Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Michal Křížek; Florian Luca; Lawrence Somer
Aritmetické vlastnosti Fibonacciových čísel

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 50 (2005), No. 2, 127–140

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141261

Aritmetické vlastnosti Fibonacciových čísel

Věnováno doc. RNDr. Emilu Caldovi, CSc., k jeho 70. narozeninám.

Michal Křížek, Praha, Florian Luca, Morelia, a Lawrence Somer, Washington

Úvod

Posloupnost Fibonacciových čísel $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ začíná hodnotami $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$ a splňuje rekurenci

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad \text{pro všechna } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Několik jejích prvních členů je tedy

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ 987,\ \ldots$$

Tato čísla se poprvé objevila ve druhém[1]), rozšířeném vydání knihy *Liber Abaci* z r. 1228 italského matematika Fibonacciho[2]) a nesou proto jeho jméno.[3])

Ve 12. kapitole jmenované knihy (srov. [38, s. 404]) se vyšetřuje úloha, jak rychle se mohou množit králíci za jistých velice specifických a idealizovaných podmínek. Předpokládejme, že jeden nově narozený pár je umístěn do prázdného výběhu, králíci se mohou pářit již po měsíci, doba březosti je také 1 měsíc, každá samice porodí každý měsíc právě jeden pár a konečně že králíci neumírají. V rovnici (1) pak F_n značí počet králičích párů v ohrádce v n-tém měsíci. První, kdo napsal rekurenci (1) pro Fibonacciova čísla, byl Albert Girard (1595–1632), a tedy nikoli Fibonacci.

Bylo by obtížné vyjmenovat všechny aktivity, které zájem o Fibonacciova čísla vyvolal. Omezíme se jen na konstatování, že existuje specializovaný časopis *The Fibonacci Quarterly* vycházející čtyřikrát ročně a také společnost *Fibonacci Association*, jež

[1]) První vydání je z r. 1202.

[2]) Leonardo z Pisy (cca 1170–1250), nazývaný Fibonacci, tj. syn Bonacciho, byl jedním z největších matematiků středověku.

[3]) Poprvé je nazval Fibonacciovými čísly Édouard Lucas ve druhé polovině 19. století.

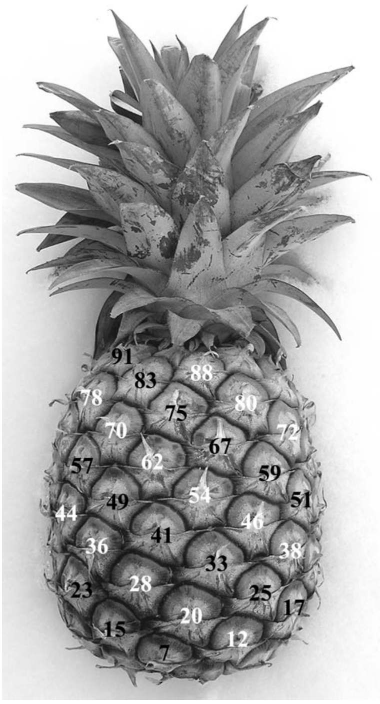
Prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc. (1952), Matematický ústav Akademie věd ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: krizek@math.cas.cz; Dr. Florian Luca (1969), Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, C. P. 58180, Morelia, Michoacán, México, e-mail: fluca@matmor.unam.mx; Prof. Dr. Lawrence Somer (1948), Mathematics Department, Catholic University of America, Cardinal Station, Washington D. C., 20064, USA, e-mail: somer@cua.edu

pořádá mezinárodní konference každé dva roky. O Fibonacciových číslech byla napsána celá řada monografií (viz např. [17], [18], [21], [41], [42]).

V tomto článku podáme stručný přehled o zajímavých vlastnostech Fibonacciových čísel, o zcela nových výsledcích i otevřených problémech. Uvidíme, že Fibonacciova čísla se objevují v některých naprosto nečekaných souvislostech.

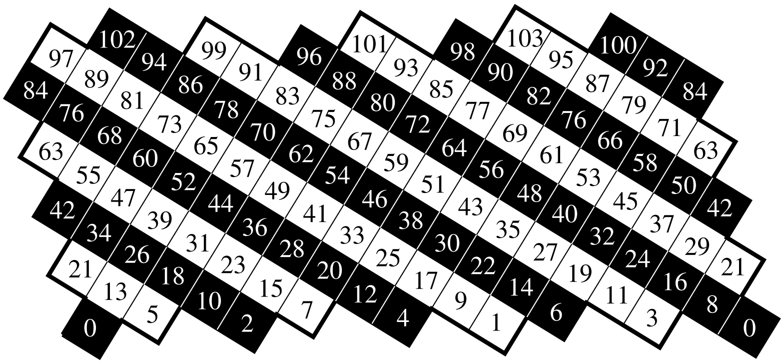
Příklad 1 (viz [21, s. 32]). Vydělíme-li postupně atomová čísla vzácných plynů ($_2$He, $_{10}$Ne, $_{18}$Ar, $_{36}$Kr, $_{54}$Xe, $_{86}$Rn) osmnácti, pak po zaokrouhlení na celá čísla dostaneme posloupnost 0, 1, 1, 2, 3, 5.

