Oldřich Kowalski

Abelova cena v roce 2009 udělena Michailu Gromovovi

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 54 (2009), No. 3, 177--187

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141904

Abelova cena v roce 2009 udělena Michailu Gromovovi

Oldřich Kowalski, Michal Křížek, Praha

1. Úvod

Matematici se poměrně dlouho a těžce vyrovnávali se skutečností, že se za jejich obor neuděluje Nobelova cena. Po velice dlouhých jednáních Norská akademie věd zřídila Abelovu cenu za matematiku, jejíž finanční ohodnocení je srovnatelné s Nobelovou cenou (tj. okolo 10^6 USD). Právo nominovat kandidáta na Abelovu cenu má kdokoliv. Výběrová komise je složena z pěti mezinárodně uznávaných matematiků. Každý člen komise je volen na 2 roky s výjimkou předsedy, který je volen na 4 roky. Podle statutu Abelovy ceny musí být předseda norským matematikem. Další tři členové jsou voleni IMU (International Mathematical Union) a zbývající pátý člen je volen EMS (European Mathematical Society). V letošním roce komise pracovala ve složení: Kristian Seip (předseda), John Kingman, Sergey Novikov, Neil Trudinger a Efim Zelmanov.

Podle klasifikace Mathematical Reviews v dnešní době existuje přibližně 100 základních matematických disciplín, a tak je velice obtížné zvolit vhodného kandidáta. V roce 2003 získal první Abelovu cenu Jean-Pierre Serre za své průkopnické práce z algebraické geometrie, teorie čísel a několika příbuzných oborů.[1]) V dalších letech pak následovaly ceny za topologii a algebru (2004), za aplikovanou a numerickou matematiku (2005), harmonickou analýzu a teorii dynamických systémů (2006), za teorii pravděpodobnosti a statistiku (2007) a konečně v loňském roce byla Abelova cena udělena za teorii grup. V letošním roce ji získal rusko-francouzský matematik Michail Leonidovič Gromov za své revoluční výsledky týkající se především diferenciální geometrie, algebry a topologie. Předseda Norské Akademie věd Øyvind Østerud oznámil veřejnosti jméno nového laureáta, jemuž pak cenu osobně předal norský král Harald V. v hlavní aule univerzity v Oslo dne 19. května 2009 (viz [20]).

Pamětní řeč pronesla paní Ingrid Daubechies (Princeton Univ.), bývalá členka výběrové komise. Poté následovaly čtyři abelovské přednášky, z nichž první měl M. Gromov (viz [16]).

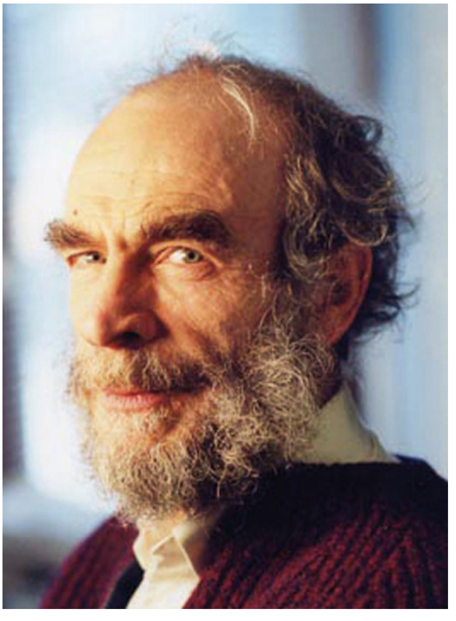
[1]) O prvních pěti Abelových cenách podrobně pojednává nově vyšlá publikace [11].

Prof. RNDr. Oldřich Kowalski, DrSc., Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: kowalski@karlin.mff.cuni.cz, prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc., Matematický ústav Akademie věd ČR, v. v. i., Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: krizek@math.cas.cz.

2. Kdo je Michail Gromov?

Michal Gromov se narodil 23. prosince 1943 v Boksitogorsku (cca 100 km jihovýchodně od Ladožského jezera). Univerzitní studia absolvoval v roce 1965 v Leningradu. Již ve svých pětadvaceti letech zde získal doktorát. Jeho školitelem byl vynikající matematik V. A. Rochlin. V letech 1967–1974 pracoval Gromov jako odborný asistent na Leningradské univerzitě. Pak odešel na Newyorskou státní univerzitu v Stony Brook na Long Islandu.

V roce 1981 se natrvalo přestěhoval do Francie. Nejprve nastoupil na Université de Paris a o rok později získal stálé místo profesora na Institut des Hautes Études Scientifiques v Bures-sur-Yvette (na jižním předměstí Paříže), kde pracuje dodnes. Od roku 1992 je francouzským občanem.



