

Bernhard Kawohl

Symetrie: Ano či ne?

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 48 (2003), No. 4, 265–276

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/141187>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2003

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

# Symetrie: Ano či ne?

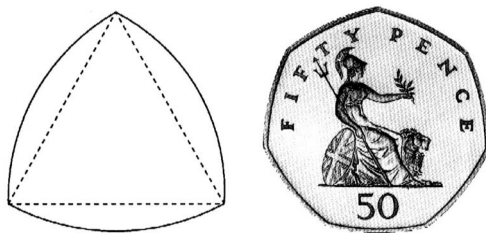
Věnováno Wolfgangu Wendlandovi k jeho šedesátinám, září 1996

Bernd Kawohl, Köln

Mnoho úloh matematické analýzy, které vypadají symetricky, má ve skutečnosti nesymetrická řešení. V tomto článku uvedu několik příkladů. Jedním z nich je úloha o neprůhledném čtverci: Je dán jednotkový čtverec; nalezněte v něm nejkratší křivku  $C$  takovou, že každá přímka, která protne čtverec, protne rovněž křivku  $C$ . Jiným příkladem je Newtonovo těleso minimálního odporu, jedna z nejstarších úloh variačního počtu. Ukážu rovněž osm triků, jak dokázat symetrii řešení parciálních diferenciálních rovnic nebo řešení variačních úloh; jeden z nich vede k řešení otevřeného problému z [2].

## Nesymetrie

**Příklad 1. Válce konstantní šířky.** Představte si situaci, kdy výrobce plochých kruhových objektů, jako jsou pizzy, knoflíky nebo cédéčka, chce zkontrolovat jejich kruhový tvar optickým zařízením, které měří délku jejich horizontálních stínů ze všech možných úhlů. V případě kruhových předmětů je délka všech takových stínů stejná. Jsou však kruhové předměty jedinými, které mají tuto vlastnost? Intuitivně bychom snad usoudili, že tomu tak je, ale obrázek 1a ukazuje, že odpověď je záporná. Jsou tam pravidelné  $(2N + 1)$ -úhelníky, které jsou „zakulacené“ kruhovými oblouky vhodného poloměru. V levé části obrázku by poznali strojní inženýři rotor Wankelova motoru a tvar odpovídající  $N = 3$  známe z britské padesátipence. Křivky ohraničující takovéto množiny jsou odedávna známy jako křivky konstantní šířky. (Viz [23].)



Obr. 1a.

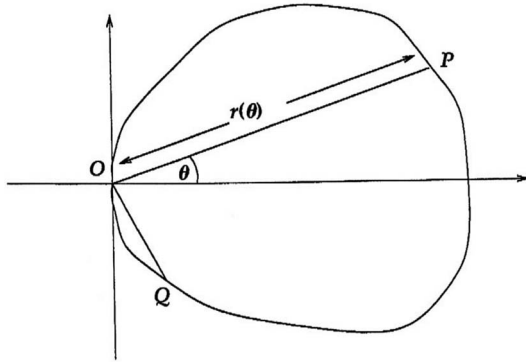
---

Prof. Dr. BERND KAWOHL, Mathematisches Institut Universität zu Köln, D 50923 Köln, Německo; e-mail: kawohl@mi.uni-koeln.de

*Symmetry or not?* Math. Intelligencer 20 (1996), No. 2, 16–22.

© Springer-Verlag 1996

Přeložil OLDŘICH JOHN.



Obr. 1b.

Mimoходом, když britská mincovna razí mince, které nejsou kruhové, šetří materiálem. Neodolám pokušení a uvedu důkaz odpovídajícího tvrzení: Mezi všemi rovinnými oblastmi, jejichž průměr se rovná jedné, má kruh největší plochu.

Metoda důkazu [21] vychází z pozorování, že oblast, jejíž plocha je maximální, musí být konvexní. Podíváme-li se na obrázek 1b, snadno usoudíme, že platí:

$$\text{plocha} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [r^2(\theta) + r^2(\theta - \frac{1}{2}\pi)] d\theta,$$

avšak pro každé  $\theta$  je integrand roven  $OP^2 + OQ^2 = PQ^2 \leq 1$ .

**Příklad 2. Newtonovo těleso nejmenšího odporu.** Těleso se pohybuje zředěnou kapalinou. Částice kapaliny mají velkou střední volnou dráhu a navzájem na sebe nepůsobí. Mohou nicméně narazit na těleso a způsobit dokonale pružný náraz. V tomto případě část jejich momentu hybnosti působí zpomalení tělesa. Pokud je čelo tělesa parametrizováno funkcí  $u = u(x)$ ,  $x \in B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ , kde  $B(0, 1)$  je otevřený kruh o poloměru jedna se středem v počátku, můžeme odpor tělesa vyjádřit funkcí

$$R(u) := \int_{B(0,1)} \frac{1}{1 + |\nabla u|^2} dx.$$

Problém nalezení tvaru čela, při němž je odpor minimální, zkoumal před více než třemi sty lety Isaac Newton (viz [6], [8]). Lze uvažovat různé třídy přípustných funkcí, na nichž se úloha o minimu nekonvexního funkcionalu  $R$  řeší. Ve třídě<sup>1)</sup>