Příklad 2. Také v biologii se setkáváme s častým výskytem Fibonacciových čísel. Např. semínka smrkových či borovicových šišek jsou narovnána do dvou typů (pravotočivých a levotočivých) spirál, jejichž počty jsou obvykle v poměru 13 : 8. Podobné spirály lze spatřit také u artyčoků nebo ananasů. Na obr. 1 vidíme, že spirály na povrchu ananasu jsou tvořeny útvary, které vzdáleně připomínají kosodélníky. Obr. 2 pak schematicky znázorňuje rozvinutý povrch tohoto ananasu. Kosodélníky lze očíslovat tak, že čísla na jednotlivých spirálách tvoří aritmetické posloupnosti s diferencemi 8 a 13. Čísla kosodélníků, které se dotýkají právě jedním vrcholem, mají zase diferenci rovnou 5 nebo 21 (v absolutní hodnotě). Je pozoruhodné, že zhruba každý druhý ananas má spirály na svém povrchu umístěny zrcadlově, tj. má 13 levotočivých a 8 pravotočivých spirál. Další ukázky výskytu Fibonacciových čísel v přírodě lze nalézt např. v [21].[4])



Obr. 1. Soustavy pravotočivých a levotočivých spirál na povrchu ananasu.

[4]) Fibonacciova čísla jsou tak populární, že ve finském Turku připevnili na vysoký elektrárenský komín pod sebe 2 m vysoká neonová Fibonacciova čísla od 1 až do 55.



Obr. 2. Osm levotočivých spirál na rozvinutém plášti ananasu je pro rozlišení obarveno střídavě černě a bíle. Přibližně kolmo na tento směr je třináct pravotočivých spirál. (Pravý a levý okraj nákresu je třeba ztotožnit.)

Příklad 3. V roce 1876 francouzský matematik Édouard Lucas odvodil formuli

$$\sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n-i}{i} = F_{n+1},$$

která udává, jak jsou Fibonacciho čísla ukryta v Pascalově trojúhelníku.[5]) Zapíšeme tento trojúhelník tak, jak je znázorněno na obr. 3. Je patrno, že součty kombinačních čísel podle diagonál se sklonem cca 45° jsou rovny právě číslům F_{n+1} (viz např. [7]).

$$\begin{array}{ccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Obr. 3. Pascalův trojúhelník ve zkoseném tvaru.

Příklad 4. Lze dokázat, že počet podmnožin množiny $A = \{1, 2, \dots, n\}$, které neobsahují dvě po sobě následující čísla, je F_{n+2}. Např. pro $n = 4$ jsou to podmnožiny $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$ a $\{2, 4\}$.

Rovněž počet možností, kdy při n hodech mincí za sebou nepadnou dvě panny, je F_{n+2}. Např. pro $n = 4$ jsou to možnosti (O, O, O, O), (P, O, O, O), (O, P, O, O), (O, O, P, O), (O, O, O, P), (P, O, P, O), (P, O, O, P) a (O, P, O, P), kde O značí orla a P pannu. To, že v obou případech dostáváme stejný počet možností, plyne z násle-

[5]) Poněkud odlišným způsobem jsou skryta v Pascalově trojúhelníku také Fermatova čísla — viz [22, s. 35] nebo PMFA *46* (2001), s. 182.

dujícího přiřazení. Nechť B je podmnožina A, která neobsahuje dvě po sobě následující čísla. Pak odpovídající n-tice složená z O a P má na i-tém místě P, právě když $i \in B$.

Příklad 5. Fibonacciovu úlohu s králíky lze ekvivalentně formulovat takto: Uvažujeme posloupnost řetězců tvořených číslicemi 0 a 1, které jsou definovány rekurentně takto: číslici 0 zaměníme v následujícím řetězci za 1 (tj. nově narozený králičí pár dospěje) a číslici 1 zaměníme za 10 (tj. dospělému páru se narodí jeden nový pár). Pokud začneme od jedničky, dostaneme tuto posloupnost řetězců:

$$\begin{aligned}
&1,\\
&10,\\
&101,\\
&10110,\\
&10110101,\\
&1011010110110,\\
&101101011011010110101,\\
&\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}$$

Lze dokázat, že délka n-tého řetězce je rovna F_{n+1} pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ a že n-tý řetěz pro $n > 2$ vznikne spojením dvou předchozích řetězců v opačném pořadí, tj. n-tý řetěz začíná vždy předchozím řetězcem. Tímto způsobem můžeme zkonstruovat nekonečnou posloupnost nul a jedniček

$$1011010110110101101011011010110110\ldots, \tag{2}$$

která se nazývá *zlatý řetězec.* Posloupnost (2) má fraktální charakter. Libovolný její konečný podřetězec se v ní totiž vyskytuje nekonečněkrát, i když posloupnost (2) není periodická.

Fibonacciova čísla jsou „ukryta“ i v Mandelbrotově fraktální množině (viz [23]).

Zlatý řez a Lucasova čísla

Označme

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{a} \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{3}$$

kořeny charakteristické rovnice[6])

$$x^2 - x - 1 = 0$$

odpovídající diferenční rovnici (1). Číslo α se nazývá *zlatý řez.* Konstanty α a $\beta = -1/\alpha$ hrají důležitou úlohu při analýze Fibonacciových čísel díky vztahu

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \qquad \text{pro všechna} \ \ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

[6]) Řešení lineárních diferenčních rovnic k-tého řádu je popsáno např. v [15, s. 213].

který se nazývá *Binetova formule.*[7]) Povšimněte si, že (4) dává ve výsledku pouze přirozená čísla, i když obsahuje několik iracionálních čísel. Ze vztahu (4) navíc plyne, že F_n je nejbližší celé číslo k číslu $\alpha^n/\sqrt{5}$.