Michail Leonidovič Gromov (foto: Gérard Uferas)

Gromovovy myšlenky neustále inspirují matematiky z celého světa. Prof. Gromov je znám především svými výsledky v těch oblastech matematiky, které úzce souvisí s geometrií. Je autorem celé řady monografií, viz např. [3]–[8]. V poslední době se M. Gromov intenzivně věnuje také matematické genetice (viz např. [1], [9]).

M. Gromov získal za svou práci mnoho uznání. Mezi nejvýznamnější patří cena Moskevské matematické společnosti (1971), Cartanova cena pařížské Akademie věd (1984), Wolfova cena (1993), Lobačevského medaile (1997), Steelova cena (1997), Balzanova cena (1999) a Bolyaiova cena (2005). Prof. Gromov je zahraničním členem Národní akademie věd v USA, Americké akademie věd a umění a řádným členem Francouzské akademie věd. Čtyřikrát byl zvaným plenárním řečníkem na mezinárodních matematických kongresech v Nice (1970), Helsinkách (1978), Varšavě (1982) a v Berkeley (1986). Je také profesorem matematiky v Courantově ústavu matematických věd v New Yorku (na prestižním místě zřízeném v 19. století známým podnikatelem Jayem Gouldem, který se kromě jiného soukromě věnoval studiu matematiky). V této věhlasné instituci pracují i Peter Lax a Srinivasa Varadhan, kteří získali Abelovu cenu v roce 2005, resp. 2007.

3. Stručně o diferenciální geometrii

Slovo *geometrie* pochází z řečtiny: $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\varrho\acute{\iota}\alpha$; geo = země, metria = míra. V klasické diferenciální geometrii se zprvu vyšetřovaly speciální plochy v prostoru, jako např. kulové plochy, kužele, válce, elipsoidy či hyperbolické paraboloidy. Klíčovým pojmem, o který se diferenciální geometrie opírá, je *křivost*. Leonhard Euler (1707–1783) byl prvním matematikem, který si to uvědomil.

Podstatným způsobem se ale o rozvoj diferenciální geometrie zasloužil až Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Jeho průkopnická práce *Disquisitiones generales circa superficies curvas* z roku 1827 už podává moderní definici zakřivené plochy a algoritmus, jak počítat její křivost (tzv. Gaussovu křivost v dnešní terminologii). Připomeňme, že Gaussova křivost K v bodě P plochy v trojrozměrném eukleidovském prostoru je rovna součinu křivostí v P dvou křivek, které vzniknou jako řezy plochy normálovými rovinami v tzv. hlavních směrech. To je dáno známou formulkou $K = k_{\max}k_{\min}$.

Gauss také definoval první a druhou základní formu plochy a položil tak základy Riemannově geometrii. V roce 1828 Gauss vyslovil jedno ze základních tvrzení v klasické diferenciální geometrii, které lze zhruba charakterizovat takto:

Gaussova Theorema Egregium.[2]) *Pokud budeme zakřivenou plochu izometricky deformovat v prostoru, její (Gaussova) křivost v každém bodě zůstane zachována.*

Uveďme si názorný příklad. Rovina reprezentovaná listem papíru má Gaussovu křivost nula. Jesliže stočíme list do válcové či kuželové plochy, bude její Gaussova křivost opět nula.

V souvislosti s diferenciální geometrií 19. století je vhodné zmínit ještě jména Nikolaj I. Lobačevskij (1792–1856), János Bolyai (1802–1860), Sophus Lie (1842–1899) a Felix Klein (1849–1925). Skutečně ucelené počátky tzv. klasické (nebo též ní) diferenciální geometrie lze datovat inaugurační přednáškou Bernharda Riemanna v Göttingen roku 1854. V tomto oboru se studují především hladké křivky, zakřivené plochy a nadplochy. Vyšetřují se zde jejich lokální vlastnosti (např. křivost ploch a křivek, význačné křivky na plochách, metrická ekvivalence ploch, studují se též přímkové kongruence a komplexy aj.). Asi v polovině 20. století se začíná rozvíjet moderní (nebo též globální) diferenciální geometrie. Ta studuje nejprve globální vlastnosti ploch a nadploch v souvislosti s topologií, později pak geometrii *hladkých variet* opatřených metrikou nebo jinými geometrickými strukturami.

---

[2]) Latinsky egregius znamená nádherný, vynikající, výtečný, výborný, znamenitý.

Příkladem globální vlastnosti je orientovatelnost plochy. Jestliže budeme postupně natírat známý Möbiův list barvou, pak se nám časem podaří natřít obě strany listu, aniž překročíme jeho okraj. Proto je to plocha neorientovatelná.

