuto otázku zformuloval švýcarský matematik *Johann Bernoulli*, a to v roce 1696. Formulace úlohy by mohla svádět k domněnce, že správnou odpovědí bude přímá úsečka mezi oběma body. To je samozřejmě *nejkratší* spojnice obou bodů, kupodivu to ale není křivka nejkratšího času. Bernoulli řešení své úlohy znal a korespondenčně vyzýval své kolegy matematiky a fyziky, aby problém vyřešili. Reakce se značně lišily. Například Bernoulliův přítel a amatérský matematik Markýz de l'Hospital (po kterém je dodnes pojmenován jeden známý princip z teorie limit reálných funkcí – i ten však ve



Obr. 3. Vznik cykloidy



Obr. 4.



Obr. 5.

skutečnosti vymyslel Bernoulli) mu obratem odepsal: „To je snad nejkrásnější problém, jaký jsem kdy viděl a moc rád bych se do něj pustil, převeďte mi jej ale prosím do řeči čisté matematiky, fyzika mne totiž nesmírně otravuje.“ Další z recipientů na Bernoulliově seznamu, Sir Isaac Newton, údajně reagoval na výzvu s mnohem menším nadšením a dokonce prý pravil (citujeme z knihy [1]): „Nebudu pro blázny cizákům jakýmsi, kteří si mne pomocí matematiky dobírat chtějí!“

Řešením Bernoulliovy úlohy je (zanedbáme-li tření) oblouk *cykloidy*, tedy křivky, po které se pohybuje ventilek na jízdním kole při pohybu kola po rovné podložce (laboratorní podmínky pro tento pokus se na českých silnicích hledají poněkud obtížně) – viz obr. 3. Stačí sestrojit cykloidu vhodné velikosti, obrátit ji vzhůru nohama a nastavit tak, aby procházela body A a B. Na celé věci je nejpodivuhodnější fakt, že křivkou nejrychlejšího skluzu je cykloida i tehdy, když vede chvíli *pod úrovní* bodu B, a pak se obrátí směrem vzhůru (viz obr. 4 a 5).

2.3. Starověký provokatér

Na závěr této kapitoly učiníme malé historické varování: osoba neznalá matematické analýzy může občas tvrdit nesmysly. (Ale pozor, neznamená to, že osoba matematické analýzy znalá tvrdit nesmysly nemůže.)

Příkladem nám budiž proslulý Zenon z Éleje, který se ve třetím století před naším letopočtem proslavil svými paradoxy pohybu. Tvrdil mimo jiné, že jakýkoli pohyb je nemožný, neboť máme-li se přesunout z bodu A do bodu B, pak musíme nejprve urazit polovinu vzdálenosti mezi oběma body, pak čtvrtinu, pak osminu a tak dále, a protože tato posloupnost úkonů nikdy neskončí, do bodu B se nikdy nedostaneme. Jiná verze Zenonova paradoxu popisuje pověstný závod v běhu mezi řeckým rekem Achillem a želvou. Závodí se na 100 měr a pomalejší želva dostane 10 měr náskok. Zenon tvrdí, že Achilles želvu nikdy nedožene, protože se nejprve musí dostat na místo, odkud startovala želva, jenomže ta se mezitím o kousek posune, a tato situace se neustále (donekonečna) opakuje. Pozoruhodné je, že provokatér Zenon samozřejmě dobře věděl, že to, co tvrdí, prostě nemůže být pravda, ale nepokusil se to nijak vysvětlit. V jeho úvaze Achilles přibíhá stále jenom do bodů, v nichž želva byla, ale už v nich není. To, že Achilles želvu dohoní, plyne ovšem například z představy, že želva stojí a Achilles k ní běží rychlostí zmenšenou o původní rychlost želvy.