K posloupnosti F_n existuje důležitá (též celočíselná) doprovodná posloupnost

$$L_n = \alpha^n + \beta^n = \alpha^n + (-1)^n\alpha^{-n} \qquad \text{pro všechna } n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

která se nazývá *Lucasova posloupnost.* Její prvky, tzv. *Lucasova čísla*, splňují také rovnost (1), pokud zaměníme F_n za L_n, tj.

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \qquad \text{pro všechna } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

s počátečními hodnotami $L_0 = 2$ a $L_1 = 1$. Několik jejích prvních členů je

$$2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ 76,\ \ldots$$

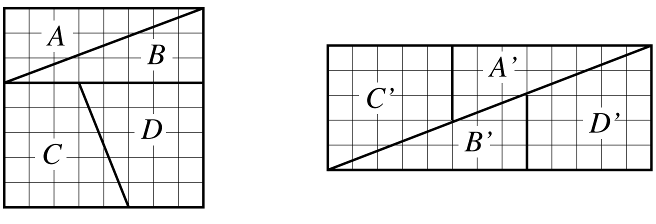
Jak souvisí zobecněná Lucasova čísla s teorií chaosu, je popsáno v [22, s. 182].

Rovnosti obsahující Fibonacciova a Lucasova čísla

V roce 1680 francouzský matematik a astronom italského původu Giovanni Domenico Cassini zjistil, že (viz [21, s. 74])

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n. \tag{7}$$

Tato identita pro $n = 6$ je základem známého geometrického paradoxu z obrázku 4.



Obr. 4. Čtverec 8×8 a obdélník 13×5, jež mají různé obsahy, jsou rozděleny na oblasti A, B, C, D a A', B', C', D', které po řadě mají zdánlivě stejné obsahy.

[7]) Tuto formuli publikoval již v roce 1765 Leonhard Euler. V roce 1843 ji znovu objevil francouzský matematik Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856).

Ze vztahů (1), (4), (5) a (6) můžeme odvodit řadu zajímavých identit:

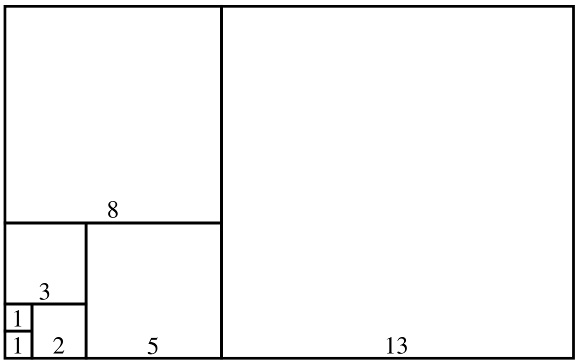
$$
\begin{aligned}
F_{n+1} + F_{n-1} &= L_n, \\
L_{n+1} + L_{n-1} &= 5F_n, \\
F_n^2 - F_{n+k}F_{n-k} &= (-1)^{n+k}F_k^2, \\
L_n^2 - L_{n+1}L_{n-1} &= (-1)^n 5, \\
L_n^2 - 5F_n^2 &= (-1)^n 4, \\
F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_n L_n &= F_{2n}, \\
F_{n+1}^2 + F_n^2 &= F_{2n+1}, \\
F_m F_{n+1} + F_{m-1}F_n &= F_{m+n}.
\end{aligned}
$$

Rovnosti na posledních třech řádcích lze rekurentně použít pro výpočet Fibonacciových čísel s velkými indexy. Pomocí matematické indukce z nich lze též odvodit další elegantní vztah

$$
\begin{pmatrix} F_{n+1}, & F_n \\ F_n, & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}^n, \quad n = 1, 2, \ldots .
$$

Povšimněte si, že (7) vlastně vyjadřuje rovnost determinantů těchto matic. Více než stovku podobných vztahů mezi Fibonacciovými a Lucasovými čísly lze nalézt v [17], [21] a [41]. Uveďme ještě některé z nich (viz též obr. 5):

$$
\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1, \qquad \prod_{i=0}^{n-1} L_{2^i} = F_{2^n}, \qquad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_i = F_{2n}.
$$



Obr. 5. Geometrická interpretace vztahu $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$.

Slavný ruský matematik Jurij Matijasevič [33, s. 40] pomocí Fibonacciových čísel negativně rozřešil desátý Hilbertův problém, který se týká řešitelnosti diofantických rovnic pomocí konečného počtu aritmetických operací (viz [20], [32]). V roce 1985 odvodil další překvapivý vztah (viz [34])

$$
\pi = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{6 \ln(F_1 F_2 \cdots F_n)}{\ln[F_1, F_2, \ldots, F_n]}},
$$

kde $[F_1, F_2, \ldots, F_n]$ označuje nejmenší společný násobek Fibonacciových čísel.

James P. Jones v [19] dokázal, že množina všech kladných Fibonacciových čísel je totožná s množinou všech kladných hodnot následujícího polynomu pátého stupně ve dvou celočíselných proměnných:

$$p(x, y) = -x^4y - 2x^3y^2 + x^2y^3 + 2xy^4 - y^5 + 2y.$$

Např. $p(1, 1) = 1$, $p(2, 3) = 3$, $p(8, 13) = 13$.