V následujícím textu představíme pojem hladké variety, která je abstraktním modelem hladké plochy libovolné dimenze v eukleidovském prostoru.

Topologická d-rozměrná varieta M je metrizovatelný prostor, který je lokálně homeomorfní s d-rozměrným eukleidovským prostorem $\mathbb{R}^d$ pro dané $d \in \{1, 2, 3, \dots\}$ (viz [12]). Jinými slovy, každý bod v M má otevřené okolí, které je homeomorfní s nějakou otevřenou množinou v $\mathbb{R}^d$.

Hladká d-rozměrná varieta M je d-rozměrná topologická varieta s tzv. *hladkou strukturou,* tj. pokrytím otevřenými množinami, kterým říkáme *obory lokálních souřadnic* a kde přechody mezi dvěma soustavami lokálních souřadnic jsou vyjádřeny diferencovatelnými funkcemi třídy C^∞.

Obecně nelze d-rozměrnou varietu vnořit do $\mathbb{R}^{d+1}$. Nejznámějším příkladem této překvapivé skutečnosti je (viz [19, Corollary 11.16]) Kleinova láhev, což je dvojrozměrná varieta ve čtyřrozměrném prostoru, kterou nelze vložit do trojrozměrného prostoru.[3]) Tato plocha navíc není orientovatelná. Platí však následující tvrzení (viz [19, Th. 11.14]):

Věta. *Je-li M kompaktní hladká d-rozměrná varieta v $\mathbb{R}^{d+1}$, pak M je orientovatelná.*

Z předpokladů věty vyplývá, že množina $\mathbb{R}^{d+1} \setminus M$ má dvě komponenty (vnitřek a vnějšek). Jejich hranicí je v obou případech M. Následující důležitou větu o vložení lze nalézt např. v [10, str. 24].

Whitneyova věta. *Každou hladkou d-rozměrnou varietu lze hladce vložit do eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^{2d+1}$.*

Dvojici (M, g) nazveme *Riemannovou varietou,* jestliže M je hladká varieta, jejíž tečný prostor v každém bodě $x \in M$ je opatřen skalárním součinem g_x, a ten se hladce mění od bodu k bodu. Takto vytvořená struktura g se nazývá *Riemannova metrika.*

Další významné tvrzení v diferenciální geometrii vyjadřuje Gaussova–Bonnetova věta pro dvojrozměrné kompaktní Riemannovy variety (M, g) (bez okraje). Týká se *totální křivosti plochy,* která vznikne integrací Gaussovy křivosti K přes celou plochu.

Gaussova–Bonnetova věta. *Nechť K označuje Gaussovu křivost dvojrozměrné variety $M \subset \mathbb{R}^3$. Potom*

$$\int_M K \, \mathrm{d}M = 2\pi\, \chi(M),$$

[3]) Poznamenejme, že často vystavovaný trojrozměrný skleněný model „Kleinovy láhve" nereprezentuje topologickou varietu. V bodech, kde se plocha protíná, totiž neexistuje otevřené okolí, které by bylo homeomorfní s otevřeným kruhem v $\mathbb{R}^2$.

kde na levé straně je tzv. plošný integrál a $\chi(M)$ označuje Eulerovu charakteristiku variety M.

Podotkněme, že Eulerova charakteristika je topologický invariant, jenž se počítá následujícím způsobem. Uvažujme mnohostěn (obecně nekonvexní), který je homeomorfní dané varietě a jehož povrch je pokryt nějakou triangulací (tj. množinou trojúhelníků, z nichž každé dva mají společnou právě jednu celou hranu, nebo právě jeden vrchol, nebo jsou disjunktní). Označme s počet stěn, h počet hran a v počet vrcholů v této triangulaci. Pak definujeme $\chi(M) = s - h + v$. V případě sféry S^2, která je homeomorfní s povrchem čtyřstěnu, okamžitě zjistíme, že $\chi(S^2) = 2$.

Pro anuloid T^2 snadno nalezneme triangulaci toroidálního mnohostěnu a jemu odpovídající Eulerovu charakteristiku $\chi(T^2) = 0$. Anuloid má v bodech bližších k jeho ose zápornou Gaussovu křivost (podobně jako sedlový bod), v bodech odvrácených od osy má kladnou křivost a na dvou kružnicích oddělujících tyto množiny bodů má nulovou křivost. Totální křivost anuloidu je však překvapivě nula, jak plyne ihned z Gaussovy–Bonnetovy věty.

