Jan Horský; Milan Štefaník
Vztažné systémy v astronomii

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 49 (2004), No. 1, 60--64

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141209`

Další články k §§ 1–3

[23] Du Bois-Reymond, P. D. G.: *Ueber die Fourierschen Reihen.* Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften (Göttingen) No. 21 (1873), 571–584.

[24] Du Bois-Reymond, P. D. G.: *Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln.* Abhandlungen der Math.-Phys. Classe der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Abt. 2, *12* (1877), 1–103.

[25] Du Bois-Reymond, P. D. G.: *Zusätze zur Abhandlung: Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln.* Math. Ann. *10* (1876), 431–445.

[26] Dzjadyk, V. K.: *Prostoj priměr něpreryvnoj periodičeskoj funkciji ně razlagajuščejsja v rjad Furje.* Ukrajinskij mat. žurnal *17* (1965), 103–104.

[27] Fejér, L.: *Sur les fonctions bornées et intégrables.* Comptes rendus Acad. Sci. Paris *131* (1900), 984–987.

[28] Fejér, L.: *Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe.* J. Reine Angew. Math. *137* (1909), 1–5.

[29] Fejér, L.: *Eine stetige Funktion, deren Fouriersche Reihe divergiert.* Rendiconti di Palermo *28* (1909), 402–404.

[30] Fejér, L.: *Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen.* J. Reine Angew. Math. *138* (1910), 22–53.

[31] Hankel, H.: *Untersuchungen über die unendliche oft oscillirenden und unstetigen Funktionen.* Math. Ann. *20* (1882), 63–112.

[32] Lebesgue, H.: *Sur les intégrales singulières.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (3) *1* (1909), 25–117.

Vztažné systémy v astronomii

Jan Horský, Brno, a Milan Štefaník, Bratislava

Významnou položkou práce astronomů je nejenom samotné pozorování, ale také následné zpracování naměřených hodnot, jejich interpretace a popřípadě extrapolace do minulosti a budoucnosti. Měření i výpočty se mohou samozřejmě provádět v různých souřadnicových systémech. Ne všechny výpočty se dají dělat explicitně, proto se musí užít různých aproximačních metod. Tvar obdržených řešení může být různý a různé mohou být i referenční systémy. Proto je důležité mít takový tvar metrických koeficientů, tedy referenční neboli vztažný systém, v němž by pohybové rovnice dobře (jednoduše) popisovaly jak translační, tak i rotační pohyb těles, šíření světla, rychlost

Prof. RNDr. Jan Horský, DrSc. (1940), Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, Kotlářská 2, 611 37 Brno, e-mail: `horsky@sci.muni.cz`

RNDr. Milan Štefaník, Ph. D. (1966), Belčanského 12, SK-85 101 Bratislava, e-mail: `milan.stefanik@alcatel.sk`

chodu atomových hodin apod. Též by měly umožnit i dobře (jednoduše) modelovat observační procesy.

Doposud užívaný Newtonův referenční systém se stal nevyhovujícím z hlediska přesnosti dnešních astronomických observací. Proto se Mezinárodní astronomická unie (IAU) začala zabývat přechodem od Newtonových pozic k pozicím obecně relativistickým, a to na XXI. valném shromáždění IAU v roce 1991. V průběhu devadesátých let pak vznikla pracovní skupina o relativitě v nebeské mechanice a metrologii a společný výbor „Relativita pro referenční systémy a pro metrologii". Celý proces byl zakončen na XXIV. valném shromáždění IAU, které se konalo v Manchestru (UK) v roce 2000. Výsledkem práce obou skupin jsou čtyři rezoluce:

B1.3 Definice barycentrického nebeského referenčního systému a geocentrického nebeského referenčního systému;

B1.4 Post-Newtonovy potenciálové koeficienty;

B1.5 Rozšířená relativistická soustava pro časové transformace a realizace souřadnicových časů ve sluneční soustavě;

B1.9 Redefinice terestrického času.