Ze vztahů (4) a (5) lze snadno dokázat, že platí

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n}\,. \tag{8}$$

Zlatý řez α má celou řadu důležitých aplikací, např. jej lze použít k minimalizaci počtu kroků při hledání minima spojité a obecně nediferencovatelné reálné funkce (golden section search algorithm). Použití Fibonacciových čísel v teorii her, v genetice, v hudbě[8]), pro třídicí algoritmy (angl. Fibonacci sorting algorithm), pro problém bankovních depozitů, pro řešení speciálních elektrických obvodů aj. lze nalézt např. v [16], [17], [21], [39].

Nejkrásnější vlastnosti Fibonacciových a Lucasových čísel

Na prvním místě uveďme Zeckendorfovu větu o úplnosti.

Věta. *Každé přirozené číslo lze jednoznačně vyjádřit jako součet různých Fibonacciových čísel F_i pro $i \geqq 2$ tak, že žádné dva indexy i po sobě nenásledují.*

Její důkaz je uveden v [3]. Na základě Zeckendorfovy věty můžeme tedy každé přirozené číslo napsat jako sumu Fibonacciových čísel. To, že neobsahuje dvě po sobě následující Fibonacciova čísla, lze splnit díky vztahu (1). Budeme-li pro přirozené n psát 10^{n-2} místo F_n, pak všem celým nezáporným číslům můžeme přiřadit následující řetězce složené z nul a jedniček

$$\begin{gathered}0 \mapsto \underline{0}, \quad 1 \mapsto \underline{1}, \quad 2 \mapsto 1\underline{0}, \quad 3 \mapsto 10\underline{0}, \quad 4 = 3 + 1 \mapsto 10\underline{1}, \quad 5 \mapsto 100\underline{0},\\ 6 = 5 + 1 \mapsto 100\underline{1}, \quad 7 = 5 + 2 \mapsto 101\underline{0}, \quad 8 \mapsto 1000\underline{0}, \quad 9 = 8 + 1 \mapsto 1000\underline{1},\\ 10 = 8 + 2 \mapsto 1001\underline{0}, \quad 11 = 8 + 3 \mapsto 1010\underline{0}, \quad 12 = 8 + 3 + 1 \mapsto 1010\underline{1}, \quad \ldots\end{gathered}$$

Všimněte si, že z posledních cifer (jsou podtržené) lze sestavit řetězec, který je inverzní ke zlatému řetězci (2), tj. nuly a jedničky jsou prohozené. Není to malý zázrak?

Věta. *Každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet různých Lucasových čísel L_i pro $i \geqq 0$.*

Důkaz je uveden např. v [17, s. 73]. Není těžké ukázat (viz [21, s. 136], [42, s. 57]), že každá dvě po sobě následující Fibonacciova čísla jsou nesoudělná, tj. $(F_{n+1}, F_n) = 1$, kde $(\cdot, \cdot)$ označuje největšího společného dělitele.

[8]) Např. chromatická stupnice na klavíru má 13 kláves, z toho 8 bílých a $2 + 3 = 5$ černých.

Věta. *Pro libovolná přirozená čísla m a n platí*

$$\begin{gathered}(F_m, F_n) = F_{(m,n)},\\ F_m \mid F_n \iff m \mid n\end{gathered} \tag{9}$$

a

$$L_m \mid L_n \iff \exists k \in \{1, 2, \ldots\}\colon\ m = (2k-1)n, \quad n > 1.$$

Důkazy jednotlivých tvrzení lze najít např. v [17, s. 39–40], [21, s. 198–200], [42, s. 51–58] (symbol $m \mid n$ znamená, že m dělí n).

Věta. *Číslo F_{mn} je dělitelné $F_m F_n$, právě když $(m, n) = 1, 2$ nebo 5.*

Věta. *Nechť $m > 1$ a $n > 1$. Pak je číslo L_{mn} dělitelné $L_m L_n$, právě když m a n jsou lichá nesoudělná čísla.*

Důkazy předchozích dvou vět lze najít v [18, s. 1 a 3]. Další zajímavá věta je uvedena v [21, s. 422]:

Věta. *Jestliže $p \geqq 5$ je prvočíslo, pak $F_{p^2} \equiv p^2 \pmod{100}$, tj. dvě poslední cifry čísel p^2 a F_{p^2} jsou stejné.*

Následující věta pochází od francouzského matematika Gabriela Lamého (1795 až 1870), viz [21, s. 138–140].

Věta. *Nechť $2 \leqq k \leqq m$. Pak Eukleidův algoritmus pro (k, m) nepotřebuje více kroků, než je pětinásobek počtu cifer k. Dále platí, že $k \geqq F_{n+1}$ a $m \geqq F_{n+2}$, pokud Eukleidův algoritmus spotřebuje n kroků.*

Eukleidův algoritmus pro výpočet největšího společného dělitele spotřebuje nejvíce kroků, jestliže k a m jsou dvě po sobě následující Fibonacciova čísla. Je-li tedy $n \geqq 2$, pak pro určení (F_{n+1}, F_{n+2}) je zapotřebí právě n dělení (srov. obr. 5).

Na závěr tohoto odstavce uveďme ještě větu J. H. Haltona. Důkaz, který pro ukázku předvedeme, je podstatně jednodušší než původní Haltonův důkaz z [14].