Zenonův paradox v sobě skrývá chybnou úvahu, že není možné sečíst nekonečně mnoho čísel a získat konečný součet. Teorie limit nekonečných posloupností a součtů nekonečných řad, která byla pořádně vybudována až v 19. století, tedy nějakou dobu po Zenonovi, paradoxy pohybu vyvrací velmi snadno. V případě želvy si stačí uvědomit, že její náskok postupně tvoří (měřeno ve starověkých mírách)

$$10,\ 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \ldots$$

Stačí tedy sečíst nekonečnou (geometrickou) řadu

$$S = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots \tag{1}$$

To můžeme provést například tak, že ji nejprve vynásobíme deseti, tedy

$$10S = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots,$$

a pak vyřešíme rovnici

$$10S - S = 100.$$

Vyjde nám, že Achilles nejen želvu dožene, ale dokonce víme přesně kde, totiž ve vzdálenosti $S = 11\frac{1}{9}$ měr od startovní čáry.

Je ovšem třeba si uvědomit, že podobné kejkle nemůžeme provádět s libovolnou řadou. Podívejme se například na řadu

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \cdots \tag{2}$$

O takto (nekorektně) definované veličině S pak můžeme dokázat prakticky cokoli, co nás napadne. Například

$$-S = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots = -1 + S,$$

tedy

$$2S = 1 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2}.$$

Nebo

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) \cdots = 0.$$

Případně dokonce

$$S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) \cdots = 1.$$

Takže „součtem“ uvedené řady by při této interpretaci mohlo být více než jedno číslo.

Vysvětlení spočívá v tom, že na rozdíl od řady (1) řada (2) *vůbec žádný součet nemá.* Abychom řadu (1) uvedeným způsobem sečetli, museli bychom nejprve odněkud vědět, že součet má – v tomto smyslu jsme se na čtenáři dopustili malého podvodu. Ale vzhledem k tomu, že je to geometrická řada s kvocientem, jehož absolutní hodnota je menší než jedna, bude nám to snad odpuštěno.

Tyto úvahy zde nejsou uvedeny náhodou. Naopak, budou se nám velice hodit při řešení úlohy o princezně a píďalce. Proto se v následující kapitole budeme tomuto tématu věnovat podrobněji.

3. Nekonečné posloupnosti a řady

Práce s posloupnostmi a řadami nám skýtá rozličné kratochvíle, a to zdaleka nejen v matematice. Psycholog, bažící po změření našeho IQ, nám často dává hádat následující člen jisté posloupnosti na základě znalosti několika zadaných členů předcházejících. Dobrá, vyzkoušejme si to.

Uhodnete následující člen posloupnosti, je-li zadáno několik prvních členů?

Začneme s něčím jednodušším:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \dots$$

Kolik je a_6?

Tvrdíte, že $a_6 = 6$? No dobře, tak můžeme přistoupit k těžším otázkám. Co třeba

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21, \dots$$

Kolik je a_9?

Ano, $a_9 = 34$. Jde o takzvanou *Fibonacciovu posloupnost*, ve které je zadáno $a_1 = a_2 = 1$ a každý další člen je součtem dvou předcházejících. Její autor, zvaný též Leonardo di Pisa, k ní dospěl na počátku třináctého století při studiu vývoje králičí populace za jistých předpokladů na jejich obdivuhodné rozmnožovací schopnosti.

Třetí příklad patří k těm obtížnějším:

$$1,\ 11,\ 21,\ 1211,\ 111221,\ 312211,\ 13112221,\ 1113213211, \dots$$

Kolik je a_9?

Když vám prozradíme, že $a_9 = 31131211131221$, poznáte z toho princip, na němž je tato posloupnost založena? Jde o posloupnost v anglicky psané literatuře nazývanou *look-and-say sequence*, která je definována takto: $a_1 = 1$, a pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostaneme hodnotu členu a_{n+1} přečtením posloupnosti číslic v číselném zápisu členu a_n. Například člen a_6 získáme přečtením numerického zápisu členu $a_5 = 111221$ ve formě „tři jedničky, dvě dvojky, jedna jednička", takže $a_6 = 312211$.

Za čtvrtý příklad nám poslouží posloupnost

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16, \dots$$

Kolik je a_6? Než odpovíte, prostudujte si nápovědu: $a_{10} = \mathit{256}$.