Množinu reálných nebo myšlených hmotných bodů vyplňujících dostatečně hustě vyšetřovanou oblast prostoru nazýváme referenční soustavou. Bodům tvořícím referenční soustavu říkáme referenční body. Přiřadíme-li v určité oblasti referenčním bodům vzájemně jednoznačně trojice reálných čísel x^α $(\alpha = 1, 2, 3)$, říkáme, že jsme v referenční soustavě R zavedli systém prostorových souřadnic. Reálným hmotným bodem rozumíme každý objekt, který je v soustavě souřadnic plně charakterizován konkrétní trojicí souřadnic a svou hmotou. To pro naše další úvahy postačí.

Výraz pro čtverec vzdálenosti $\mathrm{d}\sigma^2$ mezi dvěma blízkými referenčními body pak můžeme psát ve tvaru

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta, \tag{1}$$

kde tzv. metrické koeficienty $\gamma_{\alpha\beta}(x^\gamma)$ jsou funkcemi místa, v němž se počítají. Souřadnice x^α jsou, obecně řečeno, souřadnicemi křivočarými. Indexy řecké abecedy nabývají hodnot 1, 2, 3, indexy latinské abecedy hodnot 0, 1, 2, 3. Užívá se Einsteinova sumační symbolika.

Newtonova představa o geometrii v R je prostá; je to geometrie eukleidovská. Kdykoliv, kdekoliv a pro libovolnou prostorovou odlehlost dvou referenčních bodů lze výraz (1) psát ve tvaru $\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$, tj. $\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. Ve speciální teorii relativity, v níž je gravitační interakce stále „vypnuta", je výraz pro prostoročasový interval mezi dvěma blízkými událostmi dán vztahem $\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$, kde c je rychlost světla ve vakuu, a výraz pro $\mathrm{d}\sigma^2$ se tudíž nijak od (1) neliší. Geometrie v referenčním systému R je opět eukleidovská. Gravitaci zapněme a uvažujme o vlivu gravitačního pole na geometrii referenčního systému.

Aplikace principu lokální ekvivalence a přijetí obecného principu relativity vedlo Einsteina k závěru, že čtverec prostoročasového intervalu mezi blízkými prostoročasovými body má tvar $\mathrm{d}s^2 = g_{ik}(x^j)\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k$. Deset funkcí $g_{ik}(x^j) = g_{ki}(x^j)$ je gravitačním polem v bodě x^j. Gravitační pole v Einsteinově teorii gravitace je mnohem složitější než v Newtonově teorii gravitace, kde je popsáno jediným skalárním polem $U(x^\alpha)$.

Zdroj budící gravitační pole $g_{ik}(x^j)$ je popsán tenzorem energie a hybnosti $T_{ik}(x^j)$. Je-li zdroj zadán, pak se gravitační pole $g_{ik}(x^j)$ buzené tímto zdrojem hledá řešením systému deseti nelineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} \tag{2}$$

pro deset hledaných funkcí $g_{ik}(x^j)$. V těchto rovnicích značí $R_{ik}(x^j)$ tzv. Ricciho tenzor křivosti, $R(x^j)$ je Ricciho skalár, Λ značí kosmologickou konstantu a Newtonova gravitační konstanta je označena písmenem G. Tenzor R_{ik} a skalár $R(x^j)$ se získají z Riemannova tenzoru křivosti. Rovnice (2) vyjadřují Einsteinův gravitační zákon.

