Pavel Drábek
Důkaz Brouwerovy věty metodou teorie grafů

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 50 (2005), No. 4, 294–300

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141283`

Důkaz Brouwerovy věty metodou teorie grafů

Pavel Drábek, Plzeň

1. Úvod

Mohutný rozmach vědy ve dvacátém století znamenal, že se jednotlivé disciplíny začaly štěpit na užší specializace. To platí v plné míře i pro matematiku. Jedním z důsledků je skutečnost, že vědec, který pracuje v jisté oblasti matematiky, není schopen s porozuměním číst odborný text svého kolegy, který pracuje v jiné oblasti matematiky. Extrémní případ specializace vede k představě „odborníka", který „ví absolutně všechno o ničem". Úzká specializace je jistě v dnešní době nutná k tomu, aby vědec dosáhl hlubokých výsledků. Na druhou stranu širší rozhled může být inspirující a často přináší nové pohledy na věc. Opačným extrémem úzké specializace je představa „pseudoodborníka", který umí „žonglovat" s pojmy, které se vztahují k širokému spektru oborů: „neví nic o absolutně všem". Takoví lidé však skutečně existují, jsou schopni „zasvěceně" hovořit na jakékoli téma a je často těžké odhalit, že vůbec nechápou podstatu věci. Je jasné, že ani jeden extrém není přínosem pro vědecký pokrok.

Z historie je dobře známo, že řady nových objevů bylo dosaženo tak, že po dostatečně dlouhé době zkoumání dané problematiky speciálními metodami, za tím účelem vyvinutými, přišel někdo se zcela originálním pohledem na věc, vyvinul novou metodu, vycházející nečekaně z úplně jiné oblasti výzkumu, a problematiku tak posunul o velký kus dopředu.

Matematika je vědecká disciplína, ve které se kromě nových výsledků cení také způsoby a metody jejich dosažení. Jde vesměs o různé typy důkazů. Zatímco jeden důkaz může posloužit pouze k ověření platnosti daného tvrzení, jiný důkaz téhož tvrzení může kromě toho otevřít předtím netušené možnosti dalšího zobecňování a rozvoje zkoumané problematiky.

Jedním ze základních nástrojů nelineární matematické analýzy je Brouwerova věta o pevném bodu[1]):

[1]) Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966), holandský matematik, publikoval větu o pevném bodu v roce 1911.

Prof. RNDr. Pavel Drábek, DrSc. (1953), katedra matematiky FAV ZČU v Plzni, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň.

Věta 1.1. *Nechť $\mathcal{K}$ je neprázdná, uzavřená, omezená a konvexní množina v $\mathbb{R}^M$ a $f\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ je spojité zobrazení. Potom existuje alespoň jeden bod $x^* \in \mathcal{K}$ takový, že*

$$x^* = f(x^*).$$

Poznamenejme, že x^* se nazývá pevný bod zobrazení f. Aplikace této věty jsou velmi široké a zasahují do oblastí matematiky zdánlivě mezi sebou nesouvisejících. Jedním z nejznámějších důkazů tohoto fundamentálního tvrzení je důkaz analytický, který je založený na substituci v Lebesgueově integrálu (viz např. [2]). Existuje ale mnoho jiných důkazů. Účelem tohoto textu je seznámit čtenáře s elementárním důkazem, který je založen na teorii grafů a který je možné nalézt v knize [1]. Uvedený důkaz je pěknou ukázkou faktu, že zdánlivě vzdálené a málo související oblasti matematiky — matematická analýza a teorie grafů — spolu mohou naopak souviset velmi úzce!

2. Ekvivalentní formulace Brouwerovy věty

V tomto a v dalším odstavci bude vždy $\mathcal{K}$ představovat neprázdnou, uzavřenou, omezenou a konvexní množinu v $\mathbb{R}^M$, která obsahuje více než jeden bod. Dále $f\colon \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ bude značit spojité zobrazení množiny $\mathcal{K}$ do sebe. Symbolem $\mathcal{B}^N$ budeme značit uzavřenou kouli v $\mathbb{R}^N$ se středem v počátku a s poloměrem jedna.