Věta. *Nechť $n \geqq m$ a nechť r je zbytek při dělení F_n číslem F_m. Pak buď r, nebo $F_m - r$ je Fibonacciovo číslo.*

Důkaz. Podle (4)

$$\begin{aligned}F_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \\ &= \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}(\alpha^{n-m} + \beta^{n-m}) - (\alpha\beta)^{\min(m,n-m)} \frac{\alpha^{|n-2m|} - \beta^{|n-2m|}}{\alpha - \beta} = \\ &= F_m L_{n-m} - (-1)^{\min(m,n-m)} F_{|n-2m|}.\end{aligned}$$

Jestliže $|n - 2m| < m$, potom $r = F_{|n-2m|}$ nebo $F_m - r = F_{|n-2m|}$. Pokud $|n - 2m| \geqq m$, pak dělíme $F_{|n-2m|}$ číslem F_m a pokračujeme tak dlouho, až bude zbytek menší než F_m. □

Prvočinitelé Fibonacciových a Lucasových čísel

Fibonacciova čísla 2, 3, 5, 13, 89, 233, 1597 aj. jsou prvočísla. Dodnes ovšem není známo, zda je jich nekonečně mnoho. Také Lucasova čísla 3, 7, 11, 29, 47, 199, 521 aj. jsou prvočísla a nevíme, zda jich je nekonečně mnoho. Protože platí ekvivalence (9), každé prvočíslo F_n s $n > 4$ musí mít index n prvočíselný. Naproti tomu $F_{19} = 37 \cdot 113$ je číslo složené, i když má prvočíselný index. Tabulky všech prvočinitelů Fibonacciových a Lucasových čísel pro $n \leqq 385$ jsou obsaženy např. v [18]. Zajímavý objev učinil J. M. Zerger. Všiml si, že součin prvních sedmi prvočísel je roven

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 = F_7 F_8 F_9 F_{10}.$$

Prvočinitel p čísla F_n se nazývá *primitivní*, jestliže p nedělí F_m pro žádné přirozené $m < n$. Například $F_{12} = 144 = 2^4 \cdot 3^2$ nemá žádného primitivního prvočinitele, protože $2 \mid F_3$ a $3 \mid F_4$.

V roce 1913 Robert Daniel Carmichael (viz [8]) dokázal velmi silnou větu, která tvrdí, že F_n má alespoň jednoho primitivního prvočinitele pro všechna $n > 12$. Poznamenejme ještě, že primitivní prvočinitelé musí být poměrně velcí. Jestliže totiž $p \neq 5$ je primitivní prvočinitel F_n, pak $p \equiv 1 \pmod{n}$ pro $p \equiv 1, 4 \pmod{5}$ a $p \equiv -1 \pmod{n}$ pro $p \equiv 2, 3 \pmod{5}$. Tedy $p \geqq n - 1$.

Lze dokázat, že pro libovolné přirozené číslo n existuje index k takový, že $n \mid F_k$. Označme $z(n)$ nejmenší přirozené číslo k takové, že $n \mid F_k$. Číslo $z(n)$ nazveme *hodností* (angl. rank of apparition) čísla n. Je známo, že $n \mid F_m$ právě tehdy, když $z(n) \mid m$. Jestliže tedy p je prvočíslo, pak p je primitivní prvočinitel pro $F_{z(p)}$. Hodnosti se intenzivně studovaly už před 40 lety. Alfred Brousseau v [4] sestavil jejich obsáhlé tabulky, i když možnosti výpočetní techniky byly tehdy dosti omezené.

D. D. Wall (viz [43]) vyslovil domněnku, že $z(p) \neq z(p^2)$ platí pro každé prvočíslo p. Ekvivalentně můžeme říci, že p^2 nedělí $F_{z(p)}$ pro žádné prvočíslo p. V roce 1982 H. C. Williams [44] ověřil platnost této hypotézy pro všechna prvočísla menší než 10^9. Pokud by bylo známo, že existuje nekonečně mnoho Fibonacciových čísel, která nejsou dělitelná čtvercem přirozeného čísla většího než 1, pak by existovalo nekonečně mnoho prvočísel p splňujících Wallovu domněnku.

V. Drobot v [9] dokázal pozoruhodnou souvislost Fibonacciových čísel s prvočísly p, pro něž $2p - 1$ je také prvočíslo. Je-li $p \equiv 2, 4 \pmod{5}$ takové prvočíslo, pak $2p - 1 \mid F_p$, a tedy F_p není prvočíslo.

Nechť $\omega(n)$ označuje počet různých prvočinitelů přirozeného čísla $n > 1$. V [5] je ukázáno, že pro každé $\varepsilon > 0$ platí nerovnost

$$\omega(F_n) > (\ln n)^{\ln 2 - \varepsilon}$$

pro téměř všechna přirozená čísla n, tj. pokud $\mathcal{N}$ je podmnožinou všech přirozených čísel, pro něž výše uvedená nerovnost neplatí, pak

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\operatorname{card}(\mathcal{N} \cap [1, m])}{m} = 0,$$

kde card značí počet prvků.

Wayne McDaniel [35] odvodil, že pro $n > 48$ má F_n vždy alespoň jednoho prvočinitele tvaru $p \equiv 1 \pmod 4$. Odtud mj. plyne, že všechna Fibonacciova prvočísla kromě 2 a 3 mají také tento tvar. Pravděpodobnost, že F_n má prvočinitele tvaru $p \equiv 3 \pmod 4$, je právě $\frac{1}{2}$ (viz [28]).

