

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Vítězslav Vít Vlček; Karel Segeth

Matematika dokonale ukrytá v počítačové tomografii

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 53 (2008), No. 3, 199–210

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/141859>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2008

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

# Matematika dokonale ukrytá v počítačové tomografii

*Vítězslav Vít Vlček a Karel Segeth, Praha*

## 1. Krátce z historie

Počítačová tomografie (Computerized Tomography – CT) je jedna z mnoha diagnostických metod, která našla svoje uplatnění v lékařství díky svému neinvazivnímu přístupu k pacientovi. Samozřejmě existují i další použití CT, např. v geomorfologii [11]. Motivací pro tvorbu počítačového tomografu byla skutečnost, že na tehdejších rentgenových snímcích nebylo možno rozlišit nádor od zdravé tkáně, protože zdravá tkáň pohlcuje téměř stejné množství rentgenového záření jako vlastní nádorové bujení [22].

V tomto časopise již bylo publikováno několik článků na obdobné téma. Článek [7] detailně popisuje princip pulzní metody jaderné magnetické rezonance. Druhý článek [15] se zabývá rentgenovou tomografií a jejími aplikacemi.

Počítačová tomografie je obvykle využívána při zkoumání vnitřních struktur nějakého objektu, který nemůžeme (nebo nechceme) poškodit. Výstupem počítačového tomografu (často slangově nazývaného „cétéčko“) je obrázek, který lze interpretovat tak, že jednotlivé odstíny šedi představují míru absorpce rentgenového záření v konkrétním bodě tohoto obrázku. V současnosti je výstup počítačového tomografu natolik dokonalý, že by se dalo očekávat, že jde spíše o skutečné fotografie vnitřků tomografovaných objektů, než o velmi sofistikovaně rekonstruovaný obraz. Než přejdeme k popisu principu počítačového tomografu a matematiky v něm dokonale ukryté, uveďme si stručnou historii počítačové tomografie.

Počítačová tomografie má dva otce: Sir Godfrey Newbold Hounsfield (\*28. 8. 1919 – †12. 8. 2004) a Allan MacLeod Cormack (\*23. 2. 1924 – †7. 5. 1998), kteří pracovali nezávisle na sobě. Cormack působil spíše jako teoretik, který navrhl rekonstrukční metodu pro dosud neexistující počítačový tomograf, zatímco Hounsfield působil jako praktik, jenž vytvořil první prototyp počítačového tomografu, který ale používal jinou rekonstrukční techniku než Cormack. V roce 1979 oba získali společně Nobelovu cenu za medicínu, právě za objevení počítačové tomografie. Následný chronologický přehled mapuje historii počítačové tomografie [22], [9].

---

Ing. VÍTEZSLAV VÍT VLČEK, Ph.D., katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň, e-mail: [vitezslav@vuvlcek.info](mailto:vitezslav@vuvlcek.info)  
Prof. RNDr. KAREL SEGETH, CSc., Matematický ústav AV ČR, Žitná 25, 115 67 Praha, e-mail: [segeth@math.cas.cz](mailto:segeth@math.cas.cz)

1895 W. C. Röntgen (\*27. 3. 1845–†10. 2. 1923) objevil nový druh záření, které pojmenoval paprsky X (jako matematický symbol něčeho neznámého). V Evropě se častěji toto záření nazývá po svém objeviteli — Röntgenovo nebo rentgenové záření. Bohužel se přesně neví, jak k objevu došlo, neboť Röntgen nechal před svou smrtí spálit většinu svých záznamů [16], [14]. Lze však říci, že byl prvním člověkem, který pořídil obraz kostí pomocí záření X (obr. 1). Již v následujícím roce 1896 bylo publikováno cca 1000 prací na téma paprsky X. V Brně roku 1896 se konala přednáška pro Přírodovědnou a lékařskou společnost, kde zaznělo: „Tento objev nemá žádného praktického využití a snad jen daleká budoucnost přinese některé možnosti jeho uplatnění“ [1]. V roce 1897 bylo provedeno první rentgenové vyšetření u nás doktorem Rudolfem Jedličkou.



Obr. 1. Rentgenogram ruky Röntgenovy ženy Anny Berthy, pořízený 22. prosince 1895.

1917 Johann Karl August Radon (\*16. 12. 1887–†25. 5. 1956) formuloval Radonovu transformaci, která vznikla při jeho studiu diferenciální geometrie. Jeho stručný životopis lze najít v [23].

1956 V článku [2] od R. N. Bracewella, který popisuje rekonstrukci radioastronomických dat, můžeme nalézt pravděpodobně první zmínky o Fourierově řezovém teorému (Fourier Slice Theorem), který slouží jako základ pro stanovení obrazu v inverzní Radonově transformaci.