Správná odpověď zní: $a_6 = 31$ (viz též [2]). Těm, kteří očekávali jinou hodnotu, dlužíme vysvětlení. Uvedená posloupnost je definována jako *počet oblastí v kruhu rozděleném spojnicemi n bodů.* Máme dokonce k dispozici i vzorec. Ten ale nezní

$$a_n = 2^{n-1},$$

jak by si možná leckdo mohl pomyslet, nýbrž

$$a_n = \frac{1}{24}\left(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24\right).$$

A jak to bylo s tou nápovědou? Ta byla v pořádku. Jen je třeba si neplést

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 31,\ 57,\ 99,\ 163,\ \mathit{256},\ 386,\ 562,\ 794,\ 1093,\ \ldots$$

a

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ \mathit{256},\ 512,\ 1024,\ 2048,\ 4096,\ \ldots$$

V prvním případě totiž skutečně platí $a_{10} = \mathit{256}$, ale ve druhém máme $a_9 = \mathit{256}$. (Tento chyták, zvaný též „trojský kůň“, jsme do nápovědy propašovali schválně.)

Z toho je vidět, že některé psychologické postupy jsou založeny na velmi chatrných základech.

Když už zde zaznělo slovo psychologie, pokusíme se naznačit, že některé zdánlivě matematické problémy mají blízko právě k postupům zmíněné disciplíny.

Co kdybychom vám například sdělili, že šestý člen výše uvedené posloupnosti

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots$$

může být $a_6 = 2012$? Jistě byste okamžitě chtěli vědět, jestli takové nečekané tvrzení umíme zdůvodnit. S pokrčením ramen bychom vám pak nabídli vzorec

$$a_n = n + 2006 \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{5!}.$$

Záhy jistě přijdete na to, co je jeho podstatou: pro prvních pět členů posloupnosti (tedy pro $n = 1,2,3,4,5$), na jejichž základě se má hádat člen šestý, je vždy část vpravo od znaménka „plus“ nulová. Toto pozorování umožnilo vytvořit vzorec, který pro $n = 1,2,3,4,5$ dává hodnoty $a_n = n$, zatímco pro $n = 6$ poskytne libovolné reálné číslo A, jehož hodnotou můžeme čtenáře překvapit (například volbou $A = \pi$), tedy vzorec tvaru:

$$a_n = n + (A - n) \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{5!}.$$

Jistě byste také dokázali tento vzorec modifikovat tak, aby generoval tzv. „očekávané“ hodnoty b_n pro libovolný konečný počet, řekněme k členů, zatímco pro člen s indexem $(k+1)$ by dával jakoukoli námi předem zvolenou hodnotu A:

$$a_n = b_n + (A - b_{k+1}) \cdot \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k!}.$$

Možná jsme tímto odhalením zklamali nadšené luštitele tohoto typu úloh, kteří se dosud domnívali, že se zabývají matematikou. Matematik však musí chtě nechtě konstatovat, že odpověď na otázku jaký je n-tý člen posloupnosti, známe-li jejích prvních $(n-1)$ členů, zní poněkud nematematicky: jakýkoli chcete. Jde tedy podle našeho názoru spíše o úlohu psychologickou: má se odhalit, jakým způsobem uvažoval zadavatel úlohy, když svou posloupnost vytvářel, a na základě tohoto vcítění určit další její člen.

Matematika, přesněji řečeno matematická analýza ovšem vyžaduje, aby pro seriózní práci s nekonečnými posloupnostmi byly tyto jednoznačně definovány.

Posloupnost může být zadána různými způsoby. Nejjednodušším případem je *explicitní zadání*. Příklady:

$$a_n = n, \qquad b_n = n^2, \qquad c_n = \frac{1}{n}, \qquad d_n = \frac{n^3 + 2n + 4}{2n^3 - 15n^2 - 2}$$

a podobně. Zajímavé jsou posloupnosti, které jsou definovány *rekurentně*. Příkladem je již zmíněná Fibonacciova posloupnost, daná předpisem

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N},\ n \geq 3.$$

Další různá jiná zadání jsou reprezentována kupříkladu již uvedenou look-and-say sequence nebo třeba posloupností p_n, kde p_n je n-té prvočíslo. (U posledně jmenované posloupnosti může být dost obtížné určit její n-tý člen pro zadané (velké) přirozené číslo n.)