Na závěr tohoto odstavce se ještě zmíníme o prvočinitelích Lucasových čísel. Pokud bychom pro Lucasovu posloupnost chtěli definovat obdobu hodnosti n jako nejmenší přirozené číslo k takové, že $n \mid L_k$, pak je třeba poznamenat, že takové číslo nemusí vždy existovat. Zajímavý Lagariasův výsledek [24] říká, že *hustota* množiny prvočinitelů Lucasových čísel je jen $\frac{2}{3}$. To znamená, že pokud označíme $\mathcal{P}$ množinu všech prvočísel, která dělí nějaké L_n, pak

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\operatorname{card}(\mathcal{P} \cap [1, m])}{\pi(m)} = \frac{2}{3},$$

kde $\pi(m)$ označuje počet prvočísel p, pro něž $p \leqq m$.

Vlastnosti cifer Fibonacciových a Lucasových čísel

C. L. Stewart se v článku [40] zabývá otázkou složitosti vyjádření F_n v libovolné číselné soustavě o základu $b > 1$ pro vzrůstající n. Nechť $s_b(m)$ označuje součet cifer přirozeného čísla m v soustavě o základu b. Pak pro každé $b > 1$ existuje konstanta $c = c(b)$ taková, že pokud $n > 15$, pak

$$s_b(F_n) > c \, \frac{\ln n}{\ln \ln n}.$$

Připomeňme ještě, že přirozené číslo m se nazývá *palindromem v číselné soustavě o základu b*, jestliže řetězec jeho cifer je stejný, když se čte zleva doprava jako zprava doleva. Například $F_{10} = 55$, $L_5 = 11$ a $L_{25} = 167761$ jsou palindromy v desítkové soustavě.[9]) Označíme-li $\mathcal{P}_b$ množinu přirozených čísel n, pro něž F_n nebo L_n je palindrom v soustavě o základu $b > 1$, pak asymptotická hustota množiny $\mathcal{P}_b$ je nula (viz [29]). Tento výsledek ale není tak silný, aby z něj šlo odvodit, že suma převrácených hodnot prvků z $\mathcal{P}_b$ je konvergentní.

Řady obsahující Fibonacciova a Lucasova čísla

I. J. Good ve své práci [13] z roku 1974 zjistil, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^n}} = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}.$$

[9]) Snad nejznámějším palindromem v českých zemích je číslo 135797531, které je spojeno s položením základního kamene pro Karlův most v roce 1357 juliánského kalendáře dne 9. 7. v 5 hodin a 31 minut.

Toto iracionální číslo je algebraické, neboť je kořenem polynomu s celočíselnými koeficienty. P. Erdős a R. L. Graham si pak v monografii [12, s. 64] kladou otázku, zda sumy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^n+1}} \qquad \text{a} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{L_{2^n}}$$

jsou iracionální čísla. O sedm let později ji kladně zodpověděl C. Badea (viz [2]).

Bylo by obtížné připomenout všechny řady obsahující Fibonacciova čísla, o nichž je známo, že jsou transcendentní. Omezíme se proto jen na několik ilustrativních příkladů:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{n2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nF_{2^n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{F_{2^n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!F_{2^n}}.$$

Důkazy těchto výsledků však vyžadují velice obtížnou techniku z teorie transcendentních čísel. Erdős a Graham [12] se také táží, zda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$$

je iracionální číslo. Poprvé to ukázal R. André-Jeannin [1] pomocí Padéových aproximací, ale jeho důkaz nebyl zdaleka jednoduchý. Elementární důkaz podal později D. Duverney [11].

Pro β z (3) a všechna komplexní čísla z taková, že $|z| < |\beta|$, je splněna rovnost (viz [39, s. 225])

$$\sum_{i=1}^{\infty} F_i z^i = \frac{z}{1-z-z^2}. \tag{10}$$

Racionální funkce na pravé straně (10) se nazývá *vytvořující funkce* Fibonacciovy posloupnosti. Speciálně pro $z = \frac{1}{2}$ mocninná řada v (10) konverguje a platí

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i}{2^i} = 2.$$

Diofantické rovnice

Existuje několik prací, které studují, jak vyjádřit Fibonacciova čísla ve tvaru $P(x)$, kde P je polynom alespoň druhého stupně s racionálními koeficienty a x je celé číslo. Většina diofantických rovnic $F_n = P(x)$ má pouze konečně mnoho celočíselných řešení (n, x), i když existují také výjimky. Např. pro $n = 3m$ a m liché platí rovnost

$$F_n = F_{3m} = F_m(5F_m^2 - 3).$$

Speciálně pro $P(x) = x(5x^2 - 3)$ má diofantická rovnice $F_n = P(x)$ nekonečně mnoho celočíselných řešení (n, x), a sice $(n, x) = (3m, F_m)$ pro m liché. Ve skutečnosti pro $n = km$ máme

$$F_n = F_{km} = P_{k,i}(F_m), \qquad i \in \{0, 1\}, \tag{11}$$

kde $P_{k,0}$ a $P_{k,1}$ jsou dva polynomy s racionálními koeficienty stupně k, a vztah (11) platí, když $m \equiv i \pmod 2$. Nemes a Pethő v práci [37] ukazují, že tyto polynomy jsou v zásadě jedinou výjimkou.