I když je třída nalezených exaktních řešení Einsteinových gravitačních rovnic poměrně bohatá, je (nejen prakticky) velmi cenné mít k dispozici dobré metody hledání řešení aproximativních. Máme-li v Einsteinově teorii gravitace nalézt gravitační pole pro konečný soubor izolovaných zdrojů gravitačního pole v aproximačním schématu, stojíme před komplikovaným problémem. Einsteinovy gravitační rovnice jsou nejen formálně velmi složitým systémem parciálních diferenciálních rovnic, ale zároveň určují i pohybové rovnice zdrojů. Tuto skutečnost musí každé aproximační schéma v každém kroku zajistit. Aproximační schéma a jeho závěry, které byly podkladem pro rezoluce B1.3, B1.4, B1.5 a B1.9, se nazývá kvazistacionární aproximací (aproximační metodou pomalého pohybu, post-Newtonovou metodou, PN aproximací).

K metrice plochého prostoročasu (tj. prostoročasu s vypnutou gravitací) se dodávají malé poruchové členy v různých mocninách malého poruchového parametru ε, a to tak, že hledaná aproximující metrika je vždy plně konzistentní s Einsteinovými gravitačními rovnicemi.

Pro malý parametr ε v PN aproximaci jest

$$\varepsilon \approx \frac{v_{(A)}}{c} \approx \sqrt{\frac{GM_{(A)}}{c^2 r_{(A)}}}\,, \tag{3}$$

kde $M_{(A)}$, $v_{(A)}$, $r_{(A)}$ značí typické hodnoty hmotností, rychlostí a velikostí izolovaných zdrojů uvažovaného souboru zdrojů. Bude-li pole nejen slabé, ale bude-li systém i „pomalý“ (tj. $v_{(A)} \ll c$), lze rozvoj provádět i podle mocnin c^{-1}, tedy $\varepsilon \approx c^{-1}$. Konsistentní PN aproximace vyžaduje určení g_{00} s přesností $O(\varepsilon^4)$, $g_{0\alpha}$ s přesností $O(\varepsilon^3)$ a $g_{\alpha\beta}$ s přesností $O(\varepsilon^3)$. Samotný výpočet metrického tenzoru v PN aproximaci je zdlouhavý, výsledkem jsou následující formule

$$g_{00} = -1 + \frac{2W}{c^2} - \frac{2W^2}{c^4} + O(\varepsilon^6), \tag{4}$$

$$g_{0\alpha} = -\frac{4}{c^3} W_\alpha + O(\varepsilon^5), \tag{5}$$

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\left(1 + \frac{2W}{c^2}\right) + O(\varepsilon^4), \tag{6}$$

ve kterých W je post-Newtonův gravitační potenciál a W^α značí vektorový gravitační potenciál. Je vidět, že požadovaná přesnost je pro jednotlivé komponenty metrického tenzoru dodržena.

Dále se předpokládá, že prostoročas je v nekonečnu asymptoticky plochý, proto se pro W a W^α může psát

$$
(7) \qquad W(t,\boldsymbol{x}) = G\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'\,\frac{\psi(t,\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} + \frac{G}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'\psi(t,\boldsymbol{x}')\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\,,
$$

$$
(8) \qquad W^\alpha(t,\boldsymbol{x}) = G\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'\,\frac{\psi^\alpha(t,\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|},
$$

kde

$$
\begin{aligned}
\psi(t,\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{c^2}(T^{00}+T^{11}+T^{22}+T^{33}),\\
\psi^\alpha(t,\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{c}\,T^{0\alpha}.
\end{aligned}
$$

Zde $T^{ik}(t,\boldsymbol{x})$ značí komponenty tenzoru energie a hybnosti uvažovaného souboru izolovaných zdrojů; $\boldsymbol{x}$ značí polohový vektor.

Bylo by možné explicitně napsat i tvar pohybových rovnic pro testovací částice nacházející se v externím PN gravitačním poli. Jejich konkrétní tvar vyžaduje zřejmě znalost PN potenciálů, které v nich vystupují. Takový výpočet lze relativně snadno provést pro soubor bodových (monopólových) hmotných částic. Obdrží se známé Einsteinovy-Infeldovy pohybové rovnice pro a-tou bodovou částici v gravitačním poli zbývajících bodových částic. Aplikace pohybových rovnic, o kterých byla řeč, dovoluje relativně jednoduše řešit problém pohybu dvou bodových těles, precesi setrvačníku a dalších obecně relativistických jevů. Všechny tyto jevy a řada dalších jsou plně v souladu s dosud provedenými experimenty.

Můžeme tedy konstatovat, že zavedený PN referenční systém, v němž

$$
(8) \qquad \mathrm{d}\sigma^2 = \left(g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right)\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta,
$$

kde $g_{\alpha\beta}(t,\boldsymbol{x})$, $g_{0\alpha}(t,\boldsymbol{x})$, $g_{00}(t,\boldsymbol{x})$ jsou dány vztahy (4), (5) a (6), je referenčním systémem lepším, než byl referenční systém newtonovský.

Aby se moderní astronomická pozorování zvládla efektivně, je třeba zavést a užívat několik relativistických referenčních systémů. Z nich dva lze považovat za základní. Jsou to barycentrický nebeský referenční systém (BCRS) a geocentrický nebeský referenční systém (GCRS). Referenční systém BCRS se užívá k modelování šíření světla ze vzdálených nebeských objektů a ke zkoumání pohybu těles uvnitř sluneční soustavy. Systém GCRS je vhodný k dobrému fyzikálnímu modelování procesů blízko Země, například pro pohyb družic kolem Země.

Oba referenční systémy jsou vyjádřeny formálně vzorci (4), (5) a (6) (Rezoluce B1.3); potenciály PN ovšem mají pro BCRS a GCRS jiné hodnoty (Rezoluce B1.4). V obou systémech jsou definovány souřadnicové časy TCB (barycentrický souřadnicový čas) a TCG (geocentrický souřadnicový čas) a je s dostatečnou přesností určen i jejich vzájemný vztah (Rezoluce B1.5).

V případě referenčního systému BCRS se integrování v PN koeficientech provádí pro systém všech těles sluneční soustavy a koeficienty samy se píší ve tvaru

$$w = \sum_A W_A, \qquad w^\alpha = \sum_A W_A^\alpha, \tag{10}$$

kde se potenciály s indexem A obdrží ze vztahů (7), (8) jakožto příslušné integrály vypočtené pro těleso A.

Pro referenční systém GCRS se PN potenciály rozdělí na dvě části

$$w = W_E + W_{\text{ext}},$$
$$w^\alpha = W_E^\alpha + W_{\text{ext}}^\alpha,$$

kde se index „E" vztahuje k Zemi a index „ext" je spojen se slapovými a inerciálními efekty. Konkrétní výpočty jsou značně zdlouhavé a existuje řada specifických metod usnadňujících jejich výpočet pro speciální situace, například multipólový rozvoj lokálních gravitačních potenciálů.

Pro oba referenční systémy musí být (a jsou) s dostatečnou přesností explicitně určeny i transformační vztahy mezi nimi, včetně časových transformací (Rezoluce B1.5) a je zajištěna i obecně relativistická synchronizace souřadnicových hodin v každém z obou referenčních systémů. Dále jsou s dostatečnou přesností známy i převáděcí formule mezi změnou vlastního a souřadnicového času (Rezoluce B1.9).

Mezinárodní astronomická unie přijala na svém XXIV. valném shromáždění v Rezolucích B1.3 až B1.5 a B1.9 plně za svůj PN referenční systém a z toho pak vyplývající důsledky. Tak se obecně relativistické výsledky staly i praktickou součástí výpočetní základny astronomie. To je nejenom velký, ale i velmi nadějný výsledek pro efektivní popis těch nejjemnějších nových astronomických a kosmologických pozorování.

Konkrétnější informace může čtenář získat v Informačním bulletinu IAU č. 88 z ledna 2001 nebo na webové stránce `http://www.bipm.fr/WG/CCTF/JCR` .

Poděkování. Autoři děkují RNDr. J. Grygarovi, CSc., za jeho cenné rady a připomínky.