Výpočet hodnoty limity posloupnosti často představuje poměrně obtížnou úlohu, a to i v případech, kdy je nám známo, že vlastní limita existuje. Uvedeme jeden příklad za všechny. Je zajímavý mimo jiné proto, že má dalekosáhlé aplikace v oblasti lichvy (neboli, jak je dnes moderní říkat, finanční matematiky).

Představme si, že půjčíme nějakému (dostatečně hloupému) kamarádovi peníze, řekněme jedno sto českých korun, a to na úrok 100 procent ročně. Takže po roce dostaneme zpět $100 + 100 = 200$ korun. Přesvědčíme-li však dlužníka, aby nám odvedl kombinovaný úrok 50 procent každých šest měsíců, dostaneme po šesti měsících $100 + 50 = 150$ korun a po dalších šesti měsících $1 + \frac{1}{2}$ krát *tuto částku*, tedy celkem $100 \cdot (1 + \frac{1}{2})^2 = 225$ korun. Obdobným způsobem vede úrok $\frac{100}{3}\%$ splatný na třikrát k zisku $100 \cdot (1 + \frac{1}{3})^3$, tedy asi 237 korun, což je ještě o něco lepší výdělek. Při kvartálním inkasu vyděláme ještě víc. A tak dále. Ptáme se: můžeme na základě tohoto principu pohádkově zbohatnout? Co se stane, budeme-li dále zvyšovat frekvenci výběru akumulovaných splátek?

Jak bychom tento problém mohli podchytit matematicky? Zobrazení na množině $\mathbb{N}$, vhodné pro tento příklad, přiřazuje každému přirozenému n hodnotu $100 \cdot (1 + \frac{1}{n})^n$. Otázku, která nás zajímá, můžeme zformulovat takto: budou hodnoty posloupnosti $100 \cdot (1 + \frac{1}{n})^n$ v závislosti na zvyšujícím se přirozeném čísle n stále narůstat? A pokud ano, porostou „nade všechny meze“? Nezačnou po nějaké době zase klesat? Nebo se zastaví na nějaké konkrétní konečné hodnotě? Jestliže ano, jak vysoká tato hodnota bude? Budou se členy posloupnosti s dost vysokým n této hodnotě rovnat, nebo se k ní budou neustále „nekonečně přibližovat“?

Dá se dokázat (zkuste si sami!), že tato posloupnost je rostoucí (to pro naše zištné cíle vypadá dost dobře), a tedy (podle jistého obecného principu z teorie posloupností), má nějakou limitu, a to buď konečnou nebo nekonečnou. Nám by se hodilo, aby

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \infty.$$

Bohužel se však ukáže, že tomu tak není. Platí totiž

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \approx 2{,}718\,281\,828\,459\ldots$$

Takže nakonec nedostaneme ani ušmudlané tři stovky, nestojí to za to.

Výsledek, který budeme potřebovat pro řešení úlohy o princezně a píďalce, zní takto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = \infty.$$

Tento fakt se matematickým jazykem označuje jako *divergence harmonické řady* a bude mít pro řešení naší úlohy zásadní význam. V závěru článku ukážeme i jiný jeho zajímavý důsledek.

4. Řešení naší úlohy pomocí teorie posloupností a řad

Připomeňme si, že

$$\begin{aligned} V &= \text{rychlost princezny},\\ v &= \text{rychlost píďalky}, \end{aligned}$$

přičemž $0 < v < V$. Řešení problému rozdělíme do několika kroků.

4.1. Popis počáteční situace

Budeme měřit čas po celých sekundách: $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ a označíme

$$\begin{aligned} a_n &= \text{vzdálenost princezny od počátku v čase } t = n,\\ b_n &= \text{vzdálenost píďalky od počátku v čase } t = n. \end{aligned}$$

Pak zřejmě bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_0 = 1$ a $b_0 = 0$ (a že zabouchnutí dveří, umístěných do počátku, nezpůsobí píďalce fatální zdravotní potíže).

