Jiří Horák

O jedné formě skryté symetrie chaotických stavů atmosférických procesů

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 48 (2003), No. 4, 315--325

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141193

[2] Chenciner, A., Montgomery, R.: *A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses.* Ann. of Math. *152* (2000), 881–901.
[3] Marchal, Ch.: *The three body problem.* Elsevier, Amsterdam 1990.
[4] Montgomery, R.: *A new solution to the three body problem.* Notices AMS *5* (2001), 471–481.
[5] Poincaré, H.: *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.* Acta Math. *13* (1890), 1–270.
[6] Saari, D. G., Xia, J.: *Do nekonečna v konečném čase.* PMFA *42* (1997), 90–102.
[7] Sundman, K.: *Recherches sur le problème des trois corps.* Acta Societatis Scientiarium Fennicae *34* (1907), No. 9.
[8] Wang, Q.: *The global solution of the n-body problem.* Celestial Mechanics *50* (1991), 73–88.

O jedné formě skryté symetrie chaotických stavů atmosférických procesů

Jiří Horák, Praha

Úvod

Stanovení statistických deskriptorů atraktorů generovaných matematickými modely všeobecné cirkulace atmosféry je v posledních letech věnována značná pozornost v souvislosti s její stochastičností. Abychom chování matematických modelů atmosféry mohli označit za stochastické, musí systém obsahovat expanzivní složku, což vyplývá např. z toho, že alespoň jeden z Ljapunovových exponentů na atraktoru matematického modelu dynamiky atmosféry musí být kladný, což je známý heuristický předpoklad chaosu[1]).

[1]) Ruelle, vůdčí osobnost v teorii deterministického chaosu, upozorňuje na to, že chaos není dokázán, jestliže jsme nalezli homoklinické body. Homoklinický bod dynamického systému (M, f) (M je prostor s algebrou měřitelných množin s mírou, normovanou tak, aby míra M byla rovna 1 a f je grupa transformací $M \to M$ zachovávajících míru), tj. takový bod x, pro který existují $\lim f^k x$ pro $k \to \infty$ a $\lim f^k x$ pro $k \to -\infty$ a jsou si rovné, nemusí být atraktorem a nemusí mít nic společného s chováním systému po uplynutí dlouhé doby. Existence homoklinického bodu ještě není důkazem, že jde o chaos. Za standardní cestu, jak ukázat, že dynamický systém je chaotický, je považována ta, která vede k numerickému odhadu Ljapunovova exponentu.

RNDr. Jiří Horák, CSc. (1929), Ústav fyziky atmosféry AV ČR, Boční II/1403, 141 31 Praha 4.

Ze zřejmých důvodů lze přítomnost nelineární expanzivní složky interpretovat jako citlivou závislost na počátečních datech. Všeobecně se od chaosu vedle zmíněné závislosti vyžaduje ještě existence husté trajektorie, známé pod jménem tranzitivnost. Tehdy se systém nepředvídatelně může libovolně blízko přiblížit k libovolnému stavu. Tuto vlastnost mohou mít jen nelineární dynamické systémy, tedy i atmosféra.

Třebaže vyhledávání Ljapunovových exponentů vedle Kolmogorovovy K-entropie a Shannonovy informační entropie je věnována dnes již početná literatura, o formě skryté symetrie těchto exponentů vskutku máme jen kusé informace. Tím spíše, pracujeme-li s konečnědimenzionálními aproximacemi rovnic geofyzikální hydrodynamiky. Připomínáme, že tyto aproximace jsou postaveny na větě o existenci a hladkosti útvarů, známých pod jménem inerciální variety. Jejich existence ve fázových prostorech dynamických systémů činí smysluplnými snahy silně redukovat dimenzi zkoumaného prostoru, převést tak otázky o atraktorech evolučních parciálních diferenciálních rovnic dynamické meteorologie na konečnědimenzionální dynamické systémy.