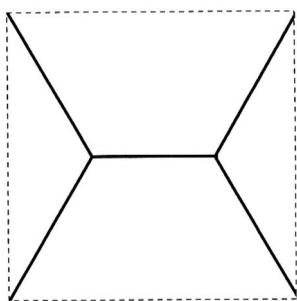
$$A = \{v \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(B(0, 1)) : 0 \leq v(x) \leq M, \ v \text{ je konkávní}\}$$

lze dokázat existenci minimizující funkce  $u$  funkcionalu  $R$ . Newton minimalizoval  $R$  na radiálně symetrických funkcích z  $A$ . Je však minimizující funkce funkcionalu  $R$  na množině  $A$  nutně radiálně symetrická? Pokoušeli jsme se to dokázat se spoluautory

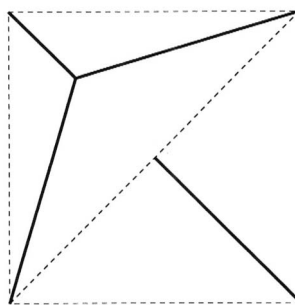
<sup>1)</sup> Třída  $A$  je tedy množina nezáporných konkávních shora omezených funkcí, jejichž zobecněné derivace jsou měřitelné a omezené na každé kompaktní podmnožině množiny  $B(0, 1)$ .

v práci [8]. Mnoho pokusů selhalo. Nakonec jsme dokázali, že platí opak [6]. V důkazu jsme nahradili Newtonovo řešení, jež má kruhové vrstevnice, vhodnou funkcí z  $A$ , vrstevnicemi jejíhož grafu jsou pravidelné mnohoúhelníky s mnoha vrcholy, a ukázali jsme, že to vede ke snížení hodnoty  $R$ . Jinak řečeno, tím jsme ke gradientu přičetli úhlovou derivaci, což mělo za následek zvětšení gradientu a zmenšení  $R$ .

**Příklad 3. Neprůhledný čtverec.** Vlastník čtvercového pozemku o délce strany jedna ví, že jeho pozemkem je vedena rovná telefonní linka v hloubce 30 cm. Aby ji našel, může vykopat žlábek (o celkové délce čtyři) po obvodu čtverce. Když ale vykope stružku pouze podél tří stran, nutně narazí na telefonní linku také. Jaká bude nejmenší délka žlábku, jehož pomocí majitel telefonní linku zaručeně odhalí? Mnozí si po chvilce přemýšlení uvědomí, že žlábek ve tvaru dvou diagonál je kratší (má délku 2,82...),

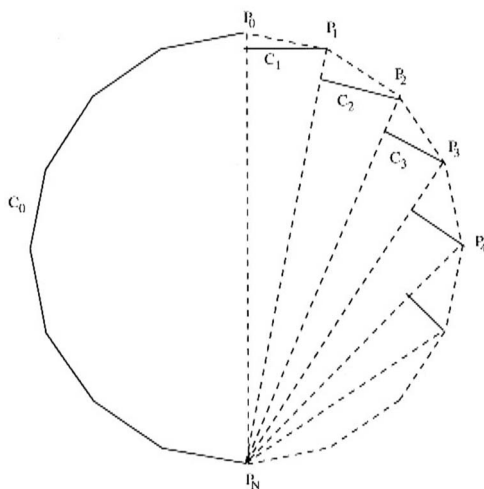


Obr. 2.



Obr. 3.

a čtenáři, kteří jsou obeznámeni s výpočty minimálních ploch, naleznou nejkratší cestu, jež spojuje všechny čtyři vrcholy čtverce. Její tvar vidíme na obrázku 2 — celková délka je 2,73. (Úhel  $2\pi/3$ , pod nímž se sbíhají úsečky, známe rovněž z šestiúhelníků buněk včelího plástu.) Je ale ještě lepší forma žlábku (obr. 3). Má dvě komponenty a celková délka je 2,64. Zdá se, že je to řešení problému, je to však pouze hypotéza. Povšimněme si, že uvedený útvar má pouze jednu osu symetrie, zatímco čtverec má čtyři.



Obr. 4.

Co když nyní zaměníme čtverec pravidelným  $N$ -úhelníkem, jehož vrcholy leží na kružnici o poloměru jedna? Pokud  $N \rightarrow \infty$ , přibližuje se mnohoúhelníkový pozemek jednotkovému kruhu. Intuice nám nyní napovídá, že v tomto případě k objevení přímky protínající kruh (telefonní linky) musíme vykopat žlábek po obvodu kruhu, tedy o celkové délce  $2\pi$ . Ale vhodně sestrojená stružka o délce  $\pi + 2$  poslouží stejně dobře. Získáme ji limitním procesem a je znázorněna na obrázku 4. (Více podrobností nalezne čtenář v práci [19].)

**Příklad 4. Vlastní funkce.** Označme jednotkový kruh v  $R^2$  se středem v počátku symbolem  $\Omega$  a zkoumejme úlohu vlastních čísel

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Úloha je symetrická, Laplaceův operátor  $\Delta$  je invariantní vzhledem k otočení soustavy souřadné kolem počátku, avšak řešení nemusí být radiální. Je ale obecně známo, že první vlastní funkce (neboli základní stav) radiální je. Ve druhé části článku ukážu několik důkazových metod. „Základní stav“ je funkce, která minimalizuje Dirichletův integrál  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  na množině  $A = \{u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} u^2 dx = 1\}$ . Úloha (1) vzniká při (nepříliš přesné) aproximaci popisu kmitající pružné membrány.