4.2. Odhady polohy princezny a píďalky v daném čase

Jak se bude pohyb obou účastnic naší hádanky vyvíjet v čase? Je jasné, že po $n+1$ sekundách bude situace vypadat takto:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + n \cdot V,\\ b_{n+1} &= b_n + v \cdot 1 + \text{„poponesení“}. \end{aligned}$$

Poponesení samozřejmě není, striktně vzato, přesný matematický pojem. Jedná se o navýšení vzdálenosti píďalky od počátku v čase, který uplyne mezi n-tou a $(n+1)$-ní sekundou, tedy hodnoty $b_n + v \cdot 1$, v důsledku neustálého natahování nekonečně pružného závoje. Přesný výpočet tohoto navýšení by nám asi dal pořádně zabrat, vystačíme však naštěstí jen s jeho odhadem zdola. Zkusme se zamyslet nad krajní situací: kdyby se píďalka nehnula z bodu b_n, pak by platilo

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\text{„poponesení“}}{V \cdot 1}$$

(to je přímá úměra, číslo 1 ve jmenovateli vyjadřuje skutečnost, že jde o 1 sekundu). Protože se ale píďalka navíc sama pohybuje směrem ku princezně, a tedy ode dveří, můžeme s jistotou říci, že

$$\frac{b_n}{a_n} \leq \frac{\text{„poponesení“}}{V}.$$

Využili jsme toho, že hodnota poponesení roste směrem ode dveří k princezně (na úrovni dveří, tedy v počátku, je nulová, zatímco na princeznině hlavě by měla hodnotu V). Takže

$$\text{„poponesení“} \geq V \cdot \frac{b_n}{a_n}.$$

Dosadíme a dostaneme:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &\geq b_n + v + V \cdot \frac{b_n}{a_n} \\ &= v + b_n \cdot \left(1 + \frac{V}{a_n}\right) \\ &= v + b_n \cdot \frac{a_n + 1 \cdot V}{a_n} \\ &= v + b_n \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n}. \end{aligned}$$

Postupně tedy získáváme odhady

$$\begin{aligned} &b_0 = 0, \\ &b_1 \geq v, \\ &b_2 \geq v + v \cdot \frac{a_2}{a_1} = a_2 \cdot v \ \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right). \end{aligned}$$

Jak vidíme, komplikovanost výpočtů narůstá. Pro další hodnotu máme

$$\begin{aligned} b_3 &\geq v + b_2 \cdot \frac{a_3}{a_2} \\ &= v + a_2 \cdot v \cdot \frac{a_3}{a_2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) \\ &= v \cdot a_3 \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right). \end{aligned}$$

Na druhé straně nám ale první čtyři odhady odhalily zřetelné schéma. Vskutku, matematickou indukcí snadno dokážeme, že pro obecné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$b_n \geq v \cdot a_n \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

(důkaz přenecháváme čtenáři za cvičení). Vydělíme-li získanou nerovnost hodnotou a_n, dostaneme

$$\frac{b_n}{a_n} \geq v \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

4.3. Zpět k původní otázce

Čtenáři, který se možná již ztratil v zdlouhavých výpočtech, připomínáme, že nás zajímá otázka, zda píďalka dožene princeznu. Jak bychom to mohli vyjádřit matematicky? K setkání obou závodnic dojde právě tehdy, jestliže existuje nějaký konečný čas, ve kterém se bude píďalka nacházet buď stejně daleko ode dveří jako princezna nebo dokonce (teoreticky) ještě o kousek dál, tedy

$$\exists\, n \in \mathbb{N}: \ \frac{b_n}{a_n} \geq 1?$$

Nerovnost samozřejmě nemá fyzikální smysl, neboť před princeznou již nemáme k dispozici žádný závoj. Při matematickém popisu této situace s ní ale musíme počítat, protože k setkání může dojít v čase, který neodpovídá celočíselnému počtu sekund.

Je zřejmé, že ke kladné odpovědi by stačilo, aby platil výrok

$$\exists\, n \in \mathbb{N}: \ v \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq 1.$$

Přepíšeme tuto nerovnost ve tvaru

$$\exists\, n \in \mathbb{N}: \ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{v}.$$

Bude užitečné si uvědomit, že v může být „hodně malinké číslo“ (a my nevíme, *jak malé*). Tedy $\frac{1}{v}$ může být *strašidelně obrovské* (a my opět nevíme, jak). Existuje tudíž jen jeden způsob, jak zaručit, že píďalka princeznu dožene za všech okolností, a to požadovat, aby

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) = \infty. \tag{3}$$

Zbývá maličkost: vyšetřit, zda je to pravda nebo není.