Poznámka. Mějme dynamický systém, kterým budeme rozumět obecně jistý metrický prostor H a množinu operátorů $\{S(t)\}_{t\geqq 0}$ tvořících semigrupu operátorů. Dále nechť M je konečnědimenzionální lipschitzovská varieta. Tuto varietu nazvěme *inerciální varietou dynamického systému* (stručně *varietou*), jestliže platí: 1. M je pozitivně invariantní množinou, tj. pro $M \subset H$ je $S(t)M \subset M$ pro všechna $t \geqq 0$; 2. M exponenciálně přitahuje všechny trajektorie dynamického systému: pro každé $u_0 \in H$ existují taková kladná čísla a, b, že $\varrho\big(S(t)u_0, M\big) = a\exp(-bt)$ pro všechna $t \geqq 0$; ϱ je metrika na H. Mnoho vět o existenci inerciální variety vychází mimo jiné z předpokladu o existenci globálního atraktoru. Pro Navierovy-Stokesovy rovnice nebyla přítomnost inerciální variety prokázána, a to ani ve dvou dimenzích. Důkaz byl proveden pro rovnici vorticity (vířivosti) barotropní atmosféry na kulové ploše [1, 2] a pro zobecněné Navierovy-Stokesovy rovnice. Právě tato skutečnost v nás budí naději, že i standardní Navierovy-Stokesovy rovnice mají inerciální varietu. Částečného úspěchu dosáhl Fois [3].

Pokud je nám známo, první údaje o struktuře Ljapunovových exponentů utvářené jistou jejich symetrií v systémech s konstantní energií se objevily v [4]. O několik let později v r. 2001 byly publikovány výsledky [5], svědčící o párové symetrii globálních Ljapunovových exponentů tentokrát již v úloze geofyzikální hydrodynamiky s vážnými důsledky v oblastech atmosférických jevů. K těmto výsledkům se dospělo numerickou integrací konečnědimenzionální aproximace rovnice barotropní vorticity na hemisféře aplikací Galerkinovy procedury. Tyto poznatky budou pro nás závazné a na jejich základech se budeme snažit mimo jiné ukázat, jaké místo náleží hamiltonovským systémům při matematickém modelování atmosférických proudění.

Poznámka. Nehledejme paralelu mezi univerzální vlastností symetrie Ljapunovových exponentů a známou vlastností zobrazení, sloužícího za předlohu pro Feigenbaumův model turbulence [6].

Matematický model dynamiky atmosféry

Za dosti obecných podmínek může být takovým modelem rovnice

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L\varphi}{\partial t} + K(\varphi)\varphi = -S\varphi + f, \\
&\varphi(t=0) = \varphi_0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

V (1) je φ prvkem reálného Hilbertova prostoru H se skalárním součinem $(\cdot\,,\cdot)$, $K(\varphi)$ antisymetrický operátor $\big(K(\varphi)\varphi,\varphi\big) = 0$ lineárně závisející na φ. Dále jsou L, S symetrické nezáporné operátory $(L\varphi,\varphi) \geqq 0$, $(S\varphi,\varphi) \geqq 0$ a f udává vnější sílu (forcing). Operátory L, S a funkce f nezávisí na φ a t.

Můžeme se přesvědčit, že při $S \equiv 0$ a $f \equiv 0$ má systém (1) první integrál, jemuž odpovídá kvadratický zákon zachování $(L\varphi,\varphi) = \text{konst}$. Vedle toho se často setkáváme se situací, kdy systém (1) vyhovuje podmínce nestlačitelnosti (při $S \equiv 0$)

$$\sum_i \frac{\partial\big(K(\varphi)\varphi\big)_i}{\partial\varphi_i} = 0;$$

$\big(K(\varphi)\varphi\big)_i$ a φ_i jsou koeficienty v rozvoji pravé strany a řešení rovnice (1) podle některé báze prostoru H.

Numerická realizace (1) vyžaduje přechod k jisté konečnědimenzionální aproximaci, založené buď na iteračním schématu, nebo na Galerkinově metodě, či jiném přístupu používaném v praxi. K uskutečnění tohoto záměru je třeba, aby existoval kvadratický invariant systému a byly splněny podmínky nestlačitelnosti. Takto získané systémy lze nazvat (regulárními) systémy hydrodynamického typu (systems of the fluid mechanical type). Lze se o nich poučit např. v [7].

Budiž

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}L_h\varphi^h}{\mathrm{d}t} + K_h(\varphi^h)\varphi^h = -S_h\varphi^h + f_h, \\
&\varphi^h(t=0) = \varphi^h_0; \qquad \varphi^h,\ f_h \in \mathbb{R}^N
\end{aligned} \tag{2}
$$

požadované konečnědimenzionální aproximace systému (1). Tento systém při $S_h \equiv 0$ a $f_h \equiv 0$ bude regulární, jestliže

$$\sum_i a_i(\varphi^h_i)^2 = \text{konst}, \quad \sum_i \frac{\partial Q_i}{\partial\varphi_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, N,$$

kde Q_i je i-tá složka nelineárního sčítance $K_h(\varphi^h)\varphi^h$ a φ^h_i je i-tá složka řešení φ^h. Předpokládejme, že v bázi prostoru H zavedené pro aproximaci systému (1) má operátor L_h diagonální tvar, tj. $L_h = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$. Navíc požadujme, aby pro konečnědimenzionální systém platila podmínka

$$(S_h\varphi^h,\, \varphi^h)_{\mathbb{R}^N} \geqq 0.$$

Podotkněme, že splnění této podmínky vesměs nevyžadujeme, přistoupíme-li ke konečnědimenzionálním aproximacím matematických modelů atmosférických procesů.

Ljapunovovy exponenty

Vraťme se ke konečnědimenzionální aproximaci (2) a položme $S_h = -\alpha E$, $\alpha > 0$, $L_h = E$ (E je jednotková matice). Dále nechť f_h není funkcí času. Po vypuštění indexu h bude

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}t} = Q_i(\varphi) - \alpha\varphi_i + f_i, \quad \varphi_i(t=0) = \varphi_{i0}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{3}$$

Budiž $\varphi = \varphi(t)$ řešení systému (3). Linearizací (3) vzhledem k $\varphi(t)$ dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = A_\varphi\psi - \alpha\psi, \quad \psi(t=0) = \psi_0, \tag{4}$$

kde $A_\varphi(t)$ je Jacobiho matice

$$A_{ij} = \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \varphi_j}\right)_{\varphi(t)}.$$

Ljapunovovy exponenty systému (3) zapisujeme ve tvaru

$$\mu_k = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\psi^{(k)}(t)}{\psi^{(k)}(0)} \right|; \tag{5}$$

$\psi^{(k)}(t)$ jsou lineárně nezávislá řešení systému (4). Je známo, že (3) má kompaktní atraktor s invariantní mírou. Tuto invariantní pravděpodobnostní míru na atraktoru získáme na základě Bogoljubovovy a Krylovovy metody, opírající se o Rieszovu-Radonovu větu. Je-li dynamika na atraktoru ergodická, máme možnost přistoupit k výpočtům Ljapunovových exponentů užitím multiplikativní ergodické teorie, popsané v [8] a rámcově též v [9]. Pro naše účely stačí vědět, že z rovnice (3) dostáváme

$$\psi(t) = R(t)\psi_0, \quad R(0) = E$$

a poté

$$\mu_k = \lim_{t\to\infty} (2t)^{-1} \ln \lambda_k\big(R^*(t)R(t)\big),$$

kde $\lambda_k\big(R^*R\big)$ je k-té vlastní číslo operátoru R^*R (R^* je operátor adjungovaný k operátoru R).

Podotkněme, že Ljapunovovy exponenty jsou invariantní při nelineární záměně proměnných $\varphi = F(\eta)$ v (3) takové, že existují inverzní zobrazení $\eta = F^{-1}(\psi)$ a Jacobiho matice původního a inverzního zobrazení jsou ohraničené (tj. F udává difeomorfismus fázového prostoru systému (3)).