Lemma 2.1. *Pro každou množinu $\mathcal{K}$ existuje $N \leqq M$ takové, že $\mathcal{K}$ je homeomorfní s $\mathcal{B}^N$, tj. existuje spojité vzájemně jednoznačné zobrazení $\varphi\colon \mathcal{K} \to \mathcal{B}^N$ takové, že inverzní zobrazení $\varphi^{-1}\colon \mathcal{B}^N \to \mathcal{K}$ je také spojité.*

Princip důkazu. Vybereme lineárně nezávislé prvky $x_1, x_2, \ldots, x_N$ z množiny $\mathcal{K}$ tak, aby lineární prostor $X = \mathrm{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ (tzv. lineární obal prvků $x_1, x_2, \ldots, x_N$) obsahoval množinu $\mathcal{K}$. Indukcí podle dimenze X dokážeme existenci takového $x_0 \in \mathcal{K}$, že pro libovolný prvek $x \in X$ existuje $\alpha > 0$ tak, že $x_0 + (1/\alpha)x \in \mathcal{K}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x_0 = o$.

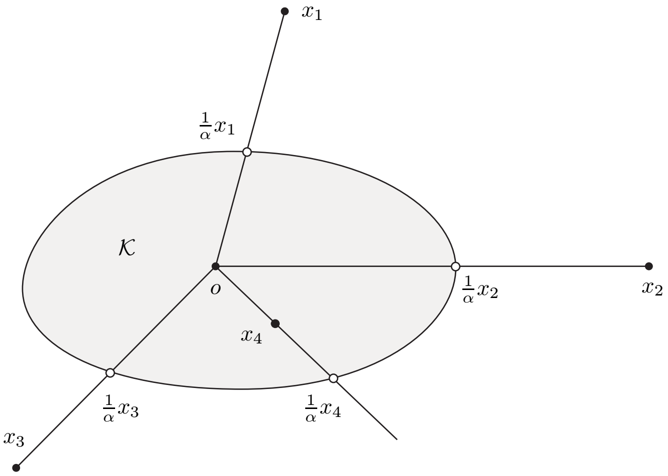
Dále definujeme tzv. Minkowského funkcionál $p\colon X \to \mathbb{R}$ množiny $\mathcal{K}$ předpisem

$$p(x) := \inf\left\{\alpha > 0 : \frac{1}{\alpha}\, x \in \mathcal{K}\right\}$$

(viz obr. 1) a položíme

$$\varphi(x) := p(x)\,\frac{x}{\|x\|}\,, \quad x \in X \setminus \{o\}, \qquad \text{a} \quad \varphi(o) = o.$$

Potom $\varphi\colon \mathcal{K} \to \mathcal{B}^M \cap X$ je homeomorfismus. Protože však X s normou indukovanou normou v $\mathbb{R}^M$ je izomorfní s $\mathbb{R}^N$ (tj. existuje lineární homeomorfismus $\psi\colon X \to \mathbb{R}^N$), je $\mathcal{K}$ homeomorfní s $\mathcal{B}^N$. $\square$



Obr. 1. Hodnoty Minkowského funkcionálu.

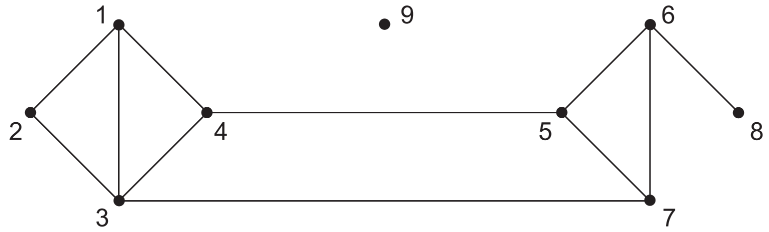
Z lemmatu 2.1 vyplývá, že tvrzení věty 1.1 stačí dokázat pouze pro jednu speciální množinu $\mathcal{K}_s$, která je homeomorfní s $\mathcal{B}^N$. Skutečně, je-li $\mathcal{K}$ jednoprvková množina, je tvrzení věty 1.1 triviální. Obsahuje-li $\mathcal{K}$ alespoň dva různé body, potom podle lemmatu 2.1 existuje homeomorfismus $\varphi\colon \mathcal{K} \to \mathcal{B}^N$. Označme $\varphi_s\colon \mathcal{K}_s \to \mathcal{B}^N$ homeomorfismus $\mathcal{K}_s$ na $\mathcal{B}^N$. Potom $x^* \in \mathcal{K}$ je pevným bodem zobrazení f právě tehdy, když $x_s^* = \varphi_s^{-1}\bigl(\varphi(x^*)\bigr)$ je pevným bodem zobrazení f_s (viz obr. 2).