Zkoumejme nyní místo kruhové membrány trojrozměrnou pružnou kouli, jejíž chování je popsáno rovnicemi lineární elasticity. Její deformace  $\mathbf{u}$  je vektorovou funkcí, Laplaceův operátor je nahrazen Laméovým operátorem a úloha (1) je zaměněna eliptickou soustavou rovnic

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} + a \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \Lambda \mathbf{u} = 0 & \text{na } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

kde hodnotu  $a = (\lambda + \mu)/\mu$  získáme z Laméových konstant  $\lambda$  a  $\mu$ . Můžeme opět definovat základní stavy, v tomto případě jako vektorové funkce minimalizující funkcionál

$$\int_{\Omega} (|\nabla \mathbf{u}|^2 + a(\operatorname{div} \mathbf{u})^2) dx$$

na odpovídající množině  $A$  vektorových funkcí. Jsou základní stavy stále radiální, tj. závisejí pouze na  $r$  ( $= |x|$ ), nebo mohou být alespoň vyjádřeny ve tvaru  $\mathbf{u}(x) = xg(r)$ , kde  $g$  je skalární funkce? V práci [15] je ukázáno, že odpovědi na obě otázky jsou negativní.

**Příklad 5. Stacionární horký bod.** Představte si konvexní omezené těleso v  $R^3$  (označme je jako  $\Omega$ ), které je ohřáté na počáteční teplotu  $u_0 \equiv 1$  a poté ponořeno do ledové vody. Ze zákona pro vedení tepla plyne, že průběh teploty bude popsán funkcí  $u = u(t, x)$  ( $t > 0$ ,  $x \in \Omega$ ), která řeší úlohu

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{v } R^+ \times \Omega, \\ u \equiv 0 & \text{na } R^+ \times \partial\Omega, \\ u \equiv 1 & \text{na } \{0\} \times \Omega. \end{cases}$$

Pro každé pevné  $t > 0$  existuje jediný bod maxima  $x^0$  funkce  $u$ , tj. nejteplejší místo (viz [18]). Předpokládejme, že tento horký bod  $x^0$  je stacionární a je umístěn v počátku ( $x^0 = 0$ ). Pak můžeme očekávat, že teplo proudí stejnou měrou ve směru  $x$  jako ve směru  $-x$ . Zdá se tedy, že by mělo platit  $\Omega = -\Omega$ , jinými slovy těleso  $\Omega$  by mělo být symetrické podle středu. V práci [20] byla položena otázka, zda pouze středově symetrická tělesa mohou mít stacionární horký bod, a byla zodpovězena záporně. Jako protipříklad v  $R^3$  může sloužit pravidelný čtyřstěn.<sup>2)</sup> (Viz rovněž práce [16] a [18], jež se vztahují k této problematice.)

**Příklad 6. Nesymetrické základní stavy.** V příkladě 4 jsme viděli, že symetrické základní stavy můžeme očekávat, kdykoliv to geometrie systému dovolí. I toto očekávání však musíme brát s rezervou, neboť M. Esteban v práci [11] ukázala nesymetričnost základních stavů na vnějších symetrických oblastech. (Vnější symetrická oblast je definována jako doplněk omezené symetrické oblasti.) V jejím případě základní stavy byly funkcemi minimalizujícími funkcionál  $\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx$  na množině

$$A = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} |v|^{p+1} dx = 1 \right\},$$

kde  $\Omega \subset R^n$ ,  $n \geq 3$  a  $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ .

Jiné nesymetrické základní stavy byly odvozeny v případě podmínek Dirichletova typu na anuloidech. Abychom mohli výsledek přesněji vysvětlit, uveďme formulaci úlohy podrobněji: Budiž  $\Omega \subset R^n$  radiální oblast,  $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ ,  $\alpha \geq 0$ . Minimalizujeme funkcionál  $\int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + \alpha v^2) dx$  na množině  $A = \{v \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} |v|^{p+1} dx = 1\}$ . Odpovídající Eulerova rovnice má v tomto případě tvar  $-\Delta u + \alpha u = \lambda |u|^{p-1} u$  na  $\Omega$ . Je minimalizující funkce  $u$  radiální? Pokud je  $\Omega$  koule, je odpověď kladná a důkaz lze provést (například) pomocí symetrizace. Pokud je ovšem  $n = 2$  a  $\Omega$  je mezikružší (viz [10]) nebo v případě, kdy  $n \geq 3$  a  $\Omega$  je sférická skořepina, je odpověď záporná. (Podrobnosti viz [14], str. 95 a 99. V této knize nalezne čtenář rovněž další odkazy. Příklad soustav je diskutován v článkách [15] a [19].)

**Příklad 7. Nerovnosti Poincaréova typu.** V jednorozměrném případě formulujme úlohu: Nalezněte nejmenší konstantu  $C_p$  takovou, že odhad

$$\|v\|_{L^p(-1,1)} \leq C_p \cdot \|v'\|_{L^2(-1,1)}$$

platí pro všechny funkce  $v \in H^1(-1,1)$ , pro něž  $\int_{-1}^1 v(x) dx = 0$ .