4.4. Odpověď na otázku

Ano, je to pravda. píďalka tedy princeznu **dožene vždy**, bez ohledu na velikosti rychlostí v a V. (Uhodli jste to?)

Přeci jen ale ještě jedna drobnost zbývá. Musíme to dokázat.

Jak to provedeme? Budeme sledovat následující myšlenku: porovnáme řadu

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} + \dots \tag{4}$$

s harmonickou řadou a budeme se snažit dokázat, že členy řady (4) jsou pro velké hodnoty n větší než nějaký násobek odpovídajících členů harmonické řady. No, a protože už víme, že harmonická řada diverguje k $+\infty$, usoudíme odtud, že součet řady (4) je také nekonečný. Tím bude kýžená kladná odpověď na naši původní otázku potvrzena.

4.5. Důkaz divergence řady (3) srovnávací metodou

Víme, že

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{1 + n \cdot V} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{1 + n \cdot V}.$$

Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ jest

$$\frac{1 + n \cdot V}{n} = \frac{1}{n} + V \leq 1 + V,$$

máme

$$\frac{n}{1+n\cdot V}\geq\frac{1}{1+V}.$$

Tedy celkem

$$\frac{1}{a_{n+1}}\geq\frac{1}{1+V}\cdot\frac{1}{n}.$$

Dosadíme:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\dots+\frac{1}{a_n}+\dots\geq\frac{1}{1+V}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots\right).$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\dots+\frac{1}{a_n}\right)\\&\geq\frac{1}{1+V}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{1+V}\cdot\infty\\&=\infty,\end{aligned}$$

a důkaz je hotov.

5. Řešení pomocí diferenciálních rovnic

Úlohu lze také vyřešit pomocí diferenciálních rovnic. Označíme

$$\begin{aligned}a(t)&=\text{vzdálenost princezny od počátku v čase } t,\\b(t)&=\text{vzdálenost píďalky od počátku v čase } t.\end{aligned}$$

Jak víme, derivací dráhy podle času je rychlost. Tedy dostáváme soustavu tzv. *obyčejných diferenciálních rovnic*

$$\begin{aligned}a'(t)&=V,\\b'(t)&=v+V\cdot\frac{b(t)}{a(t)},\end{aligned}\tag{5}$$

s *počátečními podmínkami*

$$a(0)=1,\quad b(0)=0.$$

Člen na pravé straně rovnice (5) vyjadřuje skutečnost, že rychlost pohybu píďalky (vůči zemi) se skládá z rychlosti v, s jakou se plazí po závoji, zvětšené o rychlost, s jakou ji rovnoměrně se napínající závoj poponáší. Tato „rychlost poponášení“ $w(t)$, která závisí na čase, je vůči rychlosti princezny V ve stejném poměru, v jakém jsou vzdálenosti píďalky a princezny od počátku, tedy $\frac{w(t)}{V}=\frac{b(t)}{a(t)}$. Odtud máme $w(t)=V\cdot\frac{b(t)}{a(t)}$.

První rovnici včetně počáteční podmínky vyřešíme hravě, toto řešení se dá koneckonců i uhodnout:

$$a(t)=1+V\cdot t.$$

Nyní tento výsledek dosadíme do druhé rovnice a dostaneme

$$b'(t) = v + \frac{V \cdot b(t)}{1 + V \cdot t} \quad \text{s počáteční podmínkou } b(0) = 0.$$

To je obyčejná lineární diferenciální rovnice prvního řádu. Vyřešíme ji některou z rutinních klasických metod, například pomocí *metody variace konstant* nebo použitím *integračního faktoru.* Popis těchto metod zde vynecháme. V každém případě dostaneme řešení

$$b(t) = \frac{v}{V} \cdot (1 + V \cdot t) \cdot \ln(1 + V \cdot t) = \frac{V}{v} \cdot a(t) \cdot \ln(1 + V \cdot t).$$

Ověření, že tato funkce splňuje požadovanou rovnici s uvedenou počáteční podmínkou, ponecháme laskavému čtenáři zběhlému v derivování za cvičení.