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{K} \arrow[rr, "f"] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] & & \mathcal{K} \arrow[d, shift right, "\varphi"'] \\
\mathcal{B}^N \arrow[u, shift right, "\varphi^{-1}"'] \arrow[d, shift left, "\varphi_s^{-1}"] & & \mathcal{B}^N \arrow[u, shift right, "\varphi^{-1}"'] \arrow[d, shift left, "\varphi_s^{-1}"] \\
\mathcal{K}_s \arrow[u, shift left, "\varphi_s"] \arrow[rr, "f_s = \varphi_s^{-1} \circ \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi_s"] & & \mathcal{K}_s \arrow[u, shift left, "\varphi_s"]
\end{tikzcd}
$$

Obr. 2. Pevný bod f a f_s.

3. Základní vlastnosti rovinných grafů

Nechť G je konečný rovinný graf s množinou vrcholů V a množinou hran $H \subset \binom{V}{2}$. Symbolem $d(v)$ označíme stupeň vrcholu v, tj. počet hran vycházejících z vrcholu $v \in V$. Na obr. 3 máme $V = \{1, 2, \ldots, 9\}$, $d(1) = d(4) = d(5) = d(6) = d(7) = 3$, $d(2) = 2$, $d(3) = 4$, $d(8) = 1$, $d(9) = 0$.



Obr. 3. Rovinný graf.

Označme symbolem $|H|$ počet prvků množiny H.

Lemma 3.1. *Pro každý konečný rovinný graf G platí*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|H|. \tag{3.1}$$

Důkaz. Označme $S \subset V \times H$ množinu všech dvojic (v, h) takových, že $v \in V$ je jedním z vrcholů hrany $h \in H$. Počet prvků množiny S je na jedné straně roven $\sum_{v \in V} d(v)$, protože každý vrchol zde musí být započten $d(v)$-krát. Protože každá z hran má právě dva vrcholy, musí být počet prvků množiny S, na straně druhé, roven $2|H|$. Tím je důkaz (3.1) proveden. □

Vrchol $v \in V$ nazveme sudým (lichým) vrcholem, pokud jeho stupeň $d(v)$ je sudé (liché) číslo. Následující „pozorování" pro nás bude klíčové.

Lemma 3.2. *V každém konečném rovinném grafu G je počet jeho lichých vrcholů sudý.*

Důkaz. Označme V_s (V_l) množinu všech sudých (lichých) vrcholů grafu G. Potom $V = V_s \cup V_l$. Vztah (3.1) pak můžeme psát v ekvivalentním tvaru

$$\sum_{v \in V_l} d(v) = 2|H| - \sum_{v \in V_s} d(v).$$

Protože $\sum_{v \in V_s} d(v)$ je sudé číslo, musí být také $\sum_{v \in V_l} d(v)$ sudé číslo. Protože však pro $v \in V_l$ je $d(v)$ liché číslo, musí nutně být počet prvků množiny V_l číslo sudé. □