Existence konstanty  $C_p$  a funkce  $u_p$ , pro kterou platí rovnost, je jednoduché cvičení z variačního počtu. Je-li  $p = 2$ , je  $C_2 = (2/\pi)^2 \doteq 0,4057$  a  $u_2(x) = \sin(\frac{1}{2}\pi x)$ . Poznamenejme, že lichost funkce  $u_2(x)$  je určitý druh symetrie.

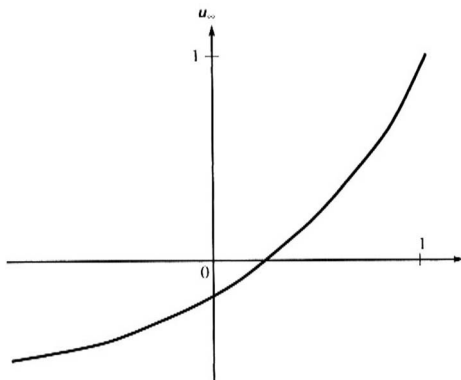
---

<sup>2)</sup> Pozn. překladatele: V tomto případě ale teplo neproudí stejnou měrou ve směru  $x$  jako ve směru  $-x$ .

Co platí v případě  $p = \infty$ ? Je funkce, která odpovídá konstantě  $C_\infty$  (tj. pro niž ve výše uvedené nerovnosti platí rovnost), opět lichá? Metodou monotonního přerovnání (viz [14]) lze dokázat, že funkce  $u = u_\infty$ , jež minimalizuje podíl  $\|v'\|_2/\|v\|_\infty$ , musí být ryze monotonní. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat:

- Funkce  $u$  je rostoucí. (V opačném případě ji nahradíme funkcí  $u(-x)$ .)
- Její absolutní hodnota dosahuje maxima v bodě 1. (V opačném případě ji nahradíme funkcí  $-u(-x)$ .)
- Platí  $\|u\|_\infty = u(1) = 1$ . (Pokud to nenastane, provedeme změnu měřítka.)

Funkce  $u$  má tedy právě jeden nulový bod v intervalu  $(-1, 1)$ . Není to ale bod  $x = 0$ , jak bychom očekávali, takže funkce  $u$  není lichá.



Obr. 5.

Minimalizace výrazu  $\|u'\|_2$  na množině funkcí, jejichž průměr je roven nule, vede formálním postupem k Eulerově rovnici  $u'' + \lambda = 0$ , takže lze očekávat, že minimalizující funkcí bude polynom druhého stupně. Standardním postupem zjistíme, že minimalizující funkce má tvar  $u_\infty(x) = \frac{1}{8}(3x^2 + 6x - 1)$ . Tato funkce zaručeně není lichá. (Její graf je znázorněn na obrázku 5.) Snadno vypočteme nejmenší konstantu:  $C_\infty = \sqrt{2/3} \doteq 0,8165$ . Poznamenejme, že monotonní přerovnání není jediným důkazovým prostředkem. Lze například použít periodického prodloužení funkce  $u$  a posunutí v proměnné  $x$ , abychom ukázali, že bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že  $\|u\|_\infty = u(1) = 1$ .

Na tento asymetrický výsledek mne upozornil C. Schwab. Je dokázán v [13]. (V uvedeném důkazu není použito monotonní přerovnání.) Poté mi sdělili svá nezávisle získaná odvození F. Brock, H. G. Reschke a G. Talenti. (Jejich důkazy nebyly publikovány.)

Vzniká otázka: Jaká je situace pro  $p \in (2, \infty)$ ? Je extrémála  $u_p$  lichá? Věřím, že tomu tak není. Zdá se však, že tento problém je dosud otevřený.<sup>3)</sup>

<sup>3)</sup> *Pozn. překladatele:* Od publikace článku prošla tato problematika dalším vývojem, a to jak zásluhou autora, tak i řady dalších matematiků. Podle sdělení petrohradského matematika A. I. Nazarova je dokázáno, že symetrie (lichost) nastane pro  $1 < p < 6$  (NAZAROV, A. I., J. Math. Sci. 112 (2002), 4029–4047), zatímco pro  $p > 6$  je řešení nesymetrické (BUSLAEV, A. P., KONDRAT'EV, V. A., NAZAROV, A. I., Math. Notes 64 (1998), 719–725).

## Symetrie

Doufám, že několik uvedených příkladů nesymetrie čtenáře přesvědčilo, že každý výrok o symetrii řešení je potřeba pečlivě dokázat. Důkazových metod je mnoho. Některé zde uvedu a ukáži jejich užití na velmi jednoduchých příkladech. Tyto metody fungují samozřejmě i v daleko obecnějších situacích — snaha po co nejobecnějším kontextu by ale zatemnila základní myšlenky technickými detaily.

**Metoda 1. Důkaz symetrie prostřednictvím jednoznačnosti.** Předpokládejme, že okrajová úloha obdobná úloze (1) je invariantní vzhledem k nějaké netriviální grupě transformací (zrcadlení, rotace), avšak má pouze jedno řešení. Potom její řešení je symetrické. (Jinak by totiž úloha měla více než jedno řešení.)