Snadno si také představíme dutý „preclík“ se dvěma či více otvory. Pak platí obecně, že Eulerova charakteristika je rovna $2 - 2g$, kde g je tzv. *rod plochy* a je to v podstatě počet otvorů v preclíku. Sféra s g „držadly“ je plocha rodu g.

Gaussova–Bonnetova formule pak zní

$$\int_M K \,\mathrm{d}M = 4\pi(1 - g).$$

Odtud například odvodíme, že každá Riemannova metrika definovaná na sféře musí mít alespoň v jednom bodě kladnou Gaussovu křivost a že Riemannova metrika definovaná na anuloidu nemůže mít všude kladnou nebo všude zápornou Gaussovu křivost.

Albert Einstein (1879–1955) zjistil, že všechny hmotné objekty (planety, hvězdy, galaxie aj.) náš prostoročas lokálně zakřivují. Proto potřeboval „novou geometrii“ k tomu, aby mohl zformulovat obecnou teorii relativity. Diferenciální geometrie tak našla zcela nové uplatnění.

Nejkratší cestu mezi dvěma body na hmotném modelu nějaké zakřivené plochy můžeme znázornit pomocí natažené gumičky. Taková nejkratší cesta (které říkáme *geodetický oblouk*) ale nemusí být jednoznačně určená. Například na ideálním modelu povrchu Země jsou všechny poledníky nejkratšími spojnicemi obou pólů.

Geodetika nemusí být vždy nejkratší spojnicí dvou bodů. To platí pouze lokálně, kdy všechny perturbované křivky mezi dvěma libovolně blízkými body na geodetice jsou delší. Nejednoznačné geodetiky objevil i Hubbleův kosmický dalekohled díky tzv. gravitačním čočkám, které způsobují, že obraz některých vzdálených galaxií je vícenásobný. Přitom fotony z téhož zdroje (pohybující se po geodetikách) mohou absolvovat různě dlouhou cestu. Mnohdy tak vidíme různé obrazy jedné galaxie časově posunuté až o několik let.

Zatím není známo, zda je náš vesmír ohraničený a uzavřený do sebe a jaká je jeho totální křivost. *Vesmírem* budeme rozumět izochronu v prostoročasu, která odpovídá určitému časovému okamžiku po velkém třesku. Einstein zformuloval následující *kosmologický princip:*

Vesmír je (na velkých škálách) v každém bodě homogenní a izotropní.

Homogenita znamená, že pro daný čas jsou střední hustota hmoty i tlak konstantní, tj. křivost vesmíru je ve všech bodech stejná. Izotropie říká, že pozorovatel nemůže rozlišit daný směr od ostatních směrů. Podle [15, kap. 27.3] izotropie implikuje homogenitu. Astronomická pozorování rozložení supernov, γ-záblesků a reliktního záření zatím izotropii vesmíru potvrzují.

Einsteinův kosmologický princip nám dává odpověď na otázku, jaký by mohl být tvar našeho vesmíru, pokud odpovídající varietu lze vnořit do čtyřrozměrného prostoru. Platí totiž následující tvrzení (viz [13, 19]).

Věta. *Každá souvislá metricky úplná hladká varieta dimenze d v $\mathbb{R}^{d+1}$, která má stejnou Ricciho křivost v každém bodě a každém směru, je nadsféra nebo nadrovina.*

Zde Ricciho křivost v daném bodě a daném směru je dána tzv. Ricciho tenzorem křivosti, což je symetrická bilineární forma na příslušném tečném prostoru, která vznikne kontrakcí Riemannova tenzoru křivosti dané variety. Hladká Riemannova varieta, která má stejnou Ricciho křivost v každém bodě a každém směru, se proto také nazývá *Einsteinova varieta.* Zatím ale neumíme jednoznačně stanovit, zda lze náš vesmír modelovat nadsférou či nadrovinou. Jestliže varietu modelující vesmír nelze vnořit do $\mathbb{R}^4$, pak lze připustit i hyperbolické geometrie.

Netriviální topologie vesmíru nesplňují podmínku izotropie. Kdyby náš vesmír měl např. toroidální topologii T^3 v $\mathbb{R}^4$, pak by pozorovatel mohl určit směr, který se odlišuje od ostatních, neboť v libovolném bodě má T^3 v různých směrech obecně různé Ricciho křivosti.

Nedávno také G. Perelman dokázal slavnou Poincarého domněnku. Podle ní je každá jednoduše souvislá kompaktní 3-rozměrná topologická varieta homeomorfní se sférou S^3, tj. s trojrozměrným povrchem čtyřrozměrné jednotkové koule (viz [17, kap. 5]).[4]) Pokud jsou uvedené předpoklady pro model vesmíru splněny, můžeme si vesmír a jeho rozpínání představit jako trojrozměrný povrch nerovnoměrně se nafukující nadkoule v $\mathbb{R}^4$, v jejímž středu je velký třesk, přičemž čas plyne v radiálním směru (srov. [15, kap. 27.5]).