4. Spernerovo lemma[2])

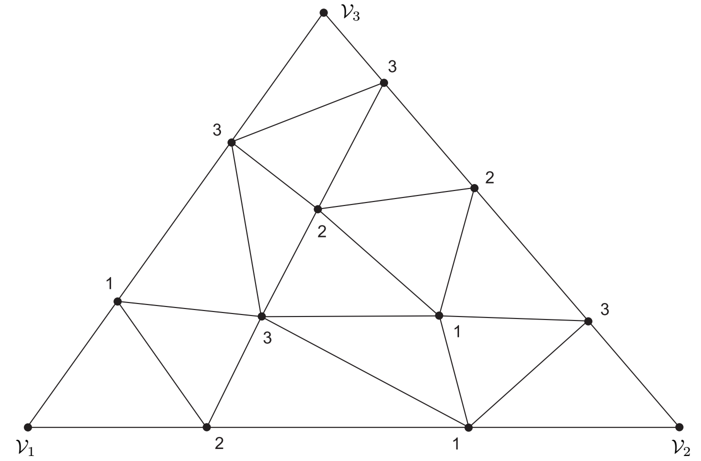
Uvažujme trojúhelník s vrcholy $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ a $\mathcal{V}_3$, který je triangulací $\mathcal{T}$ rozdělen na konečný počet menších trojúhelníků se společnými stranami a vrcholy. Všechny vrcholy jsou „obarveny" třemi různými barvami, které očíslujeme čísly 1, 2 a 3. Číslování není zcela libovolné, musí splňovat následující předpoklady:

[2]) Emanuel Sperner (1905–1980), německý matematik, podal důkaz uvedeného lemmatu v roce 1928 ve věku 23 let.

(i) vrchol $\mathcal{V}_i$ má barvu i ($i = 1, 2, 3$);

(ii) vrcholy menších trojúhelníků, které leží na straně $\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2$ ($\mathcal{V}_2\mathcal{V}_3$, $\mathcal{V}_3\mathcal{V}_1$) trojúhelníka $\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2\mathcal{V}_3$, jsou obarveny pouze barvami 1 a 2 (2 a 3, 1 a 3);

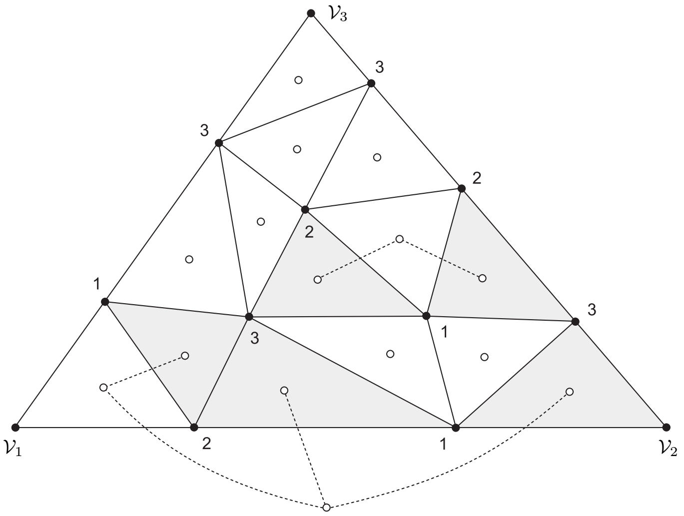
(iii) vrcholy menších trojúhelníků ležící uvnitř trojúhelníku $\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2\mathcal{V}_3$ jsou obarveny libovolně (viz obr. 4).



Obr. 4. Triangulace.

Lemma 4.1 (Spernerovo lemma v dimenzi 2). *Každá triangulace $\mathcal{T}$ splňující výše uvedené předpoklady obsahuje lichý počet malých trojúhelníků (tj. alespoň jeden), jejichž každý vrchol je obarven jinou barvou.*

Důkaz. Dané triangulaci $\mathcal{T}$ přiřadíme „duální" rovinný graf G, jehož vrcholy splývají s těžišti malých trojúhelníků a jehož dalším vrcholem je bod ležící vně trojúhelníka $\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2\mathcal{V}_3$. Vrcholy grafu G jsou spojeny hranou pouze v případě, kdy tato hrana protíná stranu malého trojúhelníka, jejíž vrcholy jsou obarveny barvami 1 a 2 (viz obr. 5). Stupně jednotlivých vrcholů grafu G jsou následující: stupeň 0 mají vrcholy, které leží v těžištích malých trojúhelníků, jejichž vrcholy nejsou obarveny alespoň jednou z barev 1 nebo 2; stupeň 1 má vrchol grafu G, který leží v těžišti malého trojúhelníka, jehož každý vrchol je obarven jinou barvou; stupeň 2 má vrchol grafu, který leží v těžišti malého trojúhelníka, jehož vrcholy jsou obarveny pouze barvami 1 a 2. Vrchol grafu G ležící vně trojúhelníka $\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2\mathcal{V}_3$ má lichý (tj. nenulový) stupeň, neboť podél strany $\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2$ je počet úseček s koncovými body obarvenými různými barvami 1 a 2 roven lichému číslu. Proto počet hran grafu G protínajících stranu $\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2$ je lichý, zatímco strany $\mathcal{V}_2\mathcal{V}_3$ a $\mathcal{V}_3\mathcal{V}_1$ neprotíná žádná hrana grafu G. Shrneme-li tyto úvahy, pak liché vrcholy grafu G jsou tvořeny jednak bodem ležícím vně trojúhelníka $\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2\mathcal{V}_3$, jednak potom všemi těžišti malých trojúhelníků, jejichž každý vrchol je obarven jinou barvou. Podle lemmatu 3.2 je počet těchto lichých vrcholů sudé číslo, které musí být různé od nuly. Proto počet malých trojúhelníků, jejichž každý vrchol je obarven jinou barvou, je liché číslo (viz obr. 5). $\square$



