Martin Markl

Operády v současné matematice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 48 (2003), No. 3, 239–250

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141182

Operády v současné matematice

Martin Markl, Praha

Operády jsou, zhruba řečeno, objekty popisující rozličné algebraické struktury. Definoval je J. P. May v roce 1972 v monografii [13] a jsou vlastně zjednodušenou verzí tzv. PROPů (zkratka za PROduct and Permutation category), které se objevily o deset let dříve v práci [9] S. MacLanea. Slovo operáda (anglicky operad) je uměle vytvořené označení „něčeho, co operuje“.

Motivací pro studium operád byly v té době dva hlavní a navzájem související topologické problémy — problém rozpoznání prostoru smyček (viz část 3) a problém charakterizace homotopicky invariantních struktur na topologických prostorech. V této souvislosti jmenujme také průkopnickou práci J. M. Boardmana a R. M. Vogta [1].

Renesanci operád předznamenal v roce 1994 článek [5] V. Ginzburga a M. M. Kapranova, který zpopularizoval již dříve tušenou strukturu operády na prostoru modulů stabilních komplexních křivek rodu 0 (viz část 4), a tím podnítil studium operád jako takových, tedy nikoliv pouze jako prostředku k popisu algebraických struktur. Bouřlivý zájem o operády nepolevil a trvá dodnes. Jejich aplikace můžeme zhruba rozdělit do následujících skupin.

Komplexní geometrie. Zejména jde o studium modulů komplexních křivek s aplikacemi v enumerativní geometrii, teorii Frobeniových variet, kvantových kohomologií a kohomologické teorii pole (o ní se zmíníme v částech 1 a 4). Systematický výklad najdeme v monografii [10].

Reálná geometrie. Hlavními oblastmi aplikací jsou kompaktifikace reálných konfiguračních prostorů (zmíníme se o nich v části 4) a jejich použití v teorii iterovaných prostorů smyček [4], důkaz Deligneovy domněnky a formality Hochschildových kohomologií funkcí na hladkých varietách [7].

Matematická fyzika. Formalita zmíněná v předchozím bodu implikuje existenci deformačního kvantování Poissonových variet, viz opět [7]. Nesmíme zapomenout ani na konformní teorii pole [6] (viz také část 4) a Kreimerův přístup k renormalizaci [2].

Algebra. V části 5 pojednáme o operadických kohomologiích [3], o homotopicky invariantních strukturách v algebře a interpretaci některých klasických objektů, jako jsou $A(\infty)$-algebry, z pohledu teorie operád [11].

Modelové struktury. Překotný vývoj podnítil zájem o vlastnosti *kategorie* operád. Jmenujme alespoň výsledky o takzvané uzavřené modelové struktuře a za všechny práce uveďme [14]. Kofibrantní operády v části 5 souvisejí s touto modelovou strukturou.

RNDr. Martin Markl, DrSc. (1960), Matematický ústav AV ČR, Praha.

Práce na tomto článku byla podpořena grantem GA AV ČR A1019203. Článek vychází z přednášky přednesené autorem dne 1. 3. 2002 v Matematickém ústavu AV ČR v Praze.

Cílem tohoto článku je poskytnout čtenáři základní informace o operádách a dotknout se některých aplikací. V prvních dvou částech uvedeme motivující příklady a nejdůležitější definice. Ve zbývajících částech probereme vybrané aplikace teorie operád. Tyto části jsou v podstatě nezávislé a čtenář si může vybrat pouze ty, které jsou nejbližší jeho matematickému vzdělání. Základní citací je monografie [12], ve které je také možné najít rozsáhlý historický úvod s odkazy k původním zdrojům. K prvnímu seznámení s operádami můžeme doporučit i přehledný článek [8].

1. Příklady

Pro zjednodušení budeme předpokládat, že všechny algebraické objekty v tomto článku jsou definovány nad pevně zvoleným tělesem $\mathbf{k}$ charakteristiky 0. Místo obecného $\mathbf{k}$ je možné si bez velké újmy na obecnosti představovat těleso $\mathbf{R}$ reálných nebo těleso $\mathbf{C}$ komplexních čísel.

Jak je obvyklé, slovo „algebra" bude mít dvojí význam. Buď bude označovat konkrétní algebraickou strukturu (například Lieovu algebru), nebo oblast matematiky zabývající se algebraickými strukturami. Uveďme následující příklady.

Asociativní algebra je vektorový prostor V společně s operací $\mu\colon V \otimes V \to V$, která je *asociativní* v tom smyslu, že

$$\mu\big(\mu(u,v),\, w\big) = \mu\big(u,\, \mu(v,w)\big) \quad \text{pro každé } u,v,w \in V. \tag{1}$$

V předchozí definici symbol $\otimes$ označuje *tenzorový součin* vektorových prostorů. Pro naše účely postačí říct, že tenzorový součin vektorových prostorů V a W je vektorový prostor $V \otimes W$ takový, že pro libovolný vektorový prostor U je množina lineárních zobrazení $V \otimes W \to U$ stejná jako množina bilineárních zobrazení $V \times W \to U$. Zápisem $\mu\colon V \otimes V \to V$ tedy pouze vyjadřujeme, že μ je bilineární zobrazení $V \times V \to V$. Pro n-násobný tenzorový součin $V \otimes \cdots \otimes V$ (n-krát) budeme používat zkrácený zápis $V^{\otimes n}$.

Operaci μ interpretujeme jako *násobení* a obvykle píšeme uv místo $\mu(u,v)$. Asociativita (1) se potom zapíše jednoduše jako $(uv)w = u(vw)$. Nejznámějším netriviálním příkladem asociativní algebry je patrně algebra čtvercových $n \times n$ matic $M_n(\mathbf{k})$ s koeficienty v $\mathbf{k}$ s obvyklým maticovým násobením.

Asociativní algebra je *komutativní*, jestliže $uv = vu$ pro každé $u, v \in V$. Jako příklad uveďme algebru $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ mnohočlenů v proměnných $x_1, \ldots, x_n$. Jiným příkladem je algebra funkcí $F(S) := \{f : S \to \mathbf{k}\}$ na množině S s násobením „bod po bodu": $(fg)(s) := f(s)g(s)$ pro $s \in S$.

Lieova algebra je vektorový prostor V s bilineární operací $[-,-]\colon V \otimes V \to V$, která je antisymetrická, $[u,v] = -[v,u]$, a splňuje *Jacobiho identitu*:

$$\big[[u,v],\, w\big] + \big[[v,w],\, u\big] + \big[[w,u],\, v\big] = 0 \quad \text{pro každé } u,v,w \in V.$$

Typickým příkladem jsou vektorová pole $\chi(M)$ na hladké varietě M s násobením Lieovou závorkou $[-,-]$. Vektorová pole jsou speciálním případem infinitezimálních automorfizmů, které také obvykle tvoří, alespoň „morálně", Lieovu algebru.

Příkladem struktury s více operacemi jsou *Poissonovy algebry.* Poissonova algebra je vektorový prostor V se dvěma strukturami, totiž strukturou komutativní asociativní algebry s násobením $u, v \mapsto uv$ a strukturou Lieovy algebry s násobením $u, v \mapsto [u, v]$. Tyto dvě struktury jsou svázány distributivním zákonem

$$[uv,\, w] = u[v, w] + [u, w]v \quad \text{pro každé } u, v, w \in V.$$

Kohomologická teorie pole. Uveďme složitější příklad. Pro každé $n \geqq 2$ je zadána n-lineární operace $(-, \dots, -)\colon V^{\otimes n} \to V$, která je totálně symetrická, tj.

$$(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = (v_1, \dots, v_n),$$

pro každou permutaci n prvků $\sigma \in \Sigma_n$. Tyto operace dále splňují

$$\text{(2)} \qquad \sum_{(S,T)} \big((u, v, x_i;\, i \in S), w, x_j;\, j \in T\big) = \sum_{(S,T)} \big(u, (v, w, x_i;\, i \in S), x_j;\, j \in T\big),$$

kde $u, v, w, x_1, \dots, x_n \in V$ a (S, T) probíhá všechny disjunktní rozklady $S \sqcup T = \{1, \dots, n\}$. Pro $n = 0$ axiom (2) znamená asociativitu operace $(-, -)$, tedy $\big((u, v),\, w\big) = \big(u,\, (v, w)\big)$. Pro $n = 1$ obdržíme

$$\big((u, v), w, x\big) + \big((u, v, x), w\big) = \big(u, (v, w, x)\big) + \big(u, (v, w), x\big),$$

a tak dále. S touto strukturou se znovu setkáme v části 4.

Pokusme se zobecnit uvedené příklady a formulovat, co rozumíme pojmem algebra. Pro začátek si povšimněme, že všechny uvedené příklady algeber jsou tvořeny multilineárními operacemi (případně s jistou symetrií), splňujícími axiomy složené z lineárních kombinací kompozic těchto strukturních operací. Operády jsou objekty, které podobné obecné algebry organizují.

2. Operády

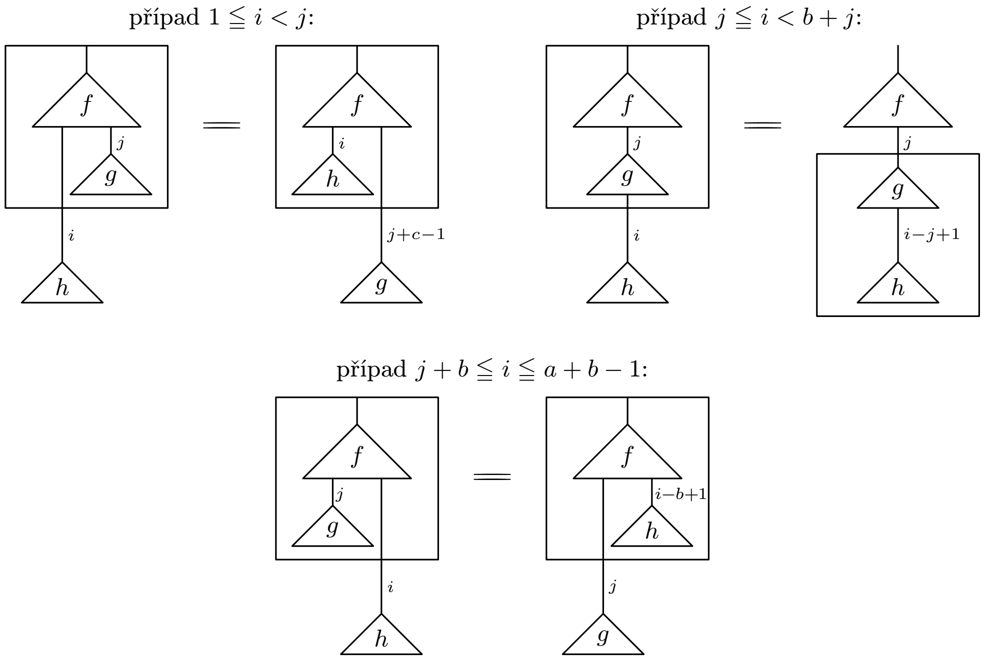
Začněme následujícím příkladem. Nechť V je vektorový prostor a pro každé $n \geqq 1$ označme

$$\mathcal{E}nd_V(n) := \mathit{Hom}(V^{\otimes n}, V)$$

prostor všech n-lineárních zobrazení prostoru V do V. Povšimněme si dvou základních operací majících smysl pro libovolná multilineární zobrazení.

Předně argumenty libovolného multilineárního zobrazení můžeme permutovat. Formálně to vyjádříme reprezentací symetrické grupy Σ_n na prostoru $\mathcal{E}nd_V(n)$: pro $f \in \mathcal{E}nd_V(n)$ a $\sigma \in \Sigma_n$ definujeme

$$(f\sigma)(v_1, \dots, v_n) := f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) \quad \text{pro } v_1, \dots, v_n \in V.$$



Obr. 1. Rovnice (3) reprezentovaná „vývojovými diagramy“.

Druhou operací je skládání multilineárních zobrazení. Podrobněji, pro $f \in \mathcal{E}nd_V(n)$, $g \in \mathcal{E}nd_V(m)$ a $1 \leqq i \leqq n$ definujeme $(f \circ_i g) \in \mathcal{E}nd_V(m+n-1)$ předpisem

$$(f \circ_i g)(v_1, \dots, v_{m+n-1}) := f\big(v_1, \dots, v_{i-1}, g(v_i, \dots, v_{i+m-1}), v_{i+m}, \dots, v_{m+n-1}\big).$$

Jinými slovy $f \circ_i g$ vznikne vložením g na místo i-tého argumentu f.

Snadno ověříme, že operace $\circ_i$ splňují pro každé $f \in \mathcal{E}nd_V(a)$, $g \in \mathcal{E}nd_V(b)$ a $h \in \mathcal{E}nd_V(c)$ rovnici

$$(3) \qquad (f \circ_j g) \circ_i h = \begin{cases} (f \circ_i h) \circ_{j+c-1} g, & \text{jestliže } 1 \leqq i < j, \\ f \circ_j (g \circ_{i-j+1} h), & \text{jestliže } j \leqq i < b + j, \\ (f \circ_{i-b+1} h) \circ_j g, & \text{jestliže } j + b \leqq i \leqq a + b - 1. \end{cases}$$

Podstatu rovnosti (3) objasňuje obrázek 1. Multilineární zobrazení jsou na něm naznačena trojúhelníčky s „výstupem“ v horním vrcholu a „vstupy“ v základně. Dále si povšimněme, že pro identické zobrazení $\mathbf{1}_V := id_V : V \to V \in \mathcal{E}nd_V(1)$ platí

$$(4) \qquad \mathbf{1}_V \circ_1 f = f \quad \text{a} \quad f \circ_i \mathbf{1}_V = f,$$

kdykoliv $f \in \mathcal{E}nd_V(n)$ a $1 \leqq i \leqq n$. Tedy $\mathbf{1}_V$ je společnou jednotkou operací $\circ_i$. Reprezentace symetrických grup jsou také v určitém smyslu kompatibilní s operacemi $\circ_i$, ale příslušné rovnice zde nebudeme uvádět, protože jsou nezajímavé. Systém $\mathcal{E}nd_V := \{\mathcal{E}nd_V(n)\}_{n \geq 1}$ se nazývá *operáda endomorfizmů* prostoru V. Obecná operáda je abstrakcí tohoto pojmu:

Operáda je posloupnost vektorových prostorů $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(n)\}_{n \geqq 1}$ s reprezentací symetrické grupy Σ_n na každé komponentě $\mathcal{P}(n)$, jednotkou $\mathbf{1}_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}(1)$ a operacemi $\circ_i \colon \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(m) \to \mathcal{P}(m+n-1)$, které splňují (3), (4) *a které jsou kompatibilní s reprezentacemi symetrických grup.*

Obvyklým způsobem definujeme *homomorfizmus* $A \colon \mathcal{S} \to \mathcal{Q}$ operád $\mathcal{S}$ a $\mathcal{Q}$ jako posloupnost lineárních zobrazení $A(n) \colon \mathcal{S}(n) \to \mathcal{Q}(n)$ respektujících strukturní operace. Podrobněji to znamená kompatibilitu s reprezentací symetrické grupy (tzv. ekvivarianci)

$$A(n)(f\sigma) = \big(A(n)f\big)\sigma \quad \text{pro každé } f \in \mathcal{S}(n),\ \sigma \in \Sigma_n, \tag{5}$$

a kompatibilitu s operacemi $\circ_i$, tedy

$$A(m+n-1)(f \circ_i g) = A(n)(f) \circ_i A(m)(g) \quad \text{pro každé } f \in \mathcal{S}(n) \text{ a } g \in \mathcal{S}(m). \tag{6}$$

Samozřejmě také $A(1)(\mathbf{1}_{\mathcal{S}}) = \mathbf{1}_{\mathcal{Q}}$. Nyní jsme připraveni na nejdůležitější definici této části.

Algebra nad operádou $\mathcal{P}$, jinak také $\mathcal{P}$-algebra, je homomorfizmus $A \colon \mathcal{P} \to \mathcal{E}nd_V$.

Zhruba lze říci, že pro každý typ algeber existuje operáda $\mathcal{P}$ taková, že algebry daného typu jsou $\mathcal{P}$-algebry ve smyslu předchozí definice. Pokusme se to ilustrovat příkladem.

Nechť $\mathcal{C}om = \{\mathcal{C}om(n)\}_{n \geqq 1}$ je operáda s komponentami $\mathcal{C}om(n) := \mathbf{k}$ a triviální reprezentací symetrické grupy. Všechny strukturní $\circ_i$-operace jsou dané identickým ztotožněním

$$\circ_i \colon\ \mathcal{C}om(n) \otimes \mathcal{C}om(m) = \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \xrightarrow{\cong} \mathbf{k} = \mathcal{C}om(m+n-1)$$

a $\mathbf{1}_{\mathcal{C}om} := 1 \in \mathbf{k} = \mathcal{C}om(1)$. Ukažme, jak homomorfizmus operád $A \colon \mathcal{C}om \to \mathcal{E}nd_V$ definuje komutativní asociativní algebru na prostoru V.

Podívejme se nejprve na první komponentu $A(1) \colon \mathcal{C}om(1) = \mathbf{k} \to Hom(V,V) = \mathcal{E}nd_V(1)$ homomorfizmu A. Lineární zobrazení $A(1)$ je jednoznačně určeno svou hodnotou na $\mathbf{1}_{\mathcal{C}om} = 1 \in \mathbf{k}$. Protože však $A(1)(\mathbf{1}_{\mathcal{C}om}) = \mathbf{1}_V = id_V$, komponenta $A(1)$ neobsahuje žádnou informaci.

Také zobrazení $A(2)$ je určeno svou hodnotou $A(2)(1) \in Hom(V \otimes V, V)$. Označme toto bilineární zobrazení symbolem $\mu := A(2)(1) \colon V \otimes V \to V$. Protože $A(2)$ je ekvivariantní (viz rovnice (5)) a $\mathcal{C}om(2)$ je triviální reprezentace grupy Σ_2, nutně $\mu(u,v) = \mu(v,u)$, což je komutativita μ.

Podívejme se nyní na komponentu $A(3) \colon \mathbf{k} \to Hom(V^{\otimes 3}, V)$. Rovnice (6) pro $m = n = 2$ a $i = 1$, 2 říkají, že

$$A(3)(1 \circ_1 1)(u,v,w) = \mu\big(\mu(u,v),\, w\big) \quad \text{a} \quad A(3)(1 \circ_2 1)(u,v,w) = \mu\big(u,\, \mu(v,w)\big).$$

Z rovnosti $1 \circ_1 1 = 1 \circ_2 1$, která podle definice platí v operádě $\mathcal{C}om$, okamžitě odvodíme asociativitu $\mu\big(\mu(u,v),\, w\big) = \mu\big(u,\, \mu(v,w)\big)$. Ověřili jsme tedy, že homomorfizmus operád $A \colon \mathcal{C}om \to \mathcal{E}nd_V$ definuje na prostoru V strukturu komutativní algebry. Opačná implikace se dokáže snadno.

Podobně asociativní algebry jsou algebry nad operádou $\mathcal{A}ss = \{\mathcal{A}ss(n)\}_{n\geq 1}$, jejíž komponenta $\mathcal{A}ss(n)$ je regulární reprezentace $\mathbf{k}[\Sigma_n]$ grupy Σ_n. S dalšími příklady operád se setkáme v následujících částech.

Poznamenejme, že zdaleka ne všechny algebraické struktury lze popsat pomocí operád. Zhruba řečeno, operády popisují algebry se strukturními operacemi typu $V^{\otimes n} \to V$, což vylučuje například Hopfovy algebry s konásobením $\Delta\colon V \to V \otimes V$. Axiomy algeber nad operádami nemohou obsahovat opakované proměnné, což vylučuje například Booleovy algebry s axiomem $x \vee x = x \wedge x = x$. Vyloučeny jsou dále axiomy s existenčními kvantifikátory, tedy například algebry s axiomy typu „$\forall x\, \exists y$ takové, že $xy = 0$“.

Studiem obecných algeber se také zabývá obor *univerzální algebra*. Z jeho pohledu jsou ovšem algebry nad operádami téměř triviální. Právě ve vhodně zvolené obecnosti však spočívá kouzlo. Operády totiž zdaleka neslouží pouze k popisu algeber, ale žijí svůj vlastní emancipovaný život, do něhož nahlédneme v dalších částech.

3. Klasické období

V předchozí části jsme se zabývali operádami v kategorii vektorových prostorů. Podstatné bylo, že vektorové prostory tvoří *symetrickou monoidální kategorii*, tedy kategorii, v níž je, zhruba řečeno, možné násobit objekty mezi sebou — v případě vektorových prostorů tenzorovým součinem $V, W \mapsto V \otimes W$. Není těžké se přesvědčit, že operády mají smysl i v *každé* symetrické monoidální kategorii, a nejenom tedy v kategorii vektorových prostorů.

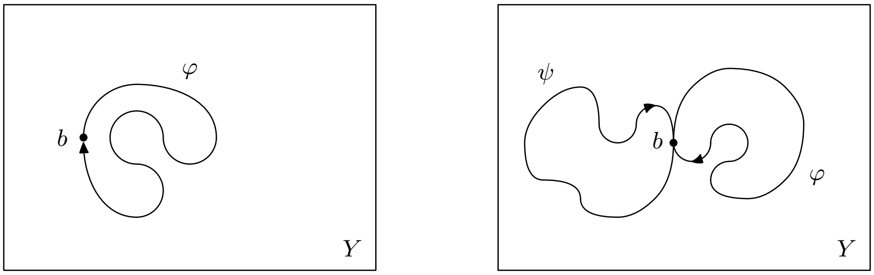
Tuto část věnujeme operádám v kategorii *topologických prostorů* s monoidální strukturou danou kartézským součinem $X, Y \mapsto X \times Y$. Taková operáda je posloupnost topologických prostorů $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(n)\}_{n\geq 1}$ se strukturními operacemi $\circ_i\colon \mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(m) \to$ $\to \mathcal{P}(m + n - 1)$, o kterých se předpokládá, že splňují axiomy analogické axiomům operád v kategorii vektorových prostorů, jak byly uvedeny v části 2.

Operáda endomorfizmů $\mathcal{E}nd_Z = \{\mathcal{E}nd_Z(n)\}_{n\geq 1}$ topologického prostoru Z je tvořena prostory $\mathcal{E}nd_Z(n) := \mathcal{C}ont(Z^{\times n}, Z)$ spojitých zobrazení z n-té kartézské mocniny prostoru Z do Z. Struktura $\mathcal{P}$-algebry na topologickém prostoru Z je dána spojitým homomorfizmem operád $A\colon \mathcal{P} \to \mathcal{E}nd_Z$.

Připomeňme, že v topologii obvykle ztotožňujeme prostory lišící se od sebe pouze spojitými deformacemi. O takových prostorech říkáme, že mají stejný *homotopický typ*.

Přenesme se nyní zpět do sedmdesátých let minulého století, do „zlatého věku“ algebraické topologie. Jedním z hlavních problémů byl tehdy problém charakterizace (rozpoznání) prostorů s homotopickým typem prostoru smyček. Zopakujme si potřebné definice.

Nechť Y je topologický prostor (např. euklidovská rovina $\mathbf{R}^2$) a $b \in Y$ pevně zvolený bod. *Prostor smyček* $\Omega(Y)$ je prostor všech spojitých zobrazení $\varphi\colon [0,1] \to Y$ takových, že $\varphi(0) = \varphi(1) = b$. Představu o prvcích prostoru $\Omega(Y)$ dává obrázek 2.



Obr. 2. Vlevo: typický element prostoru $\Omega(Y)$. Vpravo: navazování smyček.

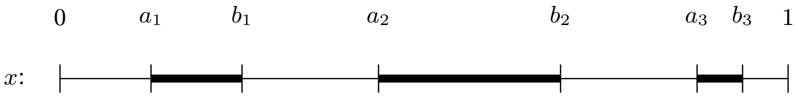
Smyčky lze vzájemně „navazovat". Formálněji řečeno, pro φ, $\psi \in \Omega(Y)$ definujeme $\varphi * \psi \in \Omega(Y)$ předpisem

$$(\varphi * \psi)(t) := \begin{cases} \varphi(2t) & \text{pro } \ 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}, \\ \psi(2t-1) & \text{pro } \ \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1. \end{cases} \tag{7}$$

Geometrický smysl této operace opět vysvětluje obrázek 2. Ukažme, že $\Omega(Y)$ je algebra nad operádou $\mathcal{C}_1 = \{\mathcal{C}_1(n)\}_{n \geqq 1}$, která je tvořena prostory

$$\mathcal{C}_1(n) := \\ = \{(a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n) \in \mathbf{R}^{2n} : 0 \leqq a_1 < b_1 \leqq a_2 < b_2 \leqq \dots \leqq a_n < b_n \leqq 1\}.$$

Například typický prvek $x := (a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3)$ prostoru $\mathcal{C}_1(3)$ si můžeme představit takto:

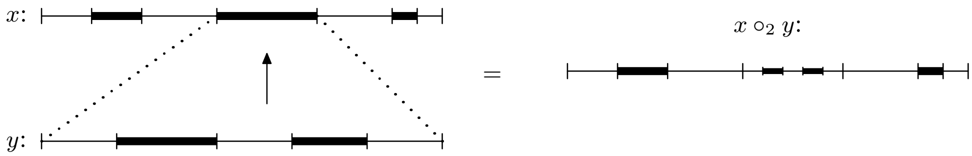


Vidíme, že $\mathcal{C}_1(n)$ je prostor konfigurací n „malých" intervalů v jednotkovém intervalu $[0, 1]$. Popišme nyní strukturní operace $\circ_i$.

Nechť $x = (a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n) \in \mathcal{C}_1(n)$, $y = (a'_1, b'_1; a'_2, b'_2; \dots; a'_m, b'_m) \in \mathcal{C}_1(m)$ a $1 \leqq i \leqq n$. Potom $x \circ_i y \in \mathcal{C}_1(m + n - 1)$ je konfigurace vzniklá „vlepením" konfigurace y, lineárně zmenšené koeficientem $b_i - a_i$, na místo i-tého podintervalu $[a_i, b_i]$ konfigurace x. Věříme, že vše ozřejmí obrázek 3. Operáda $\mathcal{C}_1$ se nazývá *operáda malých intervalů*.

V úvodu této části jsme vysvětlili, že struktura $\mathcal{C}_1$-algebry na prostoru $\Omega(Y)$ je dána operadickým homomorfizmem s komponentami $A(n)\colon \mathcal{C}_1(n) \to \mathcal{E}nd_{\Omega(Y)}(n)$. Jinými slovy, každému $\alpha \in \mathcal{C}_1(n)$ musíme přiřadit spojité zobrazení $A(n)(\alpha)\colon \Omega(Y)^{\times n} \to \to \Omega(Y)$. Toto zobrazení je dáno předpisem

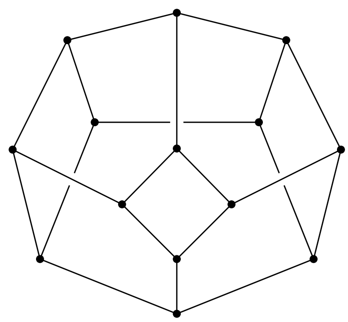
$$A(n)(\alpha)(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) := \begin{cases} \varphi_i\Big(\dfrac{t - a_i}{b_i - a_i}\Big), & \text{jestliže } \ a_i \leqq t \leqq b_i \\ & \text{pro nějaké } \ i \in \{1, \dots, n\}, \\ b & \text{v opačném případě.} \end{cases}$$



Obr. 3. Strukturní operace operády malých intervalů. Obrázek naznačuje kompozici $x \circ_2 y \in$ $\in \mathcal{C}_1(4)$ prvků $x \in \mathcal{C}_1(3)$ a $y \in \mathcal{C}_1(2)$.

Předchozí definice říká, že $A(n)(\alpha)(\varphi_1, \dots, \varphi_n)\colon [0,1] \to Y$ je zobrazení, dané na podintervalech $[a_i, b_i] \subset [0,1]$ reparametrizacemi smyček $\varphi_i\colon [0,1] \to Y$. Všechny ostatní body intervalu $[0,1]$ jsou zobrazeny do bodu b. Navazování (7) je zvláštním případem této konstrukce: $\varphi * \psi = A(\alpha)(\varphi, \psi)$ pro $\alpha = (0, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, 1) \in \mathcal{C}_1(2)$.

Operáda $\mathcal{C}_1$ má podstatu odlišnou od operád z předchozího paragrafu. Zatímco např. komponenta $\mathcal{A}ss(2)$ parametrizovala jedinou bilineární operaci $\mu\colon V \otimes V \to V$, komponenta $\mathcal{C}_1(2)$ parametrizuje čtyřrozměrnou spojitou rodinu operací z $\Omega(Y) \times$ $\times\, \Omega(Y)$ do $\Omega(Y)$.



Obr. 4. Stasheffův asociaedr K_5.

Ukazuje se, že všechny podstatné vlastnosti operády $\mathcal{C}_1$ jsou modelovány mnohem menší *operádou asociaedrů* $\mathcal{K} = \{K_n(n)\}_{n \geqq 1}$. Její n-tá komponenta je $(n-2)$-rozměrný konvexní mnohostěn K_n zvaný *asociaedr*, viz obrázek 4. Lze ukázat, že prostor $\Omega(Y)$ je automaticky také $\mathcal{K}$-algebrou. Řešení problému charakterizace prostorů smyček spočívá v poznatku, že naopak každá $\mathcal{K}$-algebra má homotopický typ prostoru smyček:

Souvislý topologický prostor má homotopický typ prostoru smyček právě tehdy, když je algebrou nad operádou $\mathcal{K}$.

Čtenář si jistě povšiml, že v této části jsme uvažovali operády bez reprezentací symetrických grup. Takovým operádám se říká *non-Σ operády* a jsou zjednodušenou verzí operád z části 2.

4. Renesance

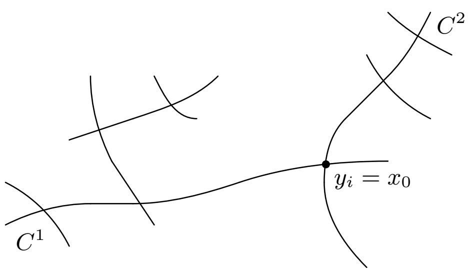
Operády $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{K}$ z předchozí části jsou již značně vzdáleny intuici získané v části 2. Napněme svou představivost ještě více a vydejme se do světa algebraické geometrie.

Uvažujme prostor $\mathcal{M}_{0,n+1}$ konfigurací $n+1$ navzájem různých bodů $(x_0, \dots, x_n)$ na komplexní projektivní přímce $\mathbf{CP}^1$. Jak je obvyklé, ztotožňujeme konfigurace, které se liší pouze projektivním automorfizmem. Nekompaktní prostor $\mathcal{M}_{0,n+1}$ se pro každé $n \geqq 2$ vkládá do kompaktního prostoru $\overline{\mathcal{M}}(n) \supset \mathcal{M}_{0,n+1}$ stabilních označených (angl. marked) komplexních křivek rodu 0. *Označená křivka* $(C; x_0, \dots, x_n)$ je tvořena (obecně reducibilní) algebraickou křivkou C s nejvýše nodálními singularitami (tedy singularitami typu $uv = 0$) a navzájem různými hladkými body $x_0, \dots, x_n \in C$. *Stabilita* znamená, že křivka $(C, x_0, \dots, x_n)$ má pouze konečně mnoho automorfizmů.

Prostor $\overline{\mathcal{M}}(n)$ je hladká projektivní komplexní $(n-2)$-rozměrná varieta. Systém $\overline{\mathcal{M}} = \{\overline{\mathcal{M}}(n)\}_{n \geqq 2}$ tvoří operádu v monoidální kategorii komplexních projektivních variet. Symetrická grupa permutuje body $(x_1, \dots, x_n)$ a strukturní zobrazení $\circ_i \colon \overline{\mathcal{M}}(n) \times \overline{\mathcal{M}}(m) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}(m+n-1)$ je definováno předpisem

$$(C^1; y_0, \dots, y_n) \circ_i (C^2; x_0, \dots, x_m) := (C; y_0, \dots, y_{i-1}, x_0, \dots, x_m, y_{i+1}, \dots, y_n),$$

kde C je křivka sestrojená z disjunktního sjednocení $C^1 \sqcup C^2$ identifikací bodu $x_0 \in C^1$ s bodem $y_i \in C^2$, jak naznačuje obrázek 5.

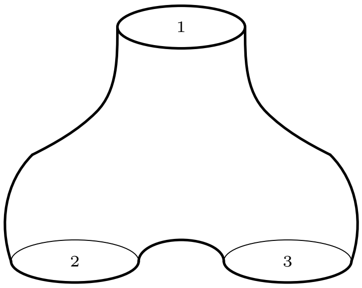


Obr. 5. Struktura operády $\overline{\mathcal{M}} = \{\overline{\mathcal{M}}(n)\}_{n \geqq 2}$.

Operáda $\overline{\mathcal{M}}$ se nazývá *konfigurační operáda* a její homologie popisují kohomologické teorie pole zmíněné v části 1. Poznamenejme, že $\overline{\mathcal{M}}(1) = \emptyset$, tedy operáda $\overline{\mathcal{M}}$ nemá jednotku $\mathbf{1}_{\overline{\mathcal{M}}}$, jak ji požaduje naše definice. Tato jemnost však není pro náš výklad důležitá. Zobecnění na křivky vyšších rodů vede k důležitému pojmu *modulární operády.*

Konfigurační operáda má svoji reálnou verzi. Uvažujme prostor $\mathring{\mathsf{F}}_k(n)$ konfigurací n navzájem různých bodů v afinním k-rozměrném euklidovském prostoru $\mathbf{R}^k$. Prostory $\mathring{\mathsf{F}}_k(n)$ se opět vkládají do kompaktifikací $\mathsf{F}_k(n)$ tvořících operádu $\mathsf{F}_k = \{\mathsf{F}_k(n)\}_{n \geqq 1}$ v kategorii reálných hladkých variet s rohy (anglicky manifolds with corners). Tato operáda hraje důležitou roli v teorii (iterovaných) prostorů smyček. Například operáda asociaedrů $\mathcal{K}$ z části 3 je izomorfní s F_1, asociaedr K_5 na obrázku 3 je tedy varieta $\mathsf{F}_1(5)$.

Na závěr této části se zmiňme ještě o jedné fyzikálně významné operádě. Nechť Σ je Riemannova sféra, tedy nesingulární komplexní projektivní křivka rodu 0. *Otvor* v křivce Σ je holomorfní vnoření jednotkového kruhu $U = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leqq 1\}$ do Σ. Nechť $\widehat{\mathcal{M}}_0(n)$ je prostor Riemannových sfér Σ s $n+1$ disjunktními otvory, viz obrázek 6.



Obr. 6. Element prostoru $\widehat{\mathcal{M}}_0(2)$.

Systém $\widehat{\mathcal{M}}_0 = \{\widehat{\mathcal{M}}_0(n)\}_{n \geqq 1}$ je operáda v kategorii nekonečně rozměrných analytických variet. Symetrická grupa permutuje otvory a kompozice $\Sigma \circ_i \Delta$ je pro $\Sigma \in \widehat{\mathcal{M}}_0(n)$ a $\Delta \in \widehat{\mathcal{M}}_0(m)$ dána „vlepením“ plochy Δ podél okraje otvoru s indexem 0 do otvoru plochy Σ s indexem i. Algebry nad operádou $\widehat{\mathcal{M}}_0$ tvoří část konformní teorie pole odpovídající Feynmanovým diagramům beze smyček. Obecnou teorii dostaneme vhodným modulárním zobecněním operády $\widehat{\mathcal{M}}_0$.

5. Homologická algebra

Mnoha věcem lépe porozumíme z určitého odstupu. V algebře je tím odstupem přechod z kategorie vektorových prostorů do kategorie komplexů. *Komplex* je vektorový prostor V s *diferenciálem*, což je endomorfizmus $\partial\colon V \to V$ takový, že $\mathit{Jádro}(\partial) \supset \mathit{Obraz}(\partial)$. Příslušný podíl

$$H(V) : \mathit{Jádro}(\partial) /\ \mathit{Obraz}(\partial)$$

se nazývá *homologií* komplexu (V, ∂).

Protože vektorové prostory lze interpretovat jako komplexy s nulovým diferenciálem, kategorie komplexů je rozšířením kategorie vektorových prostorů. Diferenciály vnášejí do nepoddajného světa algeber potřebnou ohebnost; v kategorii komplexů lze pracovat s deformacemi a homotopickým typem podobně jako v topologii. Zjednodušeně řečeno, *homologická algebra* zkoumá homotopické typy algebraických objektů v kategorii komplexů.

Jednou ze základních konstrukcí homologické algebry jsou kohomologie algeber. Obvykle jsou definovány jako homologie jistého komplexu sestrojeného z dané algebry. Kohomologie obsahují informace o deformacích a o vlastnostech kategorií modulů nad těmito algebrami. Konstrukcí kohomologií je mnoho i pro pevně danou kategorii algeber. Teorie operád umožňuje definovat tzv. *operadické kohomologie*, které pro takzvané *Koszulovy operády* zastřešují některé klasické konstrukce. Například operadické kohomologie asociativních algeber (tedy algeber nad operádou $\mathcal{A}ss$) jsou Hochschildovy kohomologie, operadické kohomologie komutativních asociativních algeber (algeber nad operádou $\mathcal{C}om$) jsou Harrisonovy kohomologie, operadické kohomologie Lieových algeber jsou Chevalleyovy-Eilenbergovy kohomologie atd.

Přestože je zmíněná koszulovost operád velmi jemná vlastnost, operády popisující nejběžnější algebraické struktury jsou Koszulovy. Tento překvapivý fakt je podle našeho názoru důsledkem antropického principu — algebry nad operádami, které nejsou Koszulovy, projevují podivné vlastnosti a lidé se jimi proto nezabývají.

Vraťme se ještě k principu rozpoznávání prostorů smyček formulovanému na konci části 3. Zřejmým důsledkem tohoto principu je *homotopická invariance* $\mathcal{K}$-algeber. Ta znamená, že topologický prostor X je $\mathcal{K}$-algebra spolu se všemi prostory stejného homotopického typu. Operády s touto vlastností se nazývají *kofibrantní* a každá topologická operáda má v jistém smyslu jednoznačný *kofibrantní model*. Například operáda $\mathcal{K}$ je kofibrantním modelem operády malých intervalů $\mathcal{C}_1$; operáda $\mathcal{C}_1$ sama kofibrantní není.

V algebře platí něco podobného. Velmi široká třída operád má *minimální model*, což je operáda v kategorii komplexů, která je v jistém smyslu *nejmenším* kofibrantním modelem dané operády. Minimální model Koszulových operád lze popsat pomocí *operadické bar-konstrukce*. Například minimálním modelem operády $\mathcal{A}ss$ je operáda popisující tzv. *silně homotopicky asociativní* neboli $A(\infty)$-algebry. Motivujícím příkladem těchto algeber je singulární komplex prostoru smyček, $A(\infty)$-algebry jsou tedy v jistém smyslu algebraickou analogií topologických $\mathcal{K}$-algeber z části 3.

Minimální model operády $\mathcal{L}ie$ pro Lieovy algebry popisuje *silně homotopicky Lieovy* neboli $L(\infty)$-algebry. Strukturu $L(\infty)$-algebry lze pozorovat např. na BRST (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin) komplexu konformní teorie pole. Obecně se dnes *silně homotopickou algebrou* rozumí algebra nad minimálním modelem nějaké operády.

Silně homotopické algebry potkáváme v kvantové teorii pole velmi často. Filozofické zdůvodnění tohoto fascinujícího jevu může být následující. Jestliže je kvantový svět deformací klasického, potom se algebraické struktury z klasického světa přenášejí do kvantového v podobě svých homotopicky invariantních verzí, tedy silně homotopických algeber.

L i t e r a t u r a

[1] Boardman, J. M., Vogt, R. M.: *Homotopy Invariant Algebraic Structures on Topological Spaces.* Springer-Verlag 1973.

[2] Connes, A., Kreimer, D.: *Renormalization in quantum field theory and the Riemann--Hilbert problem I: The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem.* Comm. Math. Phys. *210* (1) (2000), 249–273.

[3] Fox, T. F., Markl, M.: *Distributive laws, bialgebras, and cohomology.* In: *Operads: Proceedings of Renaissance Conferences*, J. L. Loday, J. D Stasheff, A. A. Voronov, eds, Contemporary Math., svazek 202, str. 167–205, Amer. Math. Soc. 1997.

[4] Getzler, E., Jones, J. D. S.: *Operads, homotopy algebra, and iterated integrals for double loop spaces.* Preprint `hep-th/9403055`, March 1994.

[5] Ginzburg, V., Kapranov, M. M.: *Koszul duality for operads.* Duke Math. J. *76* (1) (1994), 203–272.

[6] Huang, Y.-Z.: *Two-dimensional conformal geometry and vertex operator algebras.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA 1997.

[7] Kontsevich, M, Soibelman, Y.: *Deformations of algebras over operads and Deligne's conjecture.* Preprint `math.QA/0001151`, leden 2000.

[8] Loday, J.-L.: *La renaissance des opérades.* Séminarie Bourbaki *792,* 47ème année 1994–95, 47–74.

[9] MacLane, S.: *Natural associativity and commutativity.* Rice Univ. Stud. *49* (1) (1963), 28–46.

[10] Manin, Y. I.: *Frobenius Manifolds, Quantum Cohomology, and Moduli Spaces.* American Mathematical Society Colloquium Publications, svazek 47. American Mathematical Society, Providence, RI 1999.

[11] Markl, M.: *Homotopy algebras are homotopy algebras.* Preprint `math.AT/9907138`, červenec 1999.

[12] Markl, M., Shnider, S., Stasheff, J. D.: *Operads in Algebra, Topology and Physics.* Mathematical Surveys and Monographs, svazek 96. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 2002.

[13] May, J. P.: *The Geometry of Iterated Loop Spaces.* Lecture Notes in Mathematics 271, Springer-Verlag, New York 1972.

[14] Vogt, R. M.: *Cofibrant operads and universal E_∞ operads.* Preprint `E99-005`, 81–89, viz `http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/sfb343/preprints/index99.html`