[4]) Pro dvojrozměrné variety byla tato domněnka dokázána již v 19. století. Pro čtyřrozměrné variety ji dokázal Freedman v roce 1982 (viz [2]), za což získal Fieldsovu medaili v roce 1986. Důkaz pro všechny vyšší dimenze byl znám již dříve [18].

4. Hlavní výsledky M. Gromova

Michail Gromov přispěl podstatně k pokroku v globální diferenciální geometrii i v dalších matematických disciplínách. Připomeňme si zde jen některé z jeho hlavních výsledků. Definice některých uváděných pojmů lze najít např. v [10]–[14].

1) *Bishopova–Gromovova nerovnost.*

Nechť M je úplná d-rozměrná Riemannova varieta s pozitivně semidefinitní Ricciho křivostí. Pak objem koule v M je menší nebo roven objemu koule o stejném poloměru v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^d$. Jestliže navíc $v_P(r)$ označuje objem koule o středu P a poloměru r na varietě M a jestliže $V(r) = c_d r^d$ označuje objem koule o poloměru r v d-rozměrném eukleidovském prostoru, pak je funkce $r \mapsto v_P(r)/V(r)$ nerostoucí. Tato vlastnost hraje mj. klíčovou roli při důkazu Gromovovy věty o kompaktnosti – viz bod 3).

2) *Gromovova věta o grupách polynomiálního růstu.*

Nechť $S' = \{g_1, \dots, g_n\}$ je množina generátorů konečně generované grupy G a $S = \{g_1, \dots, g_n, g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1}\}$ je symetrizace množiny S'. Označme $S^{(n)}$ počet prvků z G, které se dají zapsat jako slova vytvořená z S a délky nepřesahující n. Je zřejmé, že v obecném případě číslo $S^{(n)}$ roste exponenciálně. J. Wolf ukázal, že pokud je grupa G nilpotentní, potom existuje polynom $p(n)$ takový, že $S^{(n)} < p(n)$ pro každé přirozené n, což jinými slovy znamená, že taková grupa má polynomiální růst. Gromovova věta charakterizuje grupy polynomiálního růstu přesně jako ty grupy, které obsahují nilpotentní podgrupy s konečným indexem. K původnímu důkazu této věty použil Gromov jím vytvořenou definici konvergence kompaktních metrických prostorů, která se nyní nazývá Gromovova–Hausdorffova konvergence a stále se hojně používá v geometrii a topologii. O tomto tématu nyní stručně pojednáme:

3) *Gromovova–Hausdorffova konvergence.*

Připomeňme nejprve klasický pojem Hausdorffovy vzdálenosti v metrických prostorech. Nechť A a B jsou dvě neprázdné omezené uzavřené množiny metrického prostoru (M, ϱ). Potom jejich Hausdorffova vzdálenost v M je dána vzorcem

$$\varrho_H(A, B) = \max\{\sup\{\varrho(a, B) \mid a \in A\}, \sup\{\varrho(b, A) \mid b \in B\}\}.$$

Nyní se zavádí *Gromovova–Hausdorffova vzdálenost* $d_{\mathrm{GH}}(X, Y)$ dvou kompaktních metrických prostorů X a Y jako infimum všech čísel $\varrho_{\mathrm{H}}(f(X), g(Y))$, kde probíháme všechny metrické prostory (M, ϱ) a všechna izometrická vložení $f : X \to M$, $g : Y \to M$.

Gromovova–Hausdorffova vzdálenost pak definuje množinu všech tříd izometrie kompaktních metrických prostorů jako nový metrický prostor. Takto je možno definovat konvergenci posloupností kompaktních metrických prostorů, která se nazývá

Gromovova–Hausdorffova konvergence. Limitní metrický prostor při takové konvergenci se nazývá *Hausdorffova limita* dané posloupnosti prostorů. Takto definovaná konvergence má některé překvapující vlastnosti. Například posloupnost kompaktních Riemannových prostorů (variet) dimenze 3 může konvergovat k metrickému (ale ne již Riemannovu!) prostoru Hausdorffovy dimenze 4, jak ukázal jeden ze žáků M. Gromova. Na druhé straně platí *Gromovova věta o (pre)kompaktnosti* v Riemannově geometrii, která říká, že množina kompaktních Riemannnových variet dané dimenze, jejichž Ricciho křivosti jsou omezeny zdola společnou konstantou a jejichž průměry jsou omezeny shora některou jinou konstantou, je relativně kompaktní v Gromovově–Hausdorffově metrice (tj. uzávěr této množiny je kompaktní).