**Metoda 2. Důkaz symetrie prostřednictvím konvexity.** Předpokládejme, že funkce  $u$  minimalizuje ryze konvexní funkcionál  $J = J(v)$  na konvexní množině přípustných funkcí  $v$ . Definičním oborem přípustných funkcí nechť je symetrická množina  $\Omega$ , tj. množina invariantní vzhledem k nějaké grupě transformací. Je-li  $g$  element grupy,  $g(\Omega) = \Omega$ , je rovněž  $u(x) = u(g(x))$ , tj.  $u$  je invariantní vzhledem k téže grupě transformací, jinak by totiž konvexní kombinace  $w(x) = \frac{1}{2}[u(x) + u(g(x))]$  měla menší „energií“:  $J(w) < J(u)$ , což je spor. (Je vidět, že tato metoda je méně obecná než metoda 1.)

**Metoda 3. Důkaz symetrie prostřednictvím přerovnění.** Předpokládejme, že  $u$  minimalizuje funkcionál, který má tvar

$$(3) \quad J(v) = \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + F(v)) \, dx,$$

na jisté množině  $A$  přípustných funkcí  $v$ , jež jsou definovány na tzv. steinerovsky symetrických oblastech  $\Omega \subset R^n$ . To jsou oblasti, které jsou zrcadlově symetrické a jsou konvexní ve směrech ortogonálních k rovině  $P$ , vzhledem k níž jsou symetrické. Je každá minimalizující funkce  $u$  steinerovsky symetrická, tj. klesá tato funkce  $u$  symetricky, vzdalujeme-li se od bodů roviny symetrie  $P$ ? Odpověď je kladná, a to i v případě obecnějších funkcionálů. (Podrobný výklad nalezne čtenář v monografii [14].) Myšlenka důkazu spočívá v přerovňování nesymetrické minimalizující funkce  $u$  v symetricky klesající funkci  $u^*$  s menší energií (tj.  $J(u^*) < J(u)$ ). Tuto metodu lze samozřejmě použít pouze v případech, kdy  $u \in A$  implikuje  $u^* \in A$ .

Stejná otázka může být položena i pro lokální minimum. V tomto případě jsou důkazy daleko obtížnější, neboť přerovnění  $u^*$  nesymetrické funkce  $u$  může být od této funkce v odpovídajícím metrickém prostoru funkcí velmi vzdálené, a abychom se přiblížili původní funkci  $u$ , musíme ji spojit s  $u^*$  jistým druhem homotopie. Tato konstrukce byla úspěšně provedena F. Brockem v [4] variační verzí takzvané metody pohyblivé roviny (moving plane method). Další zobecnění nalezne čtenář v [7].



**Metoda 4. Důkaz symetrie prostřednictvím principu maxima I.** Tato metoda se jednoduše vysvětlí na příkladě semilineární eliptické úlohy na jednotkové kouli  $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ . Hledáme funkci  $u$ , pro kterou

$$(4) \quad \begin{cases} -\Delta u + f(u) = 0 & \text{v } B(0, 1), \\ u > 0 & \text{v } B(0, 1), \\ u = 0 & \text{na } \partial B(0, 1). \end{cases}$$

Velmi hluboký výsledek (viz [12]) říká, že pro každou lipschitzovskou funkci  $f$  je řešení  $u$  radiálně symetrické. K tomu stačí dokázat, že řešení  $u$  je symetrické vzhledem k nadrovině  $\{x: x_1 = 0\}$ . (Stejně argumentace lze totiž použít k důkazu symetrie řešení podle libovolné roviny procházející počátkem, což ale není nic jiného než radiální symetrie.) Postup je tento: vezmeme  $t \in (0, 1)$  a označíme  $C_t = \{x: x_1 > t\} \cap B(0, 1)$  a  $x^t$  bod symetrický k bodu  $x \in C_t$  podle roviny  $\{x: x_1 = t\}$ . Nyní dokážeme tvrzení:

$$(*) \quad \forall t \in (0, 1) \quad \forall x \in C_t: \quad u(x) < u(x^t).$$

Důkaz tohoto tvrzení obsahuje velmi jemné použití principu maxima. (Podrobnosti najde čtenář například v knize [26], str. 118 a další.) Limitním přechodem pro  $t \rightarrow 0+$  v (\*) dostaneme  $u(x) \leq u(x^0)$ , neboli  $u(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq u(-x_1, x_2, \dots, x_n)$  na  $C_0$ . Záměnou  $x_1$  za  $-x_1$  důkaz symetrie  $u$  podle roviny  $x_1 = 0$  dokončíme.

Tento trik je znám jako metoda pohyblivé roviny (angl. moving plane method). Je to velmi obecná metoda, která vede k mnoha jiným zajímavým výsledkům rovněž v případech nesymetrických. O příbuzných variačních metodách je pojednáno v práci [4].

Bez předpokladu lipschitzovskosti funkce  $f$  metoda nemusí fungovat. Protipříklady jsou matematikům pracujícím v této oblasti dobře známy. Případ  $n = 1$  viz [12], str. 220; vícerozměrný protipříklad ( $n \geq 2$ ) byl sestrojen F. Brockem v [5].

**Metoda 5. Důkaz symetrie prostřednictvím principu maxima II.** V práci [2] autoři studovali klasická řešení úlohy

$$(5) \quad \begin{cases} \Delta u + |\nabla u|^m = f(r) & \text{na } B(0, 1), \\ u = \text{const.} & \text{na } \partial B(0, 1) \end{cases}$$

pro  $m \in (0, 1)$  a ukázali jednoznačnost radiálně symetrických řešení. Otázka, zda všechna klasická řešení jsou radiální, zůstala otevřená.