Další zajímavostí je, že v tomto článku je zmíněn vztah pro Radonovu transformaci, ale tento vztah není označen jako Radonova transformace, nýbrž jako integrál po přímce

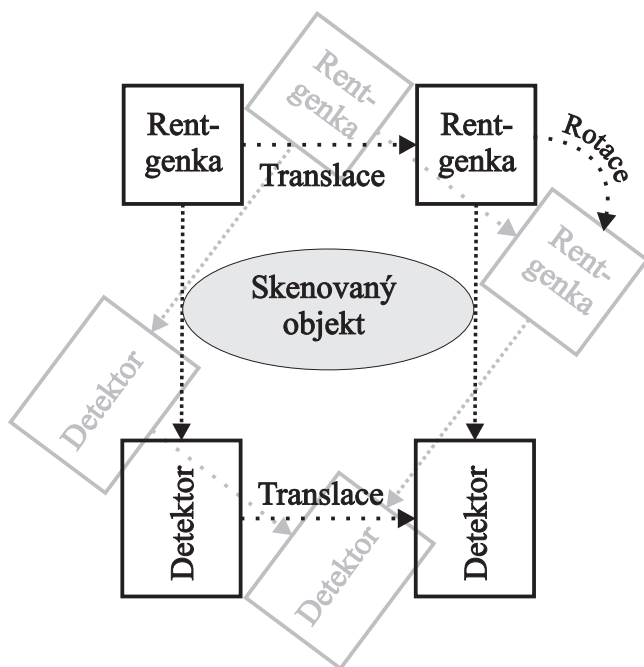
$$f_L(\theta, R) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) \delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - R) dx_1 dx_2.$$

1963 Cormack publikoval teoretickou práci [5], kde popisoval metodu výpočtu obrazů v inverzní Radonově transformaci s použitím Fourierových řad. Již v tomto článku popisuje tři aplikace jeho metody, přičemž jedna z nich by měla použít rentgenové záření pro získání dat. Tento článek lze tedy právem považovat za teoretický zrod počítačové tomografie.

Bohužel v 60. letech byla tato jeho práce úplně přehlédnuta až na několik málo citací, což mohlo být také způsobeno tím, že v té době ještě neexistoval algoritmus tzv. rychlé Fourierovy transformace (FFT), který byl publikován až v roce 1965 [4], a dále neexistovalo zařízení, na kterém by bylo možno ověřit funkčnost algoritmu na reálných datech.

Cormack vypracoval celý tento koncept sám. O práci Bracewella [2] a Radona se dozvěděl až v 70. letech [6]. Proto v jeho článku [5] je zmíněna Radonova transformace pouze jako vztah tentokrát v podobě  $f_L = \int_L g(s) ds$  obdobně jako u Bracewella.

1967 Autoři Bracewell a Riddle popisují metodu filtrované zpětné projekce (Filtered Back Projection – FBP) v článku [3]. Tato metoda je v současnosti jedna z nejčastěji užívaných metod pro numerický výpočet obrazu v inverzní Radonově transformaci.



Obr. 2. Schéma počítačového tomografu první generace.

1971 Hounsfield sestavil první prototyp počítačového tomografu. Tento tomograf prováděl 180 úhlových a 160 translačních projekcí. Vlastní proces měření dat trval přibližně 4,5 minuty a následná rekonstrukce obrazu trvala 2,5 hodiny pomocí algebraické rekonstrukční techniky (ART). Rekonstruovaný obraz měl rozlišení  $80 \times 80$  bodů.

Prvním úspěšně tomografovaným objektem byl mozek krávy. Další pokus byl na mrtvém člověku, u kterého Hounsfield znal přesnou pozici nádoru na mozku. Bohužel, k jeho velkému zklamání nebyl tento nádor na tomografické

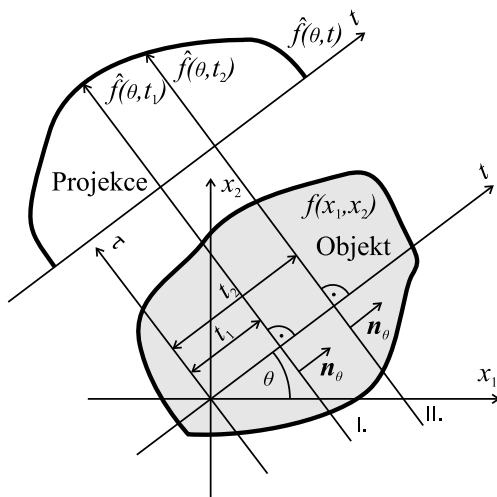
rekonstrukci vidět. Naštěstí ho povzbudil k další práci jeho odborný poradce v oblasti medicíny; fyzikální změny tkáně, které mohou proběhnout po smrti, mohou zneviditelnit nádor. Další pokus už proběhl úspěšně na živém člověku (4. října 1971 [15]) v Atkinson Morley's Hospital ve Wimbledonu v Anglii. „My God, it does work—I can see the tumor just as I had always hoped,“ řekl Hounsfield [22].