4) *Gromovův součin.*

Tento pojem je rovněž svázán s metrickými prostory. Motivací je určit vzdálenost, pro kterou dvě geodetické křivky vycházející ze stejného bodu zůstávají stále „v dosahu této vzdálenosti“. Nechť (X,d) je metrický prostor a nechť $x,y,z \in X$ jsou libovolné body. Potom Gromovův součin bodů y a z při x označený symbolem $(y,z)_x$ je definován vztahem $(y,z)_x = \frac{1}{2}((d(x,y) + d(x,z) - d(y,z))$ a má tyto vlastnosti:

(a) Symetrie: $(y,z)_x = (z,y)_x$.
(b) Degenerovanost v koncových bodech: $(y,z)_y = (y,z)_z = 0$.
(c) Pro každých pět bodů $p,q,x,y,z \in X$ platí

$$\begin{aligned}
&d(x,y) = (x,z)_y + (y,z)_x,\\
&0 \leqq (y,z)_x \leqq \min\{d(x,y), d(x,z)\},\\
&|(y,z)_p + (y,z)_q| \leqq d(p,q),\\
&|(x,y)_p + (x,z)_p| \leqq d(y,z).
\end{aligned}$$

Metrický prostor (X,d) se nazývá δ-hyperbolický, jestliže pro všechny body $p,x,y,z \in X$ platí $(x,z)_p \geqq \min\{(x,y)_p, (y,z)_p\} - \delta$, kde $\delta > 0$ je reálné číslo.

Nežli uvedeme jednu z hlavních vět, připomeňme si definici geodetiky v metrickém prostoru. *Geodetická křivka* v metrickém prostoru (X,d) je křivka $\gamma : I \to X$, která lokálně minimalizuje vzdálenosti. Přesněji řečeno, existuje konstanta $\nu \geqq 0$ s vlastností, že pro každé $t \in I$ existuje okolí $J(t) \subset I$ takové, že pro každá dvě $t_1, t_2 \in J(t)$ platí rovnost

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = \nu|t_1 - t_2|.$$

Jeden z hlavních výsledků pak říká: Zvolme $\delta > 0$. Potom metrický prostor (X,d) je δ-hyperbolický, právě když pro každý geodetický trojúhelník ABC v (X,d) a pro každý bod $P \in AB$ existuje bod $Q \in AC \cup BC$ takový, že $d(P,Q) \leqq \delta$. Jinými slovy, metrický prostor (X,d) je δ-hyperbolický, právě když každý jeho geodetický trojúhelník je „δ-tenký“. Je zřejmé, že každý omezený prostor (X,d) je δ-hyperbolický pro některé $\delta > 0$. Teorie je tedy netriviální pouze pro neomezené metrické prostory. Na toto téma vyšlo velké množství prací jiných autorů, včetně monografií.

5) *Hyperbolické grupy.*

Tyto grupy jsou známy též pod názvy *lexikografické hyperbolické grupy, Gromovovy hyperbolické grupy* nebo *negativně zakřivené grupy.* Každá taková grupa je konečně generovaná grupa s „lexikografickou metrikou“ a splňující některé vlastnosti charakteristické pro hyperbolickou geometrii (viz [5]). *Lexikografická metrika* na grupě G je způsob, jak měřit vzdálenost mezi dvěma prvky z G. Je to metrika na G přiřazující každým dvěma prvkům g a h jejich vzdálenost $d(g,h)$, která vyjadřuje, jak krátkým slovem (jehož písmena jsou prvky množiny generátorů) lze vyjádřit jejich rozdíl $g^{-1}h$. Množina generátorů grupy G musí být vždy pevně zvolena. Různé volby množiny generátorů obvykle vedou k různým lexikografickým metrikám. I přes zmíněnou nejednoznačnost může být tento pojem využit k důkazům vět o geometrických vlastnostech grup, jak je tomu například v *geometrické teorii grup.* Obzvláště vlivným a velkým tématem v tomto směru je *Gromovův program* klasifikace konečně generovaných grup vzhledem k jejich globální geometrii. Formálně to znamená klasifikaci konečně generovaných grup s lexikografickými metrikami až na kvazi-izometrii. Tento program zahrnuje velkou řadu různých aspektů z algebry, geometrie a topologie a je stále v intenzivním vývoji. Zde podotkněme, že zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá *kvazi-izometrie,* jestliže existují konstanty $K \geqq 1$ a $C \geqq 0$ takové, že platí

$$\frac{1}{K} d_X(x,y) - C \leqq d_Y(f(x), f(y)) \leqq K d_X(x,y) + C$$

a každý bod z Y má vzdálenost nejvýše C od nějakého bodu z $f(X)$. Poznamenejme ještě, že kvazi-izometrie nemusí být spojité zobrazení a například každé zobrazení mezi kompaktními metrickými prostory je kvazi-izometrie. Přesto má tento pojem překvapivě velký význam pro matematiku.