Největší přirozené číslo n takové, že $F_n = x(x+1)/2$ pro nějaké celé x, je $n = 10$ (viz [31]). Jinými slovy, $F_{10} = 55$ je největší Fibonacciovo trojúhelníkové číslo. Největší přirozené číslo n takové, že $F_n = x^2$ pro nějaké celé x, je $n = 12$ (viz [26]). Je tedy přirozené se ptát, jaké jsou všechny mocniny ve Fibonacciově posloupnosti. Samozřejmě stačí uvažovat jen prvočíselné exponenty. Vznikla domněnka, že $F_{12} = 144$ je největší taková mocnina. H. London a R. Finkelstein [27] ji dokázali pro exponent 3 a J. McLaughlin [36] pro exponenty 5, 7, 11, 13 a 17. V roce 2004 byla nakonec domněnka dokázána pro všechny exponenty (viz [6]).

Fibonacciova čísla se objevují zcela nečekaně při řešení některých diofantických rovnic. Ilustrujme to na následující úloze. *Diofantická čtveřice* je množina čtyř racionálních čísel takových, že součin libovolných dvou čísel z této čtveřice zvětšený o jedničku je čtvercem racionálního čísla. Diofantos z Alexandrie jednu takovou čtveřici nalezl $\{\frac{1}{16}, \frac{33}{16}, \frac{68}{16}, \frac{105}{16}\}$. První, kdo zkonstruoval podobné řešení s celočíselnými hodnotami $\{1, 3, 8, 120\}$, byl Pierre de Fermat. Skutečnost, že první tři členy této čtveřice jsou Fibonacciova čísla, umožnila odhalit obecnější řešení. Pro $k \geqq 1$ je

$$\{F_{2k},\ F_{2k+2},\ F_{2k+4},\ 4F_{2k+1}F_{2k+2}F_{2k+3}\}$$

vždy diofantickou čtveřicí. Je-li totiž x takové, že $xF_i + 1$ je čtverec pro všechna $i \in \{2k,\ 2k+2,\ 2k+4\}$, pak $x = 4F_{2k+1}F_{2k+2}F_{2k+3}$ (viz [10]).

D. A. Lind [25] hledal řešení diofantické rovnice pro binomické koeficienty

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k+1} \tag{12}$$

a překvapivě našel nekonečnou třídu řešení $(n, k) = (F_{2i+2}F_{2i+3},\ F_{2i}F_{2i+3})$ pro $i = 0, 1, \ldots$. Existuje domněnka, že diofantická rovnice

$$\binom{n}{k} = \binom{m}{\ell} \qquad \text{pro} \ \ n > m,\ \ k \leqq n/2,\ \ \ell \leqq m/2$$

má jen konečně mnoho celočíselných řešení (n, k, m, ℓ) kromě těch, která tvoří nekonečnou třídu řešení rovnice (12) ve Fibonacciových číslech.

Na závěr se zmíníme o Fibonacciových číslech dalších tvarů. V článku [30] je dokázáno, že $F_{12} = 3!\,4!$ je největší Fibonacciovo číslo, které je součinem faktoriálů. Navíc

$$F_1F_2F_3F_4F_5F_6F_8F_{10}F_{12} = 11!$$

je největším faktoriálem, který je součinem různých Fibonacciových čísel. Poznamenejme ještě, že existuje jen konečně mnoho Fibonacciových čísel, která lze vyjádřit jako sumu nejvýše k faktoriálů pro každé pevné k, ale stanovit takovou sumu pro $k \geqq 3$ je z výpočetního hlediska velice obtížné.

Pokud Vám v hlavě stále vrtá geometrický paradox z obr. 4, pak Vám napovíme, že nejmenší z úhlů trojúhelníku A je arctg $\frac{3}{8} = 20{,}56°$, zatímco u trojúhelníku A' je to arctg $\frac{5}{13} = 21{,}04°$ (srov. též (8)).

Poděkování. Autoři děkují Yannu Bugeaudovi, Martinu Klazarovi a Štefanu Porubskému za cenné připomínky a Pavlu Křížkovi za zhotovení obrázků. Práce na tomto článku byla podpořena projektem MŠMT č. 1P05ME749 a výzkumným záměrem AV0Z 101 90503.

Literatura

[1] André-Jeannin, R.: *Irrationalité de la somme des inverses de certaines suites récurrentes.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. *308* (1989), 539–541.

[2] Badea, C.: *The irrationality of certain infinite series.* Glasgow Math. J. *29* (1987), 221–228.

[3] Brown, J. L.: *Zeckendorf's theorem and some applications.* Fibonacci Quart. *2* (1964), 163–168.

[4] Brousseau, A.: *Tables of Fibonacci entry points (Parts One and Two).* The Fibonacci Association 1965.

[5] Bugeaud, Y., Mignotte, M., Siksek, S.: *Sur les nombres de Fibonacci de la forme* $q^k y^p$. C. R. Math. Acad. Sci. Paris *339* (2004), 327–330.

[6] Bugeaud, Y., Mignotte, M., Siksek, S.: *Classical and modular approaches to exponential diophantine equations, I. Fibonacci and Lucas perfect powers.* Submitted to Ann. of Math. (2004).

[7] Calda, E.: *Fibonacciova čísla a Pascalův trojúhelník.* Rozhledy mat.-fyz. *71* (1993/94), 15–19.

[8] Carmichael, R. D.: *On the numerical factors of the arithmetic forms* $\alpha^n \pm \beta^n$. Ann. Math. *15* (1913), No. 2, 30–70.

[9] Drobot, V.: *On primes in the Fibonacci sequence.* Fibonacci Quart. *38* (2000), 71–72.