Zdá se, že následující trik nepatří k nejznámějším. Pro jednoduchost předpokládejme, že  $n = 2$ , a označme symbolem  $\Theta$  úhlovou souřadnici bodu  $x$ . Položme  $v = \partial u / \partial \Theta$  a diferencujeme (5) podle  $\Theta$ . Pak dostáváme

$$(6) \quad \begin{cases} \Delta v + m |\nabla u|^{m-2} \nabla u \cdot \nabla v = 0 & \text{na } \Omega, \\ v = 0 & \text{na } \partial \Omega, \end{cases}$$

kde  $\Omega = B(0, 1) \setminus \{x \in B(0, 1): |\nabla u(x)| = 0\}$ . Rovnice (6) je lineární rovnice pro  $v$ , přičemž koeficientem u  $\nabla v$  je funkce omezená a měřitelná na každé  $\Omega' \subset \Omega$ . Z principu maxima plyne, že  $v \equiv 0$ , tj.  $u$  je nutně radiální. Tento trik řeší otevřený problém z [2], jakož i mnoho dalších úloh.

**Metoda 6. Důkaz symetrie prostřednictvím principu jednoznačného prodloužení.**

Tento trik jsem se naučil v práci [22]. Nechť  $u$  je minimizující funkce funkcionálu (3) a nechť  $\Omega$  je (bez újmy na obecnosti) zrcadlově symetrická vzhledem k množině  $\{x: x_1 = 0\}$ . To je poněkud slabší požadavek než steinerovská symetrie. Logo Mercedesu je zrcadlově, nikoliv však steinerovsky symetrické. (Viz obrázek 6.) Má



Obr. 6.

minimizující funkce  $u$  stejnou zrcadlovou symetrii jako oblast  $\Omega$ ? Odpověď je kladná a má docela elegantní důkaz. Rozdělme oblast  $\Omega$  na dvě části  $\Omega_r = \Omega \cap \{x: x_1 > 0\}$  a  $\Omega_l$ , z nichž každá je zrcadlovým obrazem druhé. Energie  $J(u)$  je mezi tyto podoblasti rozdělena stejnoměrně, jinými slovy,

$$(7) \quad \int_{\Omega_l} (|\nabla u|^2 + F(u)) \, dx = \int_{\Omega_r} (|\nabla u|^2 + F(u)) \, dx.$$

Kdyby to neplatilo, byla by (opět bez újmy na obecnosti) levá strana větší než pravá. Pak ale funkce

$$(8) \quad \tilde{u}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} u(x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{pro } x \in \Omega_l, \\ u(-x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{pro } x \in \Omega_r \end{cases}$$

má tu vlastnost, že  $J(\tilde{u}) < J(u)$ , což je spor s předpokladem, že  $u$  je minimizující funkce  $J$  na  $\Omega$ . Je tedy rovnost (7) dokázána. Jestliže  $u$  je minimizující funkcí  $J$ , je jí rovněž  $\tilde{u}$ , definovaná předpisem (8). Avšak  $\tilde{u}$  splývá s  $u$  na levé polovině oblasti  $\Omega$ . Protože však obě funkce splňují Eulerovu rovnici, jejíž řešení mají vlastnost jednoznačného prodloužení, splývá  $u$  s  $\tilde{u}$  na celé oblasti  $\Omega$ , což ale znamená, že  $u$  je zrcadlově symetrická. Co tomu říkáte?

**Metoda 7. Důkaz symetrie prostřednictvím stability.** Zkoumejme následující problém:

$$(9) \quad \begin{cases} -\Delta u + f(u) = 0 & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

kde  $\Omega = B(0, 1)$ . Řekneme, že řešení  $u$  je stabilní, je-li druhá variace příslušného funkcionálu (3) kladná, tj. jestliže

$$(10) \quad \int_{B(0,1)} (|\nabla \varphi|^2 + f'(u)\varphi^2) \, dx > 0$$

pro každou netriviální srovnávací funkci  $\varphi \in H_0^1(0, 1)$ . Stabilní řešení je symetrické. (To jsem se naučil od Alikakose a Batese [1]; viz rovněž [17], kde je výsledek rozšířen na kvazilineární rovnice.) Abychom to dokázali, stačí položit  $\varphi = \partial u / \partial \Theta$ , což je úhlová derivace řešení  $u$ , a přesvědčit se, že pro tuto volbu nerovnost neplatí. Je tedy  $\partial u / \partial \Theta \equiv 0$ , a tudíž  $u$  je symetrická.

**Metoda 8. Důkaz symetrie prostřednictvím funkce  $P$ .** Podívejme se znovu na úlohu (9). Předpokládejme, že pro jisté kladné číslo  $\alpha$  lze dokázat

$$P(x) \equiv |\nabla u|^2 - \alpha F(u(x)) = \text{const.}$$

v množině  $\Omega$ . (Zde používáme obecně přijaté označení, v němž  $F$  je primitivní funkce k  $f$ .) Tento vztah implikuje určitý druh symetrie řešení  $u$ , a to:

- a) radiální symetrii, jak bylo ukázáno v [25] v případě, že  $\Omega = B(0, 1) \subset R^n$ ,  $\alpha = 2/n$  a  $f \equiv -1$ , nebo
- b) závislost  $u$  na jediné proměnné (viz [9]), pokud  $\Omega = R^n$ ,  $\alpha = 2$  a  $f$  je dosti obecná funkce (např.  $f(u) = u^3 - u$ ).

Vysvětleme obě situace podrobněji a pokusme se odhalit, proč první z nich nelze jednoduše rozšířit na případ nekonzantní funkce  $f$ . V případě a) lze vyjít z toho, že funkce  $P$  je harmonická, takže

$$\Delta P = \sum_{i,j=1}^n u_{ij}^2 + \frac{n-1}{n} f'(u) |\nabla u|^2 - \frac{1}{n} f^2(u) = 0.$$

Předpokládáme-li, že  $f' \geq 0$ , potom

$$\sum_{i,j=1}^n u_{ij}^2 \leq \frac{1}{n} f^2(u) = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n u_{ii} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n u_{ii}^2 \leq \sum_{i,j=1}^n u_{ij}^2.$$

Zde jsme užili Schwarzovu nerovnost. Jelikož pravá strana v nerovnosti je rovna levé, dostáváme, že  $u_{ij}(x) = 0$  pro  $i \neq j$  a  $u_{ii}(x) = u_{jj}(x)$  a rovněž  $f'(u) = 0$ . Musí tedy být  $f$  konstantní,  $u_{ii} = (1/n)f(u)$  a  $u$  radiální.

Jiný způsob, jak dokázat tvrzení a), plyne z pozorování, že derivace funkce  $P$  na  $\partial B(0, 1)$  podle vnější normály  $\nu$  je rovna nule. Přitom je

$$\frac{\partial P}{\partial \nu} \equiv u_\nu u_{\nu\nu} - \frac{1}{n} f(u) u_\nu = 0.$$

Předpokládáme-li, že  $u_\nu \neq 0$  a připomeneme-li si, že  $\Delta u = u_{\nu\nu} + (n-1)u_\nu = f(u)$  na  $\partial B(0, 1)$ , dostaneme  $u_{\nu\nu} = (1/n)f(u) = f(u) - (n-1)u_\nu$ , neboli  $u_\nu = (1/n)f(u)$  na  $\partial B(0, 1)$ .

Nyní máme dvě derivace  $u_\nu$  a  $u_{\nu\nu}$  předepsané jako konstanty na hranici, avšak už konstantnost jedné z nich implikuje, že kladné řešení je radiální. To plyne z velmi

jemné analýzy, kterou provedl Serrin v článku [24]. V tomto článku položil rovněž základy metody 4, kterou jsme zde uvedli. Z ní vychází i velmi známá práce [12].

V případě b) nechť  $\nu$  značí směr  $-\nabla u$ ; předpokládejme, že  $u_\nu \neq 0$  v  $R^n$  a  $n \leq 8$ . Z konstantnosti funkce  $P$  plyne, že  $\partial P / \partial \nu = 2u_\nu u_{\nu\nu} - 2f(u)u_\nu = 0$ . Připomeneme-li si, že  $\Delta u \equiv u_{\nu\nu} + (n-1)H(x)u_\nu = f(u)$  na vrstevnicových plochách funkce  $u$ , dostaneme, že jejich střední křivost  $H(x)$  je nulová. Jinými slovy vrstevnicové plochy jsou minimálními plochami. Avšak odtud užitím Bernsteinova výsledku dostáváme, že vrstevnicové plochy funkce  $u$  jsou nadroviny. Pro obecné  $n$  dostaneme též výsledek, avšak musíme vynaložit více úsilí. (Viz [9], věta 5.1.)

**Poděkování.** Je pro mne potěšením poděkovat F. BROCKOVI za mnoho plodných diskusí o otázkách symetrie a M. MESTEROVI za jeho odbornou pomoc s počítačovým zpracováním obrázků. Děkuji rovněž Britské královské mincovně za poskytnutí obrázku mince 50 p.

### Poznámky připojené v říjnu 1997

Vynikající přehledný článek týkající se příkladu 1 napsali G. D. CHAKERIAN a H. GROEMER: *Convex bodies of constant width* do sborníku *Convexity and its Applications*, red. P. M. GRUBER, J. M. WILLS, Birkhäuser 1983, 49–96.

Historika o vztahu příkladu 1 k neštěstí, které postihlo Challenger, je obsažena v knize R. FEYNMANA *To nemyslíte vážně, pane Feynmane!*, Academia, Praha 1999.

O příkladu 7 se zmiňují rovněž B. DACOROGNA, W. GANGBO a N. SUBIA v článku *Sur une généralisation de l'inégalité de Wirtinger*, Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. Non Linéaire 9 (1992), 29–50.

### Několik slov o autorovi

Bernhard Kawohl studoval matematiku v Darmstadtu, v Ann Arbor a v Praze. Zabývá se zejména kvalitativními a geometrickými vlastnostmi (tj. tvarem) řešení variačních úloh. Působil jako učitel na Brown University, v Heidelbergu, na Georgia Tech a v Erlangenu. V roce 1993 se stal řádným profesorem a vedoucím katedry aplikované matematiky na univerzitě v Kolíně nad Rýnem. Organizuje výjezdní semináře, které se těší u studentů značné oblibě. Ve volném čase zpívá ve sboru — touto činností se odreagovává od stresu z fakultních schůzí a od přemýšlení o matematických problémech. Je ženatý a má dvě děti.

Bernd Kawohl byl v Praze na tříměsíčním postdoktorském pobytu u profesora Jindřicha Nečase na podzim roku 1979. Od té doby se do Prahy rád vrací ke krátkodobějším pobytům. Podle svých slov dal první jméno svému synovi Karlu Jonatanovi po Karlu IV.

### L i t e r a t u r a

- [1] ALIKAKOS, N. D., BATES, P. W.: *On the singular limit in a phase field model of phase transitions*. Analyse nonlinéaire, Ann. Inst. Henri Poincaré 5 (1988), 141–178.
- [2] BARLES, G., DIAZ, G., DIAZ, J. I.: *Uniqueness and continuum of foliated solutions for a quasilinear elliptic equation with a nonlipschitz nonlinearity*. Comm PDE 17 (1992), 1037–1050.
- [3] BRÈZIS, H., NIRENBERG, L.: *Positive solutions of nonlinear equations involving critical Sobolev components*. Commun. Pure Appl. Math. 36 (1983), 437–477.

- [4] BROCK, F.: *Continuous polarization and symmetry of solutions of variational problems with potentials*. In: Calculus of Variations, Applications and Computations, Pont-à-Mousson 1994. Pitman Res. Notes in Math. 326 (1995), 25–35.
- [5] BROCK, F.: *Continuous rearrangement and symmetry of solutions of elliptic problems*. Proc. Indian. Acad. Sci. Math. Sci. 110 (2000), 157–204.
- [6] BROCK, F., FERONE, V., KAWOHL, B.: *A symmetry problem in the calculus of variations*. Calculus of Variations and PDE 4 (1996), 593–599.
- [7] BROCK, F., SOLYNIN, A.: *An approach to symmetrization via polarization*. Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), 1759–1796.
- [8] BUTTAZZO, G., FERONE, V., KAWOHL, B.: *Minimum problems over sets of concave functions and related questions*. Mathematische Nachrichten 173 (1995), 71–89.
- [9] CAFFARELLI, L., GAROFALO, N., SEGALA, F.: *A gradient bound for entire solutions of quasilinear equations and its consequences*. Commun. Pure Appl. Math. 47 (1994), 1457–1473.
- [10] COFFMANN, C. V.: *A nonlinear boundary value problem with many positive solutions*. J. Differ. Equations 54 (1984), 429–437.
- [11] ESTEBAN, M.: *Nonsymmetric ground states of symmetric variational problems*. Commun. Pure Appl. Math. 44 (1991), 259–274.
- [12] GIDAS, B., NI, W. M., NIRENBERG, L.: *Symmetry and related properties via the maximum principle*. Comm. Math. Phys. 68 (1979), 209–243.
- [13] GERDES, K., SCHWAB, C.: *Hierarchic models of Helmholtz problems on thin domains*. Math. Models & Methods Appl. Sci., to appear.
- [14] KAWOHL, B.: *Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE*. Springer Lecture Notes in Mathematics 1150 (1985).
- [15] KAWOHL, B., SWEERS, G.: *Remarks on eigenvalues and eigenfunctions of a special elliptic systems*. J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) 38 (1987), 730–740.
- [16] KAWOHL, B.: *A conjectured heat flow problem, Solution*. SIAM Review 37 (1995), 105–106.
- [17] KAWOHL, B.: *Instability criteria for solutions of second order elliptic quasilinear differential equations*. In: Partial differential equations and applications. Eds. P. MARCELLINI, G. TALENTI, E. VESENTINI. Marcel Dekker, Lecture Notes in Pure and Applied Math. 177 (1996), 201–207.
- [18] KAWOHL, B.: *A short note on hot spots*. Zeitschr. Angew. Math. Mech, Suppl. 2, 76 (1996), 569–570.
- [19] KAWOHL, B.: *The opaque square and the opaque circle*. In: General Inequalities VII, Int. Ser. Numer. Math. 123 (1997), 339–346.
- [20] KLAMKIN, M. S.: *A conjectured heat flow problem, Problem*. SIAM Review 36 (1994), 107.
- [21] LITTLEWOOD, J. E.: *A Mathematician's Miscellany*. Methuen & Co. Ltd., London 1953.
- [22] LOPEZ, O.: *Radial and nonradial minimizers for some radially symmetric functionals*. Electronic Journal of Differential equations 1996 (3), 1–14. <http://ejde.math.swt.edu>
- [23] RADEMACHER, H., TOEPLITZ, O.: *Von Zahlen und Figuren*. Springer, Berlin 1930. Anglický překlad: *The enjoyment of mathematics*, Princeton, Univ. Press, Princeton 1994.
- [24] SERRIN, J.: *A symmetry problem in potential theory*. Arch. Ration. Mech. Anal. 43 (1971), 304–318.
- [25] WEINBERGER, H.: *Remark on the preceding paper of Serrin*. Arch. Ration. Mech. Anal. 43 (1971), 319–320.
- [26] RENARDY, M., ROGERS, R. C.: *An Introduction to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag 1992.