6) *Skoro ploché variety.*

Hladká kompaktní varieta M se nazývá *skoro plochá,* jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ na ní existuje Riemannova metrika $g(\varepsilon)$ taková, že průměr $\operatorname{diam}(M, g(\varepsilon))$ variety M vzhledem k této metrice nepřesahuje 1 a $g(\varepsilon)$ je ε-plochá, tj. pro sekcionální křivost této metriky platí $|K_{g(\varepsilon)}| \leqq \varepsilon$.

Nil-varieta je kvocient nilpotentní Lieovy grupy podle její uzavřené podgrupy. Dále nechť nilpotentní Lieova grupa N operuje na sobě pomocí levých translací a nechť je dána konečná grupa automorfismů F grupy N. Pak lze definovat akci semi-direktního součinu $N \times F$ na N. Kompaktní kvocient grupy N podle podgrupy součinu $N \times F$ (operující volně na N) se nazývá „infranil-varieta“. Infranil-variety jsou kvocienty nil-variet podle konečných podgrup (ale opak obecně neplatí).

Gromov a Ruh dokázali, že kompaktní varieta M je skoro plochá, když a jen když je to infranil-varieta. Opět máme příklad hluboké souvislosti mezi algebrou a geometrií.

7) *Gromovovy systolické nerovnosti.*

Systola (nebo přesněji 1-*systola*) kompaktního metrického prostoru X je metrický invariant definovaný jako nejmenší délka nestažitelné smyčky v X, tj. uzavřené křivky, která nemůže být v X spojitě deformována do svého výchozího bodu. Tento pojem tedy souvisí s fundamentální grupou (první homotopickou grupou) $\pi_1(X)$ prostoru X. Dále označujeme takto definovanou systolu symbolem $\operatorname{sys}\pi_1$, abychom ji odlišili od podobného pojmu v teorii homologie. Poznamenejme, že kompaktní, orientovatelná a $(d-1)$-souvislá d-rozměrná varieta M se nazývá *podstatná,* jestliže platí $\int_M \omega \neq 0$ pro některý netriviální element objemu (tj. vnější diferenciální formu ω stupně d) na M. Nechť M je nyní podstatná kompaktní Riemannova varieta. Základní Gromovova systolická nerovnost potom zní

$$(\operatorname{sys}\pi_1)^d \leqq C_d \operatorname{vol}(M),$$

kde C_d je univerzální konstanta závisející pouze na dimenzi variety M.

Vyplňující poloměr jednoduché smyčky C v rovině je definován jako největší poloměr $R > 0$ kružnice, která se vejde dovnitř této smyčky. Označuje se symbolem $\operatorname{FillRad}(C)$. Nyní se pokusíme názorně charakterizovat *vyplňující poloměr variety.* Uvažujme epsilonové okolí smyčky C v rovině, které označíme symbolem $U_\varepsilon C \subset \mathbb{R}^2$. Když číslo $\varepsilon > 0$ roste, potom ε-okolí $U_\varepsilon C$ pohlcuje stále více vnitřku smyčky. Poslední bod, který bude pohlcen, je přesně střed největší vepsané kružnice. Můžeme tedy podat jinou definici vyplňujícího poloměru jako infima všech čísel $\varepsilon > 0$ takových, že smyčka C se dá stáhnout do jediného bodu v $U_\varepsilon C$.

Je-li nyní dána podstatná kompaktní varieta M bez okraje vložená například do euklidovského prostoru $\mathbb{R}^d$, můžeme definovat vyplňující poloměr podvariety M vzhledem k danému vložení tak, že budeme minimalizovat velikost epsilonového okolí $U_\varepsilon M \subset \mathbb{R}^d$ variety M, ve kterém se M stane homotopicky ekvivalentní s nějakým objektem nižší dimenze, například polyedrem. K zavedení obecné definice vyplňujícího poloměru $\operatorname{FillRad}(M)$ pro obecnou varietu potřebujeme teorii homologií, a proto se tím zde nebudeme zabývat. Gromov také dokázal následující (druhou) systolickou nerovnost:

$$\operatorname{sys}\pi_1 \leqq 6\operatorname{FillRad}(M).$$

Dále ještě nalezl odhad shora $\operatorname{FillRad}(M) \leqq C_d(\operatorname{vol}(M))^{1/d}$ pro vyplňující poloměr. Z druhé systolické nerovnosti a poslední nerovnosti pak snadno plyne první systolická nerovnost.