Obr. 5. Duální graf.

Poznámka 4.1. Tvrzení Spernerova lemmatu je možné zobecnit ze dvou dimenzí do libovolného konečného počtu dimenzí $N > 2$. Místo trojúhelníka $\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2\mathcal{V}_3$ uvažujeme $(N+1)$-stěn $\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2\ldots\mathcal{V}_{N+1}$, který „triangulací" rozdělíme na menší $(N+1)$-stěny, jejichž vrcholy jsou obarveny $N+1$ barvami: $1, 2, \ldots, N+1$. Čtenář jistě sám najde analogii předpokladů obarvení vrcholů tak, aby vzniklý duální graf G měl podobné vlastnosti jako v případě $N = 2$.

5. Důkaz Věty 1.1

Důkaz provedeme pro případ dimenze 2 a pro speciální množinu $\mathcal{K}_s$, která je rovnostranným trojúhelníkem s vrcholy v bodech $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$ a $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$. Jak vyplývá z odst. 2, bude tím tvrzení Brouwerovy věty dokázáno pro libovolnou množinu $\mathcal{K}$.

Nechť $f_s : \mathcal{K}_s \to \mathcal{K}_s$ je spojité zobrazení. Důkaz existence pevného bodu zobrazení f_s provedeme sporem. Předpokládejme tedy, že f_s nemá pevný bod v $\mathcal{K}_s$, tj. pro všechna $\boldsymbol{w} \in \mathcal{K}_s$ platí $\boldsymbol{w} \neq f_s(\boldsymbol{w})$.

Nechť $\mathcal{T}$ je libovolná triangulace trojúhelníka $\mathcal{K}_s$ a $\delta(\mathcal{T})$ je délka nejdelší ze stran malých trojúhelníků přináležejících triangulaci $\mathcal{T}$. Uvažujme nyní nekonečnou posloupnost triangulací $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, ... trojúhelníka $\mathcal{K}_s$, pro kterou platí $\delta(\mathcal{T}_k) \to 0$ $(k \to \infty)$. Čtenář si může snadno takovou posloupnost triangulací explicitně zkonstruovat. Pro každý vrchol $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ triangulace $\mathcal{T}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, definujeme obarvení barvami 1, 2 a 3 tak, že mu přiřadíme barvu $\lambda(\boldsymbol{v})$, kde

$$\lambda(\boldsymbol{v}) := \min\bigl\{i \in \{1, 2, 3\} : f_s(\boldsymbol{v})_i < v_i\bigr\}.$$

Jinými slovy, $\lambda(\boldsymbol{v})$ je nejmenší index i takový, že i-tá souřadnice bodu $f_s(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}$ je záporná.

Potom pro každý vrchol $\boldsymbol{v}$ je číslo $\lambda(\boldsymbol{v})$ korektně definované. Skutečně, každý bod $\boldsymbol{w} \in \mathcal{K}_s$ leží v rovině o rovnici $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, a tedy $\sum_{i=1}^{3} w_i = 1$. Když $f_s(\boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{v}$, jak plyne z našeho předpokladu, musí být vždy alespoň jedna ze souřadnic bodu $f_s(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}$ záporná (a alespoň jedna kladná).