[10] Dujella, A.: *A proof of the Hoggatt-Bergum conjecture.* Proc. Amer. Math. Soc. *127* (1999), 1999–2005.

[11] Duverney, D.: *Irrationalité de la somme des inverses de la suite de Fibonacci.* Elem. Math. *52* (1997), 31–36.

[12] Erdős, P., Graham, R. L.: *Old and new problems and results in combinatorial number theory.* Monographie 28 de L'Enseign. Math., Imprimerie Kundig, Genéve 1980.

[13] Good, I. J.: *A reciprocal series of Fibonacci numbers.* Fibonacci Quart. *12* (1974), 346.

[14] Halton, J. H.: *On Fibonacci residues.* Fibonacci Quart. *2* (1964), 217–218.

[15] Henrici, P.: *Discrete variable methods in ordinary differential equations.* John Wiley & Sons, New York 1962.

[16] Hogben, L.: *An introduction to mathematical genetics.* Norton, New York 1946.

[17] Hoggatt, V. E.: *Fibonacci and Lucas numbers.* Houghton Mifflin Company, Boston 1969.

[18] Jarden, D.: *Recurring sequences: a collection of papers.* Riveon Lematematika, Jerusalem 1973.

[19] Jones, J. P.: *Diophantine representation of the Fibonacci numbers.* Fibonacci Quart. *13* (1975), 84–88.

[20] Jones, J. P., Matiyasevich, Y. V.: *Proof of recursive unsolvability of Hilbert's tenth problem.* Amer. Math. Monthly *98* (1991), 689–709.

[21] Koshy, T.: *Fibonacci and Lucas numbers with applications.* John Wiley & Sons, Inc., New York 2001.

[22] Křížek, M., Luca, F., Somer, L.: *17 lectures on Fermat numbers.* Springer-Verlag, New York 2001.

[23] Křížek, M., Šolcová, A.: *Jak spolu souvisí chaos, fraktály a teorie čísel.* Sborník semináře Determinismus a chaos, Herbertov 2005, FS ČVUT, Praha 2005, 96–113.

[24] Lagarias, J. C.: *The set of primes dividing the Lucas numbers has density* 2/3. Pacific J. Math. *118* (1985), 449–461. Errata ibid. *162* (1994), 393–396.

[25] Lind, D. A.: *The quadratic field* $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ *and a certain diophantine equation.* Fibonacci Quart. *6* (1968), 86–93.

[26] Ljunggren, W.: *On the diophantine equation* $x^2 + 4 = Ay^2$. Det. Kgl. Norske Vid.-Selsk. Forh. *24* (1951), 82–84.

[27] London, H., Finkelstein, R.: *On Fibonacci and Lucas numbers which are perfect powers.* Fibonacci Quart. *7* (1969), 476–481, 487. Errata ibid. *8* (1970), 248.

[28] Luca, F.: *Proposed problem H-596.* Advanced Problem Section, Fibonacci Quart. *41* (2003), 187.

[29] Luca, F.: *Palindromes in Lucas sequences.* Monatsh. Math. *138* (2003), 209–223.

[30] Luca, F.: *Products of factorials in binary recurrence sequences.* Rocky Mountain J. Math. *29* (1999), 1387–1411.

[31] Luo, M.: *On triangular Fibonacci numbers.* Fibonacci Quart. *27* (1989), 98–108.

[32] Matiyasevich, Y.: *Enumerable sets are diophantine.* Soviet Math. Dokl. *11* (1970), 354–358.

[33] Matiyasevich, Y.: *My collaboration with Julia Robinson.* Math. Intell. *14* (1992), no. 4, 38–45.

[34] Matiyasevich, Y. V., Guy, R. K.: *A new formula for* π. Amer. Math. Monthly *93* (1986), 631–635.

[35] McDaniel, W.: *On Fibonacci and Pell numbers of the form* kx^2. Fibonacci Quart. *40* (2002), 41–42.

[36] McLaughlin, J.: *Small prime powers in the Fibonacci sequence.* Preprint, Univ. of Illinois 2002.

[37] Nemes, I., Pethő, A.: *Polynomial values in linear recurrences, II.* J. Number Theory *24* (1986), 47–53.

[38] Pisano, L.: *Fibonacci's Liber abaci.* A translation into modern English of Leonardo Pisano's *Book of calculation.* Translated by L. E. Sigler, Springer, New York 2002.

[39] Schroeder, M. R.: *Number theory in science and communication.* Springer Series in Information Sci. 7, second edition, Springer, Berlin 1986.

[40] Stewart, C. L.: *On the representation of an integer in two different bases.* J. Reine Angew. Math. *319* (1980), 63–72.

[41] Vajda, S.: *Fibonacci & Lucas numbers, and the golden section: Theory and applications.* John Wiley & Sons, New York 1989.

[42] Vorobiev, N. N.: *Fibonacci numbers.* Birkhäuser, Basel 2002; Nauka, Moskva 1992.

[43] Wall, D. D.: *Fibonacci series modulo* m. Amer. Math. Monthly *67* (1960), 525–532.

[44] Williams, H. C.: *A note on the Fibonacci quotients* $F_{p-\varepsilon}/p$. Canad. Math. Bull. *25* (1982), 366–370.

[45] Zhu, Z., Cao, L., Liu, X., Zhu, W.: *Topological invariance of the Fibonacci sequences of the periodic buds in general Mandelbrot sets.* J. Northeast Univ. Na. Sci. *22* (2001), 497–500.