1979 Hounsfield a Cormack získali společně Nobelovu cenu za medicínu.

První generace počítačového tomografu má následující schéma (obr. 2). Objekt vložený do tomografu je ozařován úzkým paprskem rentgenového záření o konstantní intenzitě  $I_0$ . Proti tomuto emitoru je umístěn detektor rentgenového záření, který měří intenzitu  $I(\theta, t)$  paprsku rentgenového záření po průchodu tomografovaným objektem. Detektor a emitor leží na přímce určené rovnicí

$$\mathbf{n}_\theta \cdot \mathbf{x} = t \quad (1)$$

s parametry  $\theta$  a  $t$ , kde  $\mathbf{n}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)^T$  je jednotkový normálový vektor této přímky, který svírá s osou  $x_1$  úhel  $\theta \in [0, \pi)$ , a  $t \in \mathbb{R}$  je vzdálenost této přímky od počátku. Počátek soustavy souřadnic  $x_1$  a  $x_2$  nemusí být nutně umístěn ve středu tomografovaného objektu (viz obr. 3).



Obr. 3. Schéma procesu měření dat počítačového tomografu první generace. Na obrázku jsou zachyceny dvě rovnoběžné translační projekce I. a II., tj. jejich  $\theta$  je stejné, zatímco  $t_1 < t_2$ .

Tomograf nejprve provede sadu translačních projekcí, tj.  $\theta$  se nemění (obr. 3), a pak provede pootočení detektoru a emitoru vzhledem k počátku soustavy souřadnic  $x_1$  a  $x_2$  a po té následuje další sada translačních projekcí. Vlastně celý tento proces naprosto přesně odpovídá výpočtu obrazu v Radonově transformaci za předpokladu, že by bylo rentgenové záření lineárně utlumováno při průchodu tomografovaným objektem.

Ve skutečnosti se útlum rentgenového záření, které prochází nějakým homogenním prostředím, popisuje pomocí Beerova zákona

$$I = I_0 e^{-\mu s}, \quad (2)$$

kde  $I_0$  je intenzita rentgenového záření před vstupem do nějakého homogenního prostředí,  $\mu$  [ $\text{m}^{-1}$ ] je útlumový koeficient rentgenového záření tohoto prostředí,  $s$  [ $\text{m}$ ] je délka průsečnice paprsku  $s$  tímto prostředím a  $I$  je intenzita rentgenového záření po opuštění tohoto homogenního prostředí. V případě, že paprsek rentgenového záření prochází heterogenním prostředím, má Beerův zákon následující podobu

$$I = I_0 \exp\left(-\int_0^s \mu(x) dx\right), \quad (3)$$

kde funkce  $\mu(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  má opět význam míry schopnosti materiálu pohlcovat rentgenové záření v konkrétním bodě  $x$ . Obvykle se předpokládá, že útlumové koeficienty  $\mu(x)$  nezávisí na intenzitě rentgenového záření. Tento předpoklad je téměř splněn, pokud se energie rentgenového záření pohybuje v intervalu 30 – 100 keV. Pokud jsou útlumové koeficienty  $\mu(x) < 0$  pro některá  $x$ , pak v těchto bodech vzniká rentgenové záření. V případě počítačové tomografie aplikované v medicíně se předpokládá, že

$$\mu(x) \geq 0, \quad (4)$$

tj. že tkáň nevyzařuje rentgenové záření. Pro každý paprsek rentgenového záření procházející tomografovaným objektem lze jednoznačně určit parametry  $\theta$  a  $t$ , které určují trajektorii paprsku pomocí rovnice (1). Výsledná intenzita rentgenového záření je dána vztahem

$$I(\theta, t) = I_0 \exp\left(-\int_{\Omega=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: \mathbf{n}_\theta^T \mathbf{x} = t\}} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\right), \quad (5)$$

kde  $I_0$  je emitovaná intenzita rentgenového záření,  $I(\theta, t)$  je měřená intenzita protější detektorem a oblast  $\Omega$  je úsečka mezi emitorem a detektorem, která prochází tomografovaným objektem. Jednoduchou úpravou rovnice (5) získáme

$$\ln \frac{I_0}{I(\theta, t)} = \int_{\Omega=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: \mathbf{n}_\theta^T \mathbf{x} = t\}} \mu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathcal{R}\{\mu\}(\theta, t), \quad (6)$$

kde člen na levé straně rovnice (6) představuje normovaná data naměřená počítačovým tomografem a pravá strana rovnice představuje obraz útlumových koeficientů v Radonově transformaci. Pro určení funkce  $\mu(\mathbf{x})$  z rovnice (6) je třeba provést inverzní Radonovu transformaci výrazu na levé straně rovnice (6). Již tato rovnice v sobě ukrývá jedno nebezpečí, a to když  $I(\theta, t) = 0$ . Tento stav může být způsoben např. tím, že detektor nezaregistroval žádné rentgenové záření, protože materiál toto záření natolik utlumil, že výsledná intenzita záření je již pod rozlišovací schopnosti detektoru.

## 2. Radonova transformace

První zmínka o Radonově transformaci [20] pochází z roku 1917. Tato transformace byla původně formulována pro funkce dvou proměnných, ale časem byla zobecněna i pro funkce  $n$  proměnných, např. rozšíření do 3D nalezneme v [8].

Definice Radonovy transformace má několik ekvivalentních zápisů,

$$\hat{f}(\theta, t) = \hat{f}_\theta(t) = \mathcal{R}\{f\}(\theta, t) = \int_{\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{n}_\theta^T \mathbf{x} = t\}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \quad (7)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - \tau \sin \theta, \tau \cos \theta + t \sin \theta) d\tau \quad (8)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) \delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - t) dx_1 dx_2 \quad (9)$$

$$= \int_{\mathbf{n}_\theta^\perp = \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{n}_\theta^T \boldsymbol{\alpha} = 0} f(t\mathbf{n}_\theta + \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (10)$$

kde  $\theta \in [0, \pi)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{n}_\theta^T = [\cos \theta, \sin \theta]$ ,  $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2]$  a  $\hat{f}(\theta, t)$  je obraz funkce  $f(\mathbf{x})$  v Radonově transformaci. Radon jako první dokázal nalézt i inverzní zobrazení, které má následující podobu

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{S^1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \hat{f}(\theta, t)}{\partial t} \frac{d\mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{x} - t} dt d\mathbf{y}, \quad (11)$$

kde  $S^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$  je jednotková sféra v  $\mathbb{R}^2$ . Důkaz vztahu (11) lze nalézt v [21], [19].

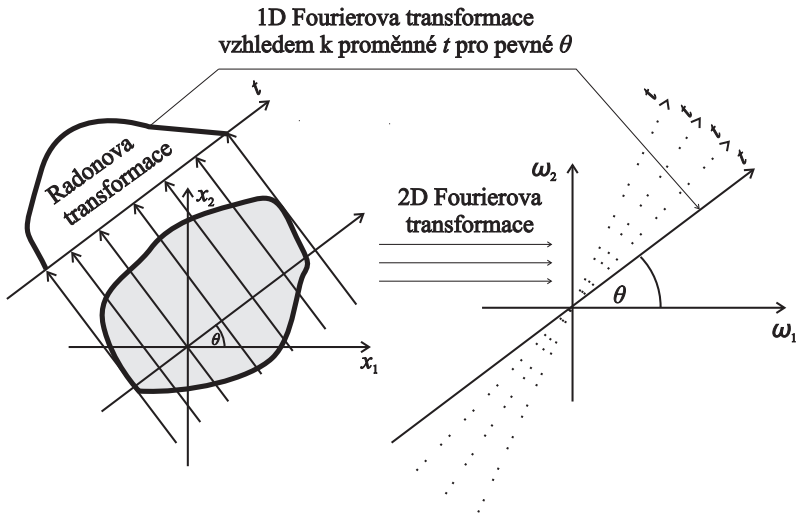
## 3. Stanovení útlumových koeficientů

Nyní se zaměříme na vlastní výpočet obrazu v inverzní Radonově transformaci. Přímé použití vzorce (11) není vhodné z numerického hlediska. Proto byly vyvinuty dva alternativní postupy numerického výpočtu. První skupina sdružuje přímé metody založené na Fourierově řezovém teorému a druhá skupina obsahuje algebraické metody pro řešení úlohy  $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , kde  $\mathbf{R}$  je aproximace diskrétní Radonovy transformace,  $\mathbf{b}$  jsou data z počítačového tomografu a  $\mathbf{x}$  je rekonstruovaný obraz.

### 3.1. Přímé metody

Přímé metody jsou založeny na Fourierově řezovém teorému, který je motivován následující úvahou. Vyjdeme z dvojrozměrné Fourierovy transformace funkce  $f(x_1, x_2)$ , tj.

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega_1, \omega_2)_{x_1, x_2 \rightarrow \omega_1, \omega_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$



Obr. 4. Princip Fourierova řezového teoremu.

pro speciální případ  $\omega_1 = 0$  dostaneme

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f\}(0, \omega_2)_{x_1, x_2 \rightarrow \omega_1, \omega_2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\omega_2 x_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\omega_2 x_2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2, \end{aligned}$$

kde výraz  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1$  představuje výpočet obrazu v Radonově transformaci pro  $\theta = \frac{\pi}{2}$  a  $t = x_2$ , tj.

$$\mathcal{F}\{f\}(0, \omega_2)_{x_1, x_2 \rightarrow \omega_1, \omega_2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\omega_2 x_2} \mathcal{R}\{f\}\left(\frac{\pi}{2}, x_2\right) dx_2 = \mathcal{F}\left\{\hat{f}_{\frac{\pi}{2}}(x_2)\right\}(\omega_2)_{x_2 \rightarrow \omega_2},$$

kde  $\hat{f}_{\frac{\pi}{2}}(x_2)$  je restrikce obrazu funkce  $f(x_1, x_2)$  v Radonově transformaci pro pevné  $\theta = \frac{\pi}{2}$  a libovolné  $t = x_2$ . Zobecněním tohoto vztahu pro všechna  $\theta \in [0, \pi)$  dostaneme Fourierův řezový teorem, který lze formulovat vztahem

$$\mathcal{F}\left\{\hat{f}(\theta, t)\right\}(v) = \mathcal{F}\{f(x_1, x_2)\}(v \cos \theta, v \sin \theta), \quad (12)$$

kde  $\hat{f}(\theta, t)$  představuje obraz funkce  $f(x_1, x_2)$  v Radonově transformaci a

$$\mathcal{F}\left\{\hat{f}(\theta, t)\right\}(v)_{t \rightarrow v}$$

je obraz funkce  $\hat{f}(\theta, t)$  v jednorozměrné Fourierově transformaci. Výraz na pravé straně rovnice (12) představuje restrikci obrazu funkce  $f(x_1, x_2)$  v dvourozměrné Fourierově



transformaci na přímku procházející počátkem určenou parametrickou rovnicí (parametr  $v$ )

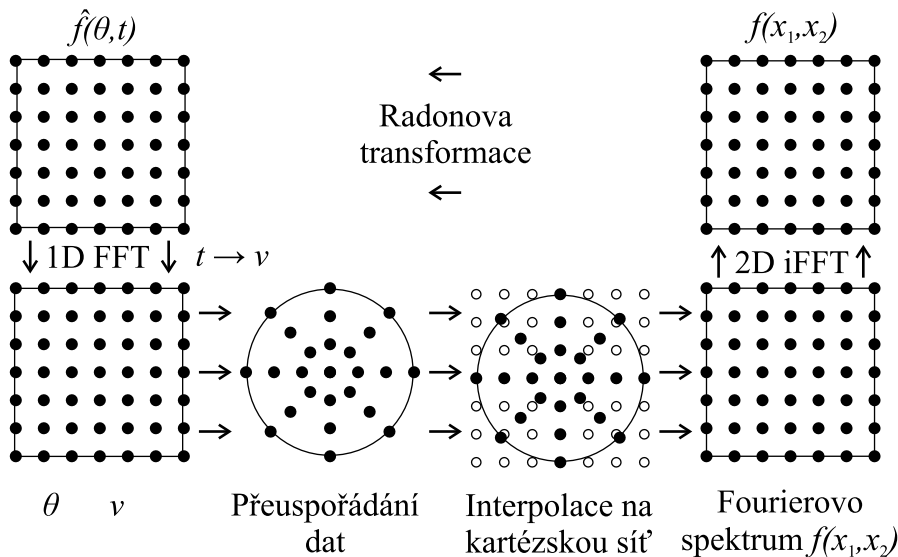
$$\omega_1 = v \cos \theta, \quad \omega_2 = v \sin \theta,$$

viz obrázek 4.

Tento základní teorém (12) se stal jádrem všech přímých metod. Jeho přímou aplikací získáme Fourierovu metodu, která má následující výpočtové schéma:

1. Normovaná data  $\hat{f}(\theta, t)$  pořízená tomografem jsou uložena v matici, kde v každém sloupci jsou uloženy všechny naměřené normované intenzity rovnoběžných translačních projekcí (tj. pro konstantní  $\theta$ ).
2. Pak se provede 1D FFT nad každým sloupcem.
3. Další krok spočívá v přeuspořádání dat z matice na polární síť.
4. Bohužel nyní nelze přímo použít 2D inverzní FFT, protože ta vyžaduje, aby vstupní data byla uložena na čtvercové síti. Proto je nutné provést interpolaci z polární sítě na kartézskou.
5. Poslední krok je výpočet obrazu v 2D inverzní FFT z interpolovaných dat.

Grafická reprezentace tohoto postupu je na obrázku 5. Největší slabina této metody je ve 4. kroku. Čím dál jsme od počátku souřadného systému, tím řidší je polární síť, což způsobuje zanesení interpolační chyby.



Obr. 5. Princip Fourierovy metody pro určení obrazu v inverzní Radonově transformaci se skládá ze čtyř kroků. Vlevo nahoře jsou normovaná data z počítačového tomografu  $\hat{f}(\theta, t)$ , na kterých se provede 1D FFT, pak následuje přeuspořádání dat a interpolace na čtvercovou síť. Jako poslední krok je provedení inverzní 2D FFT, čímž získáme rekonstruovaný obraz.

Tento problém s interpolací je odstraněn v metodě FBP. Idea této metody spočívá ve vyjádření inverzní Fourierovy transformace v polárních souřadnicích, čímž se odstraní požadavek interpolace dat na kartézskou síť. Tato metoda je jedna z nejčastěji používaných rekonstrukčních metod. Její podrobný popis lze najít v [24].

Výhody přímých metod jsou: rychlost výpočtu obrazové rekonstrukce (ta je dosažena využitím FFT) a nízké nároky na paměť počítače (stačí pouze paměť na naměřená data a paměť pro rekonstruovaný obraz). Nevýhody jsou: větší chyba rekonstruovaného obrazu (např. částečně rozmazaný obraz, ...), velmi obtížná modifikace algoritmu v případě, že by se paprsek pohyboval po obecné křivce nebo při zavedení nějakého sofistikovaného modelu pro odstranění šumu.

### 3.2. Algebraické metody

Princip algebraických metod spočívá v nahrazení Radonovy transformace její diskrétní aproximací. Nejlépe tento vztah vyjadřuje následující schéma

$$\begin{array}{ccc} \hat{f}(\theta, t) & = & \mathcal{R}\{f(x, y)\} \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{b} & = & \mathbf{R} \quad \mathbf{x} \end{array} \quad (14)$$

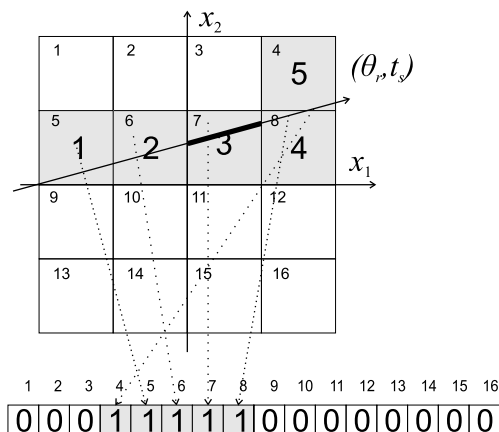
Nejprve provedeme diskretizaci funkce  $\hat{f}(\theta_r, t_s)$ , kde  $\theta_r = r\Delta\theta$  a  $t_s = t_{\min} + s\Delta t$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots, R-1$  a  $s = 0, 1, 2, \dots, S-1$ . Konstanta  $t_{\min}$  je dána vzdáleností nejvzdálenějšího bodu rekonstruovaného objektu od počátku systému souřadnic  $x_1, x_2$ , tj. pro rekonstruovaný čtvercový objekt o straně  $a$ , který je umístěn na střed souřadného systému, je  $t_{\min} = -\frac{\sqrt{2}a}{2}$ . Funkční hodnoty  $\hat{f}_{rs} = \hat{f}(\theta_r, t_s)$  přeuspořádáme do vektoru např. následujícím způsobem

$$\mathbf{b}_i = \hat{f}_{rs}, \quad \text{kde } i = rS + s.$$

Obdobně přeskupíme i rekonstruovaný obraz  $f_{mn} = f(m, n)$ , kde  $m = 0, 1, \dots, M-1$  a  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , tj.

$$\mathbf{x}_i = f_{mn}, \quad \text{kde } i = mN + n.$$

Existuje několik způsobů jak vyjádřit matici  $\mathbf{R}$ , která reprezentuje diskrétní Radonovu transformaci. Ten nejjednodušší se nazývá metoda nejbližšího souseda. Rekonstruovaným obrazem vedeme přímky, kde každá přímka má své vlastní parametry  $(\theta_r, t_s)$ . Tato přímka projde skrz  $K$  čtverců (předpokládáme, že velikost čtverce je jedna a na tomto čtverci je funkce  $f$  konstantní) rekonstruovaného obrazu, kde každý tento čtverec má svoji souřadnici středu  $(m_k, n_k)$ , kde  $k = 1, 2, \dots, K$ . Do matice  $\mathbf{R}$  na řádek  $rS + s$  (volba řádku v matici závisí pouze na hodnotách parametrů  $(\theta_r, t_s)$  přímky) dáme jedničku do sloupce  $m_kN + n_k$ . Tvorba jednoho řádku matice  $\mathbf{R}$  je zachycena na obrázku 6. Větší přesnosti lze dosáhnout tak, že místo jednotky budeme do matice  $\mathbf{R}$  ukládat délku průsečnice čtverce a přímky s parametry  $(\theta_r, t_s)$ , viz obrázek 6. V buňce 7 je tučně vyznačena délka této průsečnice.



Obr. 6. Tvorba diskretní aproximace Radonovy transformace. Rekonstruovaný objekt má rozměr  $4 \times 4$  body. Přímka o parametrech  $(\theta_r, t_s)$  protne pět čtverců (šedě vyznačené). Proto do matice  $\mathbf{R}$  na řádek odpovídající parametrům  $(\theta_r, t_s)$  umístíme jednotky do sloupců, které odpovídají označeným čtvercům. Vyšší přesnosti lze dosáhnout tak, že budeme místo jednotek ukládat délku průsečnice přímky s patričným čtvercem (viz buňka 7).

Při dostatečném počtu lineárně nezávislých rovnic můžeme stanovit jednoznačné řešení úlohy (14). Zdůraznění lineární nezávislosti rovnic je nutné. Předpokládejme, že budeme rekonstruovat obraz o velikosti  $2 \times 2$  body (obr. 8). Pokud vezmeme dvě vodorovné projekce procházející body  $x_{11}, x_{12}$  a  $x_{21}, x_{22}$  a k tomu přidáme dvě svislé projekce procházející body  $x_{11}, x_{21}$  a  $x_{12}, x_{22}$  získáme matici  $\mathbf{R}$  soustavy, která je zobrazena na obrázku 8. Bohužel tato matice  $\mathbf{R}$  je singularní. Proto je potřeba věnovat patričnou pozornost volbě směrů  $\theta_r$  pro sestavení matice  $\mathbf{R}$ . Pokud bychom použili jednu diagonální projekci (např.  $x_{11}, x_{22}$ ) místo libovolné z předchozích, pak získáme regulární matici  $\mathbf{R}$ .

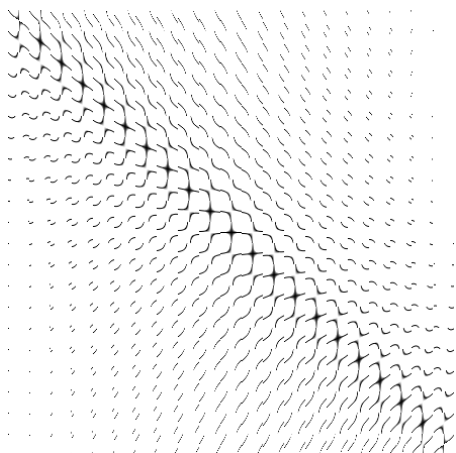
Další problém s maticí  $\mathbf{R}$  spočívá v její velikosti. Tato matice je velmi řídká. V každém řádku je nejvýše 2  $\max(M, N)$  nenulových koeficientů, ale nemá pásovou strukturu, viz obrázek 7.

Pro vynucení fyzikální podmínky (4) se řeší modifikovaná úloha

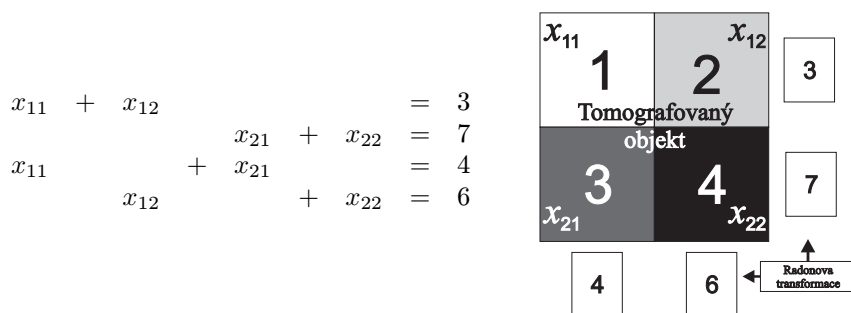
$$\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{x}_i \geq 0. \quad (17)$$

Popis numerických metod pro řešení této úlohy lze nalézt v [18], [10], [24]. Další rozšíření diskretní Radonovy transformace lze nalézt v [12], [13], [17].

Výhody algebraických metod jsou: snadná modifikace rekonstrukčního algoritmu při změně trajektorie paprsku nebo při zakomponování nějakého speciálního filtru pro odstranění šumu (stačí pouze upravit matici  $\mathbf{R}$ ), rekonstruovaný obraz má obvykle menší chybu než stejná rekonstrukce produkovaná přímou metodou. Mezi nevýhody patří: velké nároky na paměť (matice  $\mathbf{R}$  zabírá obrovské místo v paměti počítače, ačkoliv je hodně řídká), rychlost výpočtu (pokud se použije pro řešení úlohy (17) nějaká iterační metoda, pak jedna iterace této metody je obvykle dražší než provedení celé přímé metody).



Obr. 7. Struktura matice  $\mathbf{R}$ . Černě jsou zobrazeny nenulové koeficienty.



Obr. 8. Příklad nevhodné diskrétní aproximace Radonovy transformace. Zde snadno zjistíme, že matice  $\mathbf{R}$  je singulární, protože po sečtení I. + II. řádku získáme stejnou rovnici jako po sečtení III. + IV. řádku.

#### 4. Závěr

Počítačová tomografie si od svého zrodu našla své místo v mnoha rozličných oborech. Matematiku popisující princip počítačové tomografie lze najít i v dalších obdobných zařízeních, např. MRI (Magnetic Resonance Imaging) nebo PET (Positron Emission Tomography).

V předcházejícím textu jsme se pokusili vysvětlit, co vše se musí stát, než lékař uvidí na monitoru svého PC obrazovou rekonstrukci nějaké tkáně, a že tato cesta není vůbec přímočará. Kvalita současných rekonstrukčních algoritmů je tak vysoká, že člověk neznalý věci by mohl tvrdit, že zde není důvod matematiku využívat, protože to je jen fotografie.

**Poděkování.** Práce na tomto článku byla podpořena grantem č. IAA 100190803 Grantové agentury Akademie věd České republiky a výzkumným záměrem AV0Z10190503 Akademie věd České republiky.

## L i t e r a t u r a

- [1] BAKALA, J.: *Klikaté cesty vědy v království českém*, Britské listy, prosinec 2003.
- [2] BRACEWELL, R. N.: *Strip integration in radio astronomy*, Austral. J. Phys. 9 (1956), 198.
- [3] BRACEWELL, R. N., RIDDLE, A. C.: *Inversion of fan-beam scans in radio astronomy*, Astrophys. J. 150 (1967), 427.
- [4] COOLEY, J. W., TUKEY, J. W.: *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Math. Comp. 19 (1965), 297–301.
- [5] CORMACK, A. M.: *Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications*, Appl. Phys. 34 (1963), 2722–2727.
- [6] CORMACK, A. M.: *Early two-dimensional reconstruction and recent topics stemming from it*, Nobel Lecture, 1979.
- [7] ENGLISH, J.: *Pulzní metoda jaderné magnetické rezonance a její užití v mr tomografii*, Pokroky Mat. Fyz. Astronom. 40 (1995), 198–207.
- [8] JELÍNEK, J., SEGETH, K. A. OVERTON, T. R.: *Three-dimensional reconstruction from projections*, Apl. Mat. 30 (1985), 92–109.
- [9] KAK, A. C., SLANEY, M.: *Principles of computerized tomographic imaging*, Institute for Electrical and Electronic Engineers, USA, 1999.
- [10] KAUFMAN, L.: *Maximum likelihood, least squares, and penalized least squares for pet*, IEEE Trans. Medical Imaging 12 (1993), 200–214.
- [11] KETCHAM, R. A., CARLSON, W. D.: *Acquisition, optimization and interpretation of x-ray computed tomographic imagery: applications to the geosciences*, Comput. Geosci. 27 (2001), 381–400.
- [12] KINGSTON, A.: *Orthogonal discrete Radon transform over  $p^n \times p^n$  images*, Signal Process. 86 (2006), 2040–2050.
- [13] KINGSTON, A., SVALBE, I.: *Generalised finite Radon transform for  $n \times n$  images*, Image Vision Comput. 25 (2007), 1620–1630.
- [14] KRAUS, I.: *První století rentgenových paprsku*, Vesmír 74 (1995), 504.
- [15] KRAUS, I.: *Rentgenová tomografie a možnosti jejích technických aplikací*, Pokroky Mat. Fyz. Astronom. 42 (1997), 121–127.
- [16] MATEJOVSKÁ, H.: *Století rentgenu v medicíně*, Vesmír 74 (1995), 506.
- [17] MATUŠ, F., FLUSSER, J.: *Image representation via a finite Radon transform*, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 15 (1993), 996–1006.
- [18] NAGY, J., STRAKOŠ, Z.: *Enforcing nonnegativity in image reconstruction algorithms*, In David C. Wilson, Hemant D. Tagare, Fred L. Bookstein, Françoise J. Preteux, and Edward R. Dougherty, editors, Mathematical Modeling, Estimation, and Imaging, volume 4121, pages 182–190. The International Society for Optical Engineering, Oct 2000.
- [19] NATTERER, F.: *The mathematics of computerized tomography*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2001.
- [20] RADON, J.: *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Ber. Verh. Saechs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Natur. Kl. 69 (1917), 262–277.
- [21] RAMM, A. G., KATSEVICH, A. I.: *The Radon Transform and Local Tomography*, CRC Press, 1996.
- [22] ROBB, W. L.: *Perspective on the first 10 years of the ct scanner industry*, Acad. Radiol. 10 (2003), 756–760.
- [23] ŠOLC, J., ŠOLCOVÁ, A.: *Johann Radon (1887 – 1956)*, Pokroky Mat. Fyz. Astronom. 53 (2008), 80–81.
- [24] TOFT, P.: *The Radon Transform – Theory and Implementation*, PhD thesis, Technical University of Denmark, 1996.