K dohnání princezny píďalkou dojde právě tehdy, jestliže najdeme nějaké $T > 0$, pro které platí $a(T) = b(T)$. Dostaneme rovnici

$$\frac{v}{V} \cdot \ln(1 + V \cdot T) = 1,$$

z níž vypočítáme

$$T = \frac{\mathrm{e}^{\frac{V}{v}} - 1}{V}.$$

Povšimněme si drobné výhody, kterou nám přineslo toto řešení oproti tomu, které jsme získali v předchozím odstavci pomocí teorie nekonečných řad. I tam jsme dokázali, že píďalka princeznu dožene vždy, ale zde jsme navíc obdrželi i hodnotu času, ve kterém k setkání dojde. Tato hodnota je pochopitelně závislá na v a V. Jak už ale víme z předchozí kapitoly, odpověď na naši základní otázku je kladná ve všech situacích, kdy $0 < v < V$, přičemž na konkrétních hodnotách rychlostí píďalky ani princezny nezáleží.

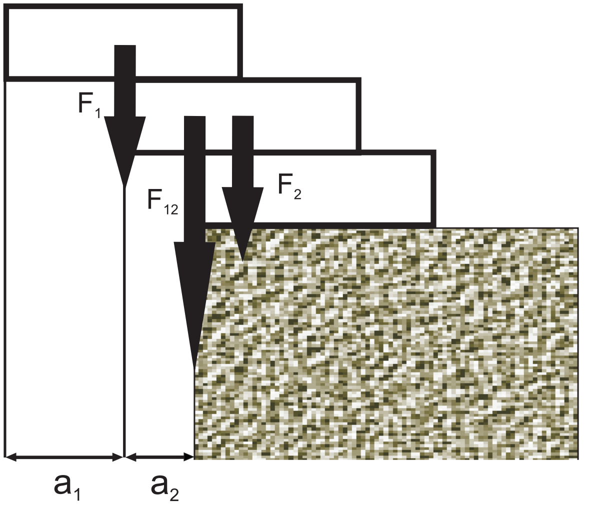
6. Jak šikmá může být šikmá věž?

Na závěr uvedeme ještě jednu zajímavou aplikaci skutečnosti, že harmonická řada diverguje k $+\infty$. Představme si nejprve, že na hraně stolu (resp. betonového základu budovy) stojí na sobě tři stejné kvádry (resp. tři stejně velké cihly). Otázka je, jak daleko ve vodorovném směru lze posunout obě nahoře ležící cihly, aby takto vzniknuvší varianta šikmé věže nespadla. Předpokládáme přitom, že cihly nepojí žádné lepidlo ani malta, leží pouze volně na sobě.

V praxi lze tuto úlohu simulovat experimentem, při kterém například nejprve vysuneme horní cihlu „tak daleko, jak to jde, ale tak, aby nespadla", a dále vysuneme stejným směrem horní dvě cihly (poloha těchto dvou cihel vůči sobě se již nemění) při zachování stejné podmínky (viz obrázek 6).

Vzdálenost a_1, o kterou lze maximálně vysunout horní cihlu, je intuitivně rovna polovině délky cihly. Podstata tohoto pozorování je vystižena fyzikálním náhledem na věc, který říká, že soustava horních dvou cihel je stabilní, pokud těžiště horní z obou cihel leží stále ještě nad dolní cihlou. Je-li délka cihly $2d$, je proto $a_1 = d$ maximální vzdálenost, na kterou lze horní cihlu vysunout, aniž by spadla.

Podobně lze ve druhém kroku soustavu horních dvou cihel vysouvat tak dlouho, dokud bude jejich *společné* těžiště ležet nad cihlou třetí. Fyzikálně řečeno, moment



Obr. 6. Ke konstrukci šikmé věže z cihel

výsledné tíhové síly F_{12} pro horní dvě cihly vzhledem k pevně zvolené ose otáčení (můžeme ji stanovit například ve vzdálenosti vysunuté hrany horní z obou cihel, tedy ve vzdálenosti $a_1 + a_2$, která charakterizuje polohu společného těžiště horních dvou cihel) je pak roven $(a_1 + a_2)F_{12}$. Tento moment je ovšem roven součtu momentů tíhových sil první a druhé cihly, tedy $a_1F_1 + (a_1 + d)F_2$. Protože všechny cihly mají stejnou hmotnost m, platí pro velikost tíhových sil $F_1 = F_2 = mg$, $F_{12} = 2mg$, kde g je tíhové zrychlení v gravitačním poli Země. Po dosazení do rovnice a vykrácení výrazem mg tedy dostaneme

$$2(a_1 + a_2) = a_1 + (a_1 + d) \tag{6}$$

odkud $a_2 = \frac{d}{2}$, a dvě cihly lze tedy vysunout do vzdálenosti $a_1 + a_2 = d + \frac{d}{2} = \frac{3d}{2}$.

Zajímavější je otázka, kam až by bylo (teoreticky) možné vysunout n cihel, případně co se bude dít, pokud (opět teoreticky) připustíme, že počet vysouvaných cihel může růst nade všechny meze. Úvahou podobnou té výše provedené dostaneme, že moment výsledné tíhové síly pro n cihel, postupně vysunutých do vzdáleností $a_1, \ldots, a_n$, tedy $(a_1 + \cdots + a_n)nmg$, je roven součtu momentu tíhové síly pro $(n-1)$ cihel, vysunutých v předchozím kroku, tedy $(a_1 + \cdots + a_{n-1})(n-1)mg$, a momentu tíhové síly n-té cihly, tedy $(a_1 + \cdots + a_{n-1} + d)mg$. Odtud dostaneme

$$(a_1 + \cdots + a_n)n = (a_1 + \cdots + a_{n-1})(n-1) + (a_1 + \cdots + a_{n-1} + d)\,, \tag{7}$$

což po úpravě dává $a_n = \frac{d}{n}$. Soustavu n cihel lze tedy (bez použití malty) vysunout do vzdálenosti

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = d\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\,.$$

Protože je součet v závorce vpravo roven n-tému částečnému součtu divergentní harmonické řady, je takto teoreticky možné, budeme-li mít k dispozici dostatečné množství cihel, vysunout tyto na libovolně velkou vzdálenost. Je pravda, že cihly, vysouvané až do limitní polohy těžiště, nevytvoří věž příliš stabilní. Jistě nám však nic nebrání, abychom n-tou cihlu posunuli jen o polovinu spočtené vzdálenosti, tedy o $\frac{d}{2n}$. Taková věž bude pak stabilní, a protože „polovina harmonické řady“ určitě také diverguje, budeme teoreticky opět moci vysunout cihly libovolně daleko.

Harmonická řada ovšem diverguje velmi pomalu, stavitel takovéto věže tedy nemůže doufat, že brzy dosáhne závratných hodnot cihlových převisů. Při rozměru standardní cihly (290 × 140 × 65 mm) by například pro vybudování cihlového převisu 1,5 m bylo potřeba asi 17 500 cihel, věž z nich sestavená by pak byla vysoká přes kilometr. Taková zpráva by jistě nepotěšila žádného investora, byť by byla doprovázena poněkud překvapivým dodatkem, že náklady na maltu budou nulové.

Poděkování. Autoři děkují doc. RNDr. Emilu Caldovi, CSc., za jeho podnětné připomínky k předchozí verzi tohoto článku.

Literatura

[1] Acheson, D.: *1089 a další parádní čísla.* Dokořán, 2006, český překlad knihy Acheson, D.: *1089 and all that: A Journey into Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 2002.

[2] Acheson, D.: *1089 a vše, co s tim souvisí. Moment překvapení v matematice.* PMFA *49* (2004), 24–31, volně přeloženo podle článku Acheson, D.: *1089 and all that. The element of surprise in mathematics.* EMS Newsletter *49* (2003), 9–11.

[3] Gardner, M.: *The universe in a handkerchief.* Copernicus, Springer, New-York, 1996.

[4] Lloyd, S., Jr.: *Sam Lloyd's cyclopedia of 5000 puzzles, tricks, and conundrums with answers.* New York, 1914.

[5] Pick, L.: *O princezně a píďalce.* Sborník příspěvků „XII. Letní škola matematiky a fyziky“, Bedřichov 2010, Robert Seifert (ed.), UJEP Ústí nad Labem 2010, 91–109.