Hamiltonovy systémy

Zformulujeme krátce některé vlastnosti hamiltonovských systémů [5]. K tomuto účelu nám poslouží systém (3), který pro $\alpha = 0$ a $f_h = 0$ budeme považovat za hamiltonovský:

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = Q_i(u), \quad u_i(t=0) = u_{i0}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Nechť N je sudé číslo. Linearizací získáme

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = A_u h, \quad h(t=0) = h_0,$$

a tedy

$$h(t) = R(t)h_0.$$

Můžeme se přesvědčit, že matice $R(t)$ vyhovuje rovnici

$$\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = A_u R(t), \quad R(0) = E. \tag{6}$$

Podle [10] hamiltonovské systémy splňují podmínku

$$R^*(t)JR(t) = J, \tag{7}$$

kde J je tzv. simplektická jednotka

$$J = \left\| \begin{matrix} 0, & E \\ -E, & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Je to ortogonální antisymetrická matice, tj.

$$J = -J^* = -J^{-1}.$$

Derivací (7) podle t nalezneme

$$\frac{\mathrm{d}R^*}{\mathrm{d}t} JR + R^* J \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = 0$$

a s ohledem na (6) bude

$$R^* A^* JR + R^* JAR = 0,$$

tedy

$$R^*(A^* J + JA)R = 0.$$

Přihlédneme-li k (7), můžeme psát

$$A^* J + JA = 0. \tag{8}$$

Poznamenejme, že vztahy (7) a (8) jsou navzájem ekvivalentní. Také si řekněme, že (8) nezávisí na výběru bodu fázového prostoru, vzhledem k němuž je vztažen operátor A, neboť (8) platí pro libovolná počáteční data.

Nemělo by uniknout naší pozornosti, že Ljapunovovy exponenty hamiltonovského systému jsou podle (7) symetrické vzhledem k nule. Tutéž vlastnost přisuzujeme lokálním Ljapunovovým exponentům definovaným vztahem (5) pro konečné t (neprovádíme limitní přechod $t \to \infty$). Nadále budeme nazývat Ljapunovovy exponenty (5) *globálními Ljapunovovými exponenty*, abychom zvýraznili jejich rozdíl od lokálních exponentů.

Podle (7) můžeme psát

$$\begin{aligned} R^* &= JR^{-1}J^*, \\ R &= J(R^{-1})^*J^*, \\ R^*R &= JR^{-1}J^*J(R^{-1})^*J^* = J(R^*R)^{-1}J^{-1}, \\ (J^* &= J^{-1}). \end{aligned}$$

Odtud nahlédneme, že spektrum operátoru R^*R tvoří dvojice $(\lambda_i, \lambda_i^{-1})$ a Ljapunovovy exponenty (globální i lokální) jsou symetrické vzhledem k nule. Se symetrií se též setkáváme ve spektru operátoru A se čtveřicí $(\lambda_i, \overline{\lambda}_i, -\lambda_i, -\overline{\lambda}_i)$ pro komplexní λ_i a s dvojicí pro reálná λ_i.

Vraťme se k rovnici (3). Předpokládejme, že existuje nelineární zobrazení $\varphi = F(\eta)$ s nedegerovanou Jacobiho maticí $Y \equiv \partial R/\partial\eta$ takové, že při $\alpha = 0$ a $f = 0$ bude systém (3) v termínech η systémem hamiltonovským. Již víme, že globální Ljapunovovy exponenty se při takovém zobrazení nemění. Jinak je tomu, máme-li na zřeteli lokální exponenty. Pro proměnnou $\eta(t)$ rovnice (3) má tvar

$$\frac{\mathrm{d}F(\eta)}{\mathrm{d}t} = Q\bigl(F(\eta)\bigr) - \alpha F(\eta) + f,$$

tedy

$$Y\,\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = Q\bigl(F(\eta)\bigr) - \alpha F(\eta) + f.$$

Linearizací pro řešení $\eta(t)$ dospíváme k následující rovnici pro proměnnou η':

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\,\eta'\,\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} + Y\,\frac{\mathrm{d}\eta'}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial Q}{\partial\varphi}\,Y\eta' - \alpha Y\eta'.$$

Dále platí

$$\frac{\mathrm{d}\eta'}{\mathrm{d}t} = Y^{-1}\left(\frac{\partial Q}{\partial\varphi}\,\eta' Y - \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\right) - \alpha\eta'.$$