8) *Symplektická geometrie.*

Symplektická geometrie je oblast diferenciální geometrie a diferenciální topologie, která studuje *symplektické variety,* tj. diferencovatelné variety, které mají uzavřenou nedegenerovanou vnější diferenciální 2-formu. (Uzavřenost zde znamená, že vnější diferenciál této formy je roven nule.) Symplektická geometrie má svoje počátky v Hamiltonově formulaci klasické mechaniky, kde fázový prostor jistých klasických systémů má strukturu symplektické variety. Každá Kählerova varieta je rovněž symplektickou varietou. Až do 70. let zůstávala otevřena otázka, zdali existují kompaktní symplektické variety, které nejsou Kählerovy. První takové příklady byly sestrojeny Williamem

P. Thurstonem[5]) Nyní lze dokonce říci, že „většina“ symplektických variet nepřipouští Kählerovu strukturu. M. Gromov ale udělal důležitý objev v tom směru, že všechny symplektické variety připouštějí hojnost struktur splňujících všechny axiomy Kählerových variet s výjimkou toho, že by přechodové funkce mezi dvěma lokálními souřadnicovými soustavami byly holomorfní. Gromov použil tento poznatek k rozvinutí teorie *pseudoholomorfních křivek,* což vedlo k podstatnému pokroku v symplektické geometrii, zejména k zavedení symplektických invariantů, které jsou nyní známy jako *Gromovovy–Wittenovy invarianty.* Tyto invarianty hrají klíčovou roli ve fyzikální teorii strun.

Poděkování. Autoři děkují RNDr. M. Marklovi, DrSc., Mgr. V. Pravdovi, Ph.D., a doc. RNDr. J. Vanžurovi, CSc., za cenné připomínky. Práce byla podpořena výzkumným záměrem MSM 0021620839 a grantem IAA 100190803 GA AV ČR.

L i t e r a t u r a

[1] Carbone, A., Gromov, M.: *Functional labels and syntactic entropy on DNA strings and proteins.* Theoret. Comput. Sci. *303* (2003), 35–51.
[2] Freedman, M. H.: *The topology of four-dimensional manifolds.* J. Differ. Geom. *17* (1982), 357–453.
[3] Gromov, M.: *Structures métriques pour les variétés riemanniennes.* CEDIC, Paris 1981.
[4] Gromov, M.: *Partial differential relations.* Springer-Verlag, Berlin 1986.
[5] Gromov, M.: *Hyperbolic groups.* in Essays in Group Theory (ed. G. M. Gersten), MSRI Publ. 8 1987, 75–263.
[6] Gromov, M.: *Asymptotic invariants of infinite groups. Geometric Group Theory, vol. 2.* London Math. Soc., LN 182, Cambridge Univ. Press 1993.
[7] Gromov, M.: *Carnot-Carathéodory spaces seen from within. Sub-Riemannian Geometry.* Prog. Math. 144, Birkhäuser, Basel 1996, 79–323.
[8] Gromov, M.: *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces.* Birkhäuser, Boston 1999.
[9] Gromov, M.: *Mendelian dynamics and Sturtevant's paradigm.* Contemp. Math. *469* (2008), 227–242.
[10] Hirsch, M. W.: *Differential topology.* Springer, Berlin 1976, 1997.
[11] Holden, H., Riene, R. (eds.): *The Abel Prize 2003–2007. The first five years.* Springer-Verlag, Berlin, New York 2009.
[12] Klingenberg, W.: *Riemannian geometry.* Walter de Gruyter, Berlin, New York 1982.
[13] Kobayshi, S., Nomizu, K.: *Foundation of differential geometry, vol. II.* Interscience, London, New York 1969.
[14] Mac Lane, S., Birkhoff, G.: *Algebra.* Alfa, Bratislava 1973.
[15] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A.: *Gravitation.* (20th edition), Freeman, New York 1997.
[16] Sapiro, G.: *Abel Prize science lecture: Revolutionary work in geometry and shape analysis.* SIAM News *42* (2009), 1, 3.
[17] O Shea, D.: *Poincarého domněnka.* Edice Galileo, Academia, Praha 2010.
[18] Smale, S.: *Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four.* Ann. Math. *74* (1961), 391–406.
[19] Spivak, M.: *A comprehensive introduction to differential geometry, vol. 1, 4.* Brandeis Univ., Brandeis 1970, 1975.
[20] `http://www.abelprisen.no/en/`.

[5]) Thurston získal v roce 1982 Fieldsovu medaili zejména za teorii Hakenových variet.