Dále ukážeme, že toto obarvení splňuje předpoklady Spernerova lemmatu. Každý vrchol $\boldsymbol{e}_i$ trojúhelníka $\mathcal{K}_s$ je obarven barvou i, neboť jediná souřadnice bodu $f_s(\boldsymbol{e}_i) - \boldsymbol{e}_i$, která může být záporná, je právě souřadnice i-tá. Pokud vrchol $\boldsymbol{v}$ leží na straně $\mathcal{K}_s$ protilehlé k $\boldsymbol{e}_i$, platí $v_i = 0$, tj. i-tá komponenta bodu $f_s(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}$ nemůže být záporná. Takový vrchol tedy nemůže být obarven barvou i.

Z Lemmatu 4.1 nyní plyne, že v každé triangulaci $\mathcal{T}_k$ existuje alespoň jeden trojúhelník $\boldsymbol{v}^{k,1}\boldsymbol{v}^{k,2}\boldsymbol{v}^{k,3}$ takový, že $\lambda(\boldsymbol{v}^{k,i}) = i$, $i = 1, 2, 3$. Přestože posloupnost vrcholů $\{\boldsymbol{v}^{k,1}\}_{k=1}^{\infty}$ sama konvergovat nemusí, z kompaktnosti $\mathcal{K}_s$[3]) plyne, že existuje její podposloupnost a bod $\boldsymbol{w} \in \mathcal{K}_s$ takový, že tato podposloupnost konverguje k bodu $\boldsymbol{w}$. Abychom nekomplikovali značení, budeme tuto podposloupnost značit opět $\{\boldsymbol{v}^{k,1}\}_{k=1}^{\infty}$. Protože vzdálenosti $\boldsymbol{v}^{k,2}$ od $\boldsymbol{v}^{k,1}$ a $\boldsymbol{v}^{k,3}$ od $\boldsymbol{v}^{k,1}$ jsou nanejvýše rovny $\delta(\mathcal{T}_k)$ a $\delta(\mathcal{T}_k) \to 0$ $(k \to \infty)$, konvergují také posloupnosti $\{\boldsymbol{v}^{k,2}\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{\boldsymbol{v}^{k,3}\}_{k=1}^{\infty}$ k témuž bodu $\boldsymbol{w}$.

Teprve nyní vstoupí do hry spojitost zobrazení f_s a ke sporu dojdeme tak, že prověříme, jaké jsou souřadnice bodu $f_s(\boldsymbol{w})$. Podle definice obarvení je první souřadnice bodu $f_s(\boldsymbol{v}^{k,1})$ menší než první souřadnice bodu $\boldsymbol{v}^{k,1}$ pro všechna $k = 1, 2, \ldots$ Ze spojitosti f_s pak plyne, že první souřadnice bodu $f_s(\boldsymbol{w})$ musí být menší nebo rovná první souřadnici bodu $\boldsymbol{w}$. Totéž pak platí pro druhou i třetí souřadnici. Odtud plyne, že žádná ze souřadnic bodu $f_s(\boldsymbol{w}) - \boldsymbol{w}$ není kladná, což (jak již bylo ukázáno) odporuje předpokladu $f_s(\boldsymbol{w}) \neq \boldsymbol{w}$.

Poznámka 5.1. Ve světle poznámky 4.1 můžeme důkaz provést také v libovolné konečné dimenzi $N > 2$. Takový důkaz je technicky náročnější a méně názorný, jeho princip však je stejný. Čtenář, který se o danou problematiku zajímá, jistě bude schopen všechny kroky důkazu pro libovolnou konečnou dimenzi provést samostatně.

Poděkování. Autor článku je podporován výzkumným záměrem č. MSM 4977751301.

Literatura

[1] Aigner, M., Ziegler, G. M.: *Proofs from the BOOK. Second Edition.* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 2002.

[2] Drábek, P., Milota, J.: *Methods of Nonlinear Analysis.* Springer Verlag, Berlin--Heidelberg-New York 2006.

[3]) K_s je uzavřená a omezená množina v konečné dimenzi, a tedy množina kompaktní. Z každé nekonečné posloupnosti ležící v takové kompaktní množině lze vybrat konvergentní podposloupnost.