Volbou

$$A' \equiv Y^{-1}\left(\frac{\partial Q}{\partial\varphi}\,\eta' Y - \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\,\eta'\right)$$

nabývá předchozí rovnice tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\eta'}{\mathrm{d}t} = \eta' A' - \alpha\eta'. \tag{9}$$

Podle dříve vysloveného předpokladu má systém v proměnné η pro $f = 0$ a $\alpha = 0$ hamiltonovskou formu. Uvědomme si, že linearizace tohoto systému byla prováděna s ohledem na řešení hamiltonovského systému, zatímco rovnice (9) byla získána linearizací s přihlédnutím k řešení disipativního systému. Protože vlastnost symetrie vlastních čísel operátoru linearizovaného hamiltonovského systému nezávisí na tom, vůči kterému bodu fázového prostoru provádíme linearizaci, stejnou vlastnost připisujeme rovněž operátoru A' systému (9). Můžeme tedy psát

$$(A')^* J + JA' = 0.$$

Další krok spočívá v přepisu (9):

$$\frac{\mathrm{d}\eta'}{\mathrm{d}t} = \eta' B, \quad B = A' - \alpha E.$$

Tehdy bude

$$B^* J + JB = -2\alpha J.$$

Nakonec ($\eta' = R(t)\eta'_0$) rovnice pro operátor R má tvar

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = BR, \quad R(0) = E.$$

Ljapunovovy exponenty na atraktoru barotropního modelu atmosféry

K stanovení těchto exponentů, které vyjadřují (asymptotickou) orbitální stabilitu (nebo nestabilitu) dané trajektorie, s výhodou použijeme procedury, vyložené v [11]:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R^* JR) = \frac{\mathrm{d}R^*}{\mathrm{d}t} JR + R^* J \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} &= R^* B^* JR + R^* JBR = \\ &= R^*(B^* J + JB)R = -2\alpha R^* JR.\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$R^* JR = \exp(-2\alpha t)(R^* JR)_{t=0} = \exp(-2\alpha t)R$$

a také

$$R^* R = \exp(-4\alpha t)J(R^* R)^{-1} J^{-1}.$$

Nyní již můžeme říci, že spektrum operátoru je tvořeno dvojicemi

$$\big(\lambda_i(R^* R), \exp(-4\alpha t)/\lambda_i(R^* R)\big).$$

To však znamená, že globální Ljapunovovy exponenty prezentují dvojice

$$\lim_{t\to\infty} (2t)^{-1} \ln \lambda_i, \quad -2\alpha - \lim_{t\to\infty} (2t)^{-1} \ln \lambda_i.$$

Dospěli jsme k závěru, že globální Ljapunovovy exponenty systému (9) můžeme uspořádat tak, že

$$\mu_i + \mu_{N+1-i} = -2\alpha. \tag{10}$$

Na základě předchozích úvah docházíme ke shodě globálních Ljapunovových exponentů transformovaného a netransformovaného systému. Tyto exponenty systému (3) budou rovněž vyhovovat vztahu (10), ovšem za podmínky, že systém (3) pro $\alpha = 0$ a $f = 0$ po uvedené transformaci přejde na hamiltonovský. Ještě si řekněme, že se stejnou formou symetrie se můžeme setkat u tzv. izokinetických systémů, v nichž „disipace“ je vyjádřena tak, aby byl korektně splněn zákon zachování energie [4].

Numerické experimenty s barotropním modelem atmosféry

Zvolme model atmosféry na hemisféře se známým a podrobněji popsaným atraktorem. Tomuto požadavku vyhovuje matematický model s diferenciální rovnicí

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta^{-1}J(\psi,\, \Delta\psi + l + h) = f - \alpha\psi + \sigma\Delta\psi. \tag{11}$$

Tento model reprezentovaný nelineárním systémem je jedním z mála modelů, pro něž byla provedena dostatečně hluboká teoretická kvalitativní analýza. Rovnice (11) má pro režimy, které nás zajímají, jednoznačné řešení. Jsme schopni ověřit předpoklady, za nichž použité numerické metody a výpočtové postupy poskytují přípustná řešení. Také získané numerické řešení bude dostatečně přesné a chyba v přípustném rozmezí.

V (11) je $\psi(\theta,\varphi)$ bezrozměrná proudová funkce závislá na geografických souřadnicích θ a φ, Δ Laplaceův operátor na kulové ploše, J jakobián, $l = 2\Omega\sin\varphi$ Coriolisův parametr (θ je zeměpisná délka, φ zeměpisná šířka a Ω udává rotační rychlost Země), $h = h(\theta,\lambda)$ orografie (orografické nehomogenity zemského povrchu), $f = f(\theta,\lambda)$ vnější síla a $\alpha = 1{,}135\cdot 10^{-2}$ koeficient tření v mezní vrstvě. Veličina σ představuje koeficient vertikálního turbulentního přenosu hybnosti; předpokládejme, že $\sigma = 0$.

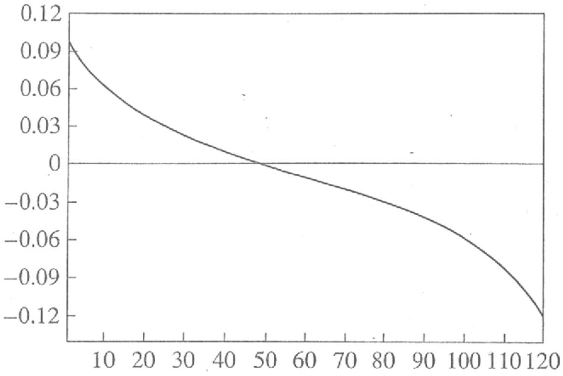
Problém (11) je ekvivalentní se soustavou obyčejných diferenciálních rovnic získaných např. Galerkinovou metodou, popsanou v [7] :

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}\psi_i}{\mathrm{d}t} + \bigl(\Delta^{-1}J(\psi^N, \Delta\psi^N + l + h^N), Y_i\bigr) = f_i - \alpha\psi_i,\\ \psi_i(t=0) = \psi_{i0}, \qquad i = 1,2,\dots,N = 120.\end{gathered} \tag{12}$$

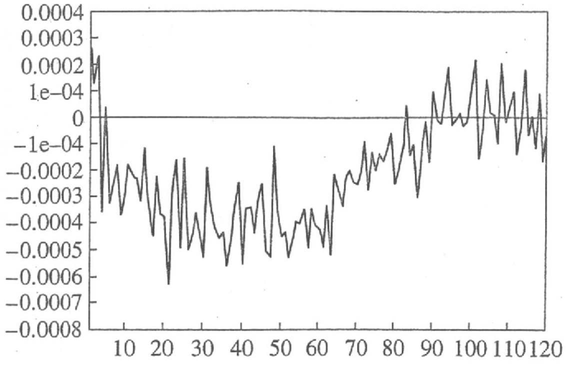
Soustava (12) byla získána za předpokladu, že funkce báze tvoří antisymetrické (vůči rovníku) sférické funkce Y_i (vlastní funkce Laplaceova operátoru na ploše kulové). V rozvoji podle systému těchto funkcí báze vystupují harmoniky jen se zonálním číslem menším než 16. S přihlédnutím k antisymetrii vůči rovníku je dimenze fázového prostoru galerkinovského systému rovna 120.

V (12) jsou ψ^N a h^N projekce proudové funkce a orografie na galerkinovský podprostor, ψ_i a f_i koeficienty v rozvoji funkcí ψ a f v řadu podle sférických harmonik. Pravá část v (12) byla vybrána tak, aby střední stav systému byl blízký střednímu stavu reálné lednové atmosférické cirkulace na hladině 250 hPa [5]. Soustavu (12) řešíme pomocí vhodné časové diskretizace, jako je např. metoda Crankova-Nicholsonové (viz schéma (b)):

$$\text{(a)} \qquad U_{i+1} = U_i + tF\big(U_i + tF(U_i)\big)/2,$$
$$\text{(b)} \qquad U_{i+1} = U_i + tF\big((U_i + U_{i+1})/2\big).$$

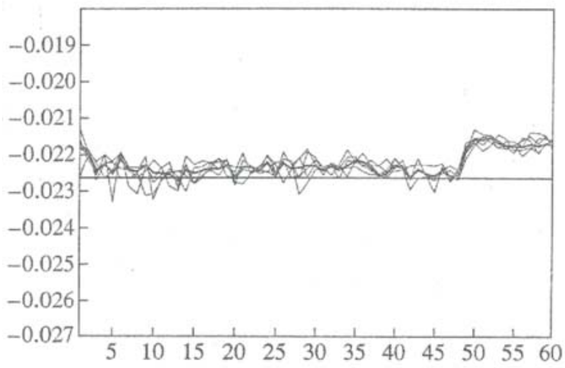


Obr. 1. Ljapunovovy exponenty μ_i uspořádané podle klesajících hodnot. Horizontální čára odpovídá nulové hodnotě exponentu.

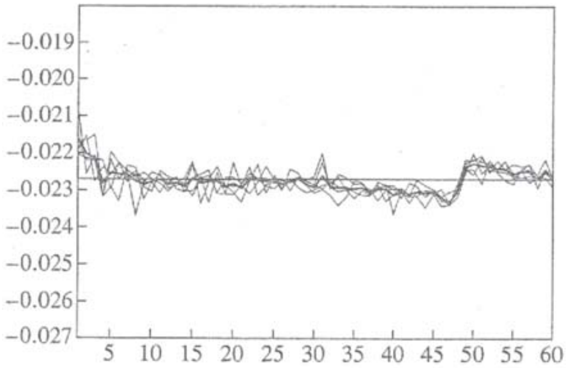


Obr. 2. Rozdíly mezi Ljapunovovými exponenty μ_i získanými aproximací (12) časovou diskretizací metodou (a) a (b). Horizontální čára odpovídá nulové hodnotě rozdílu.

Délka úseku trajektorie, na níž byly exponenty počítány, odpovídala 5×10^6 časových kroků při velikosti jednoho kroku 10^{-2} dne. V obou případech bylo pro výpočet těchto exponentů diskretizovaného systému (12) použito tzv. multiplikačního teorému, postupem vyloženým v [12]. Na obr. 1 jsou vyneseny hodnoty Ljapunovových exponentů, aproximovaných diskretizací (a); exponenty jsou uspořádány podle jejich klesajících hodnot. Vidíme, že při hodnotách parametrů připadajících v úvahu se na atraktoru systému (12) realizuje chaos. Fraktální dimenze atraktoru nalezená podle známého Kaplanova-Yorkeho vztahu činila 105 při 48 kladných Ljapunovových exponentech. Stabilitu těchto exponentů s ohledem na volbu schématu (a) či (b) ilustruje obr. 2. S reprodukcí obrazu párové symetrie, tj. závislosti součtu Ljapunovových exponentů



Obr. 3. Závislost součtu Ljapunovových exponentů $\mu_i + \mu_{N+1-i}$ na hodnotě i (metoda (a)). Horizontální čára odpovídá nulové hodnotě -2α $(-0{,}027)$.



Obr. 4. Závislost součtu Ljapunovových exponentů $\mu_i + \mu_{N+1-i}$ na hodnotě i (metoda (b)).

$\mu_i + \mu_{N+1-i}$ na čísle i, se můžeme seznámit na obr. 3 a 4. Silněji vyznačené křivky sledují závislost součtu $\mu_i + \mu_{N+1-i}$ veličin spočtených na celém úseku trajektorie, slaběji vynesené křivky ukazují na průběh tohoto součtu na disjunktních pětinových částech trajektorie. Jejich rozptyl je mírou chyby výpočtu $\mu_i + \mu_{N+1-i}$, danou konečnou délkou trajektorie.

Všimněme si, že podle obr. 3 a 4 se velikost součtu Ljapunovova exponentu μ_i a μ_{N+1-i} shoduje s veličinou -2α, tj. s pravou stranou rovnice (10); výraz $\mu_i + \mu_{N+1-i} + 2\alpha$ se liší od nuly o veličinu řádu chyby výpočtu samotných Ljapunovových exponentů. Ukazuje se, že při výpočtech pomocí Rungeovy-Kuttovy metody 4. řádu bylo dosaženo ještě příznivějších výsledků (citujeme podle [5]).

Závěrečné poznámky

S párovou symetrií Ljapunovových exponentů v diskretizovaném modelu dynamiky atmosféry s rayleighovskou disipací a vnější silou nezávisející na čase se setkáváme tehdy, převedeme-li model nelineární transformací s nedegenerovanou Jacobiho maticí (při zanedbání tření a vnější vorticity) na hamiltonovský tvar. Tento poznatek je sám od sebe důležitý z několika příčin. Například nachází uplatnění při formulování požadavků na konečnědimenzionální aproximace systému rovnic při transformaci na hamiltonovský tvar. Vedle toho z předpokladu, že disipativní systém při zanedbání disipace a zdroje vnější vorticity lze převést na hamiltonovský tvar, vyplývá, že při dostatečně velké dimenzi atraktoru lze dynamiku na tomto objektu považovat za kvaziregulární. Za uvedených podmínek převodu bude tato dynamika i kvazihamiltonovská. V hamiltonovských systémech se shodují dimenze stabilní a nestabilní variety. Protože nestabilní ljapunovská varieta náleží vždy atraktoru systému, soudíme, že při velké dimenzi atraktoru bude tato dimenze blízká dvojnásobku kladných Ljapunovových exponentů. Tak tomu bylo vždy při výpočtech dimenzí atraktorů barotropních modelů atmosféry. Je třeba však vědět, že doposud neznáme žádné teorémy o převodu konečnědimenzionálních aproximací barotropních modelů atmosféry na hamiltonovský systém. S jistotou ale můžeme tvrdit, a to na základě numerických experimentů, že je to možné pro galerkinovskou aproximaci uvažovaného modelu dynamiky atmosféry.

L i t e r a t u r a

[1] Dymnikov, V. P., Filatov, A. N.: *Mathematics of Climate Modeling.* Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin 1997, 264 s.

[2] Horák, J.: *Equation of barotropic fluid on a rotating spherical surface and its inertial manifold.* Studia geophys. et geodetica *44* (2000), 26–37.

[3] Foias, J., Sant, J. C.: *On the smoothness of the nonlinear spectral manifolds associated to the Navier-Stokes equations.* Indiana Univ. Math. J. *33* (1984), 911–926.

[4] Dettman, C. P., Morris, G. P.: *Proof of Lyapunov exponent pairing for systems at constant kinetic energy.* Phys. Rev. *E 53* (1996), 5541–5544.

[5] Dymnikov, V. P., Gricun, A. S.: *Parnaja simetrija globalnych pokazatělej Ljapunova na attraktorach modelej dinamiki atmosfery.* Izv. AN. Fizika atmosfery i okeana *37* (2001), 291–296.

[6] Horák, J., Krlín, L.: *Deterministický chaos a matematické modely turbulence.* Academia, Praha 1996, 444 s.

[7] Horák, J.: *Systems of the Fluid Mechanical Type: Applications and Connections.* Academia, Praha 1990, 116 s.

[8] Oseledec, V. I.: *Multiplikativnaja ergodičeskaja teorema. Charakterističeskie pokazatěli Ljapunova dinamičeskich sistem.* Trudy Moskevskogo matematičeskogo obščestva *19* (1969), 179–210.

[9] Horák, J.: *Klima, objekt matematického zkoumání. Část 1. Matematický model klimatu.* Pokroky mat. fyz. astronom. *4* (2001), 313–327.

[10] Arnoľd, V. I.: *Matematičeskie metody klassičeskoj mechaniky.* Nauka, Moskva 1974, 431 s.

[11] Ruelle, D.: *Smooth dynamics and new theoretical ideas in nonequilibrium statistical mechanics.* Report IHRES, Burges sur Yvette 1999, 66 s.

[12] Eckmann, J. P, Ruelle, D.: *Ergodic theory of chaos and strange attractors.* Rev. Modern. Physics *57* (1985), Pt. I.