

Vít Dolejší; Miloslav Feistauer; Jiří Felcman
Výpočtová matematika a počítačová dynamika tekutin

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 47 (2002), No. 3, 206--220d

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/141133>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2002

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Výpočtová matematika a počítačová dynamika tekutin

Vít Dolejší, Miloslav Feistauer a Jiří Felcman, Praha

1. Matematika jako univerzální prostředek ve vědě a technice

Matematika je vysoce abstraktní a tím i zcela univerzální věda. Existuje v ní řada významných problémů a teorií, které nebyly inspirovány žádným technickým problémem nebo problémem z jiné oblasti vědy, ale vznikly v matematice samé. Tyto problémy a teorie často vypadaly zdánlivě jako neužitečné a teprve postupem času se pro ně objevilo uplatnění. Např. původně čistě abstraktní teorie grup je nyní nepostradatelným matematickým aparátem v moderní fyzice, kryptografii, krystalografii aj. Dvojková číselná soustava je známa již několik tisíc let, ale prakticky byla využita až v minulém století ve spojení s vývojem počítačů. Typickým příkladem čistě matematického problému byl důkaz tzv. Velké Fermatovy věty, který trápil matematiky 350 let. Slavnou Fermatovu hypotézu se podařilo dokázat až v roce 1995. Velká Fermatova věta se zdá být bez jakéhokoli praktického využití. V matematice byla ale synonymem pro něco nesmírně obtížného, ne-li neřešitelného, a úspěšná realizace jejího důkazu byla otázkou vlastní prestiže matematiky.

Převážná většina matematických problémů a teorií však vznikla nebo byla inspirována potřebami jiných věd. Ve spojení s ostatními disciplínami, jako jsou technické vědy, fyzika, biologie, medicína, ekonomie, finance, a samozřejmě také s počítači se matematika stává mocným a všestranně využitelným nástrojem.

Moderní matematika je dokonale vybavena a připravena na řešení problémů z nejrůznějších oblastí vědy a techniky. Je to dáno tím, že používá abstraktní matematické pojmy a obsahuje stále se rozvíjející hluboké matematické teorie, které mohou být použity k matematickému popisu jevů a procesů v jiných vědních oborech.

2. Výpočtová matematika

Důležitou roli při využití matematických modelů v rozmanitých oblastech vědy a techniky má *numerická matematika*, často též nazývaná *výpočtová matematika*. (Název výpočtová matematika má však poněkud širší význam z hlediska praktického

RNDr. VÍT DOLEJŠÍ, Ph.D. (1971), prof. RNDr. MILOSLAV FEISTAUER, DrSc. (1943), doc. RNDr. JIŘÍ FELCMAN, CSc. (1954), Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, katedra numerické matematiky, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8.

uplatnění, a proto budeme převážně používat tento termín.) Výpočtová matematika může být charakterizována jako část matematiky zabývající se realizací matematických modelů pomocí výpočetní techniky. Výpočtová matematika tak představuje přechod od teoretické matematiky k prakticky použitelným výsledkům.

Výpočtovou matematiku lze rozdělit na tři části, které na sebe navazují a vzájemně se ovlivňují.

a) Především je to *teoretická část*, nazývaná často *numerická analýza*, která se zabývá vývojem numerických metod a algoritmů a jejich teoretickou analýzou. Můžeme jmenovat např. vyšetřování konvergence různých iteračních a aproximačních metod, chování a odhady chyb při přibližném řešení systémů rovnic a nerovnic, při aproximacích funkcí, variet (např. ploch a křivek) a dalších struktur a zkoumání stability výpočtových procesů. V této části se uplatňují teorie a metody celé řady abstraktních partií matematiky, jako je matematická analýza, teorie míry a integrálu, teorie distribucí, teorie obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic a integrálních rovnic, teorie aproximace, funkcionální analýza, diskrétní matematika a dokonce někdy i teorie pravděpodobnosti. Matematik pracující v numerické analýze musí mít široké znalosti ve zmíněných oblastech, ale je samozřejmě třeba, aby ovládal speciální metody a techniky užívané ve výpočtové matematice.

b) Důležitá ve výpočtové matematice je *softwarová část*, umožňující realizaci numerických metod na počítačích a jejich aplikaci na řešení praktických problémů. Počítačová realizace numerických procesů a použití výsledků v praxi vyžaduje věnovat pozornost celé řadě otázek a problémů:

- vytváření datových struktur,
- příprava (preprocessing) vstupních dat,
- vlastní realizace výpočtových algoritmů,
- získání aposteriori odhadů chyb,
- zpracování (postprocessing) výsledků, jejich grafické znázornění a vizualizace.

Realizace těchto úkolů představuje vypracování programů nebo systémů programů. Jednotlivé systémy musí na sebe navazovat, měly by být „user friendly“, což znamená, že jejich aplikace nesmějí pro uživatele představovat obtížný problém, a je třeba, aby byly dobře dokumentovány. To vyžaduje jak znalost příslušných výpočtových metod a algoritmů, tak i řadu znalostí z matematické informatiky (programovací jazyky, operační systémy, datové struktury, grafické systémy a specializované akademické nebo komerční programové systémy, jako je např. Maple, Mathematica, Matlab, Fluent, AutoCAD apod.).

Do softwarové části můžeme zahrnout také optimalizaci algoritmů a numerické experimenty ověřující efektivitu a robustnost výpočtových algoritmů a potvrzující nebo upřesňující teoretické výsledky získané v numerické analýze.

c) Softwarová část numerické matematiky tvoří přechod k *části aplikační*, která se zabývá numerickým řešením složitých problémů vědy a techniky. Tzv. vědecko-technické výpočty slouží zejména k ověřování vlastností různých zařízení, technologických celků a jejich částí. Pomocí matematických modelů, výpočtových metod

a softwaru je na počítačích simulováno chování příslušného zařízení s cílem ověřit jeho funkci nebo zlepšit a optimalizovat jeho vlastnosti. Snahou je omezit množství náročných, nákladných a zdoluhavých zkoušek a pokusů, které by byly zapotřebí k čistě experimentálnímu vyšetřování vlastností zařízení.

Výpočtová matematika tedy umožňuje cílevědomé zaměření experimentu, což může vést k výraznému snížení finančních nákladů a urychlení vývoje a návrhu zařízení, konstrukcí a procesů. V řadě případů je numerická simulace jedinou možností, jak zjistit chování různých zařízení nebo průběh procesů v případech, kdy experimentální ověřování není technicky proveditelné (a k ověření by došlo až při praktické realizaci), nebo je nebezpečné. Můžeme uvést např. simulaci funkce nových cévních náhrad nebo umělého srdce, kdy experimenty na pacientech by byly bez předběžného numerického modelování velmi riskantní.

Numerické modelování složitých struktur a procesů je často velmi obtížné. Je to způsobeno různými faktory. Většina modelů je reprezentována silně nelineárními systémy rovnic, pro něž dosud nebyla provedena dostatečně hluboká teoretická kvalitativní analýza. Tzn. že není jasné, zda tyto rovnice mají pro režimy, které nás zajímají, jednoznačné řešení, nebo zda jejich řešení vůbec existují. V řadě praktických případů nejsme schopni ověřit předpoklady, za nichž použité numerické metody a výpočtové postupy poskytují přípustná řešení. Přesto je užitečné nevzdávat se a snažit se numerické řešení najít. Na numerickém matematikovi samozřejmě leží velká odpovědnost. Je třeba zaručit, aby získané numerické řešení bylo dostatečně přesné, jinými slovy aby chyba byla v přípustném rozmezí. Na tom závisí např. otázka, zda navržený most nespadne při větším zatížení nebo pod nápořem silného větru, zda se přehradní hráz neprotrhne nebo umělá céva nepraskne. Aby bylo dosaženo dostatečně přesných a spolehlivých výsledků při numerickém modelování složitých struktur a procesů, je třeba úzké součinnosti numerických matematiků se specialisty z oborů, v nichž jsou numerické simulace realizovány. To vyžaduje, aby matematik byl dostatečně dobře seznámen s řešenou problematikou a aby našel se svými nematematickými partnery společnou řeč.

To, co zde bylo řečeno, ukazuje, že numerická matematika má charakter poněkud odlišný od ostatních partií matematiky. O numerické matematice se často říká, že je to *jak věda, tak umění*. (Tato skutečnost zatím nevedla k tomu, že by univerzity nebo fakulty, kde je vyučována numerická matematika, byly zařazeny mezi vysoké školy uměleckého směru.) Důvody pro tento názor vysvětluje A. Ralston ve své knize *Základy numerické matematiky* [15]: „*To, že stavíme vedle sebe vědu a umění, je způsobeno spíše jistým principem neurčitosti, který se často vyskytuje při řešení problémů; určení nejlepší cesty, jak problém řešit, může totiž vyžadovat předběžnou znalost samého řešení problému. V jiných případech může nejlepší cesta k řešení problému záviset na znalosti některých vlastností funkcí vyskytujících se ve výpočtu, které nelze získat ani teoreticky, ani prakticky. . . Jako věda se tedy numerická matematika zabývá procesy, pomocí nichž lze matematické problémy řešit aritmetickými operacemi. . . Jako umění se numerická matematika zabývá volbou postupu (a jeho vhodnou aplikací), který se »nejlépe« hodí k řešení speciálního problému. Proto každý, kdo chce pěstovat numerickou matematiku prakticky, musí rozvíjet zkušenost a s ní i intuici.*“

Obě tyto stránky numerické matematiky jsou jasně patrné v tzv. počítačové dynamice tekutin, kde se také uplatňují všechny jmenované části numerické matematiky: teoretická analýza, software a aplikační část.

3. Výpočtová matematika v dynamice tekutin

3.1. Studium proudění kapalin a plynů

S problémy proudění se setkáváme v řadě oblastí vědy a techniky. Jmenujme např. letectví a aeronautiku, automobilový průmysl, strojírenství (konstrukce turbín a kompresorů), chemický a potravinářský průmysl (mísicí zařízení, proudění chemicky reagujících tekutin), medicínu (proudění krve v cévách a srdci), biologii, zemědělství, meteorologii, hydrologii, oceánografii a ochranu životního prostředí.

Představu o proudění lze získat dvěma způsoby:

- a) Pomocí *experimentů* (např. v aerodynamickém tunelu), které sice dávají realistický obraz o skutečném proudění, ale většinou jsou nákladné a zdlouhavé.
- b) Pomocí *matematických modelů*. Většina matematických modelů proudění tekutin je reprezentována jako soustava parciálních diferenciálních rovnic vyjadřujících základní fyzikální zákony zachování hmoty, hybnosti, momentu hybnosti a energie. K nim přistupují uzavírací rovnice představující tzv. konstitutivní vztahy a termodynamické zákony a dále počáteční a okrajové podmínky.

Numerickým řešením těchto rovnic a počítačovou simulací proudění se zabývá *počítačová dynamika tekutin* (= překlad anglického názvu Computational Fluid Dynamics, který je běžně nahrazován zkratkou CFD). Cílem této oblasti vědy je na základě matematických modelů pomocí numerických metod, výpočtových algoritmů a specializovaných systémů programů realizovat na počítačích simulaci proudění, která by vedla k vytvoření realistického kvalitativního i kvantitativního obrazu o proudění a k získání výsledků srovnatelných s experimenty provedenými např. v aerodynamickém tunelu.

V dalším textu se podrobněji věnujeme matematickému modelování a numerické simulaci některých typů proudění.

3.2. Rovnice popisující proudění a jejich matematické vlastnosti

Uvažujme proudění stlačitelné tekutiny, tzn. plynu v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a v časovém intervalu $(0, T)$. Zde $N = 2$ nebo 3 podle toho, jestli používáme zjednodušený model dvourozměrného proudění nebo uvažujeme skutečné třírozměrné proudění. Dále předpokládáme, že $0 < T \leq +\infty$.

K popisu proudění použijeme eulerovský popis. To znamená, že pro $x \in \Omega$ a $t \in (0, T)$ symbol $\mathbf{v}(x, t) = (v_1(x, t), \dots, v_N(x, t))$ značí vektor rychlosti tekutiny v bodě x a v čase t . Dále budeme používat následující značení: ρ – hustota tekutiny,

p – tlak, θ – absolutní teplota, E – celková energie, τ_{ij} – složky tenzoru napětí, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)$ – hustota vnějších objemových sil (např. gravitace), q – hustota zdrojů tepla, d_{ij} – složky tenzoru rychlosti deformace, k – koeficient tepelné vodivosti, μ , λ – koeficienty vazkosti, $\gamma \in (1, 2)$ – Poissonova adiabatická konstanta (= podíl měrných tepel c_p/c_V při konstantním tlaku a konstantním objemu – např. pro vzduch $\gamma = 1,4$), δ_{ij} – Kroneckerovo delta ($\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$). Veličiny ρ , p , θ , E , τ_{ij} , d_{ij} , f_i , q jsou funkcemi proměnných $x \in \Omega$ a $t \in (0, T)$. V reálných tekutinách se projevuje vnitřní tření. Říkáme, že tyto tekutiny jsou *vazké*. To se v matematickém popisu odráží v tom, že koeficient vazkosti μ a koeficient tepelné vodivosti k jsou kladné.

Stlačitelné proudění je popsáno soustavou parciálních diferenciálních rovnic, uvažovaných v časoprostorovém válci $Q_T = \Omega \times (0, T)$ a reprezentujících základní fyzikální zákony zachování, k nimž jsou přidány konstitutivní vztahy a termodynamické zákony:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = \rho f_i + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial(E v_i)}{\partial x_i} = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ji} v_i) + \rho q + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right), \quad (3)$$

$$\tau_{ji} = \left(-p + \lambda \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) \delta_{ij} + 2\mu d_{ij}(\mathbf{v}), \quad (4)$$

$$d_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (5)$$

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \right), \quad (6)$$

$$\theta = \frac{1}{c_V} \left(\frac{E}{\rho} - \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right). \quad (7)$$

Rovnice (1) je rovnice kontinuity představující zákon zachování hmoty, systém (2) jsou tzv. pohybové rovnice představující zákon zachování hybnosti, rovnice (3) je ekvivalentní se zákonem zachování energie, (4)–(5) jsou konstitutivní vztahy odvozené z tzv. Stokesových postulátů upřesňujících Newtonovu hypotézu lineární závislosti tenzoru napětí na tenzoru rychlosti deformace. Konečně rovnice (6)–(7) jsou důsledkem termodynamických zákonů. Z termodynamiky plyne, že stavové proměnné p , ρ , θ jsou kladné funkce. Koeficienty $k > 0$, $\mu > 0$, λ jsou obvykle považovány za konstanty nebo funkce závislé na absolutní teplotě θ . Koeficient vazkosti μ lze určit experimentálně, zatímco λ obvykle definujeme vztahem

$$3\lambda + 2\mu = 0.$$

Dosazením (4)–(5) do (2) dostaneme tzv. Navierovy-Stokesovy rovnice stlačitelného proudění. Odvození uvedených rovnic lze najít např. v [2], [4], [11].

K systému (1)–(7) přidáme *počáteční podmínky* definující stav proudící tekutiny v počátečním čase $t = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, 0) &= \mathbf{v}^0(x), \\ \varrho(x, 0) &= \varrho^0(x), \\ \theta(x, 0) &= \theta^0(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{8}$$

kde \mathbf{v}^0 , ϱ^0 a θ^0 jsou dané funkce, a *okrajové podmínky* definující chování tekutiny na hranici $\partial\Omega$ oblasti Ω . Okrajové podmínky musí vystihovat fyzikální chování tekutiny na hranici a současně je třeba, aby byly korektní z matematického hlediska. Ve většině případů zadáváme vektor rychlosti a absolutní teplotu

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \Big|_{\partial\Omega \times (0, T)} &= \mathbf{v}^*, \\ \theta \Big|_{\partial\Omega \times (0, T)} &= \theta^*. \end{aligned} \tag{9}$$

Pokud tekutina vtéká částí $\Gamma_I(t)$ hranice $\partial\Omega$ do oblasti Ω , tj.

$$\Gamma_I(t) = \{x \in \partial\Omega : \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) < 0\} \neq \emptyset, \tag{10}$$

kde $\mathbf{n}(x)$ je jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$ v bodě x , pak na $\Gamma_I(t)$ zadáváme i hustotu:

$$\varrho(x, t) = \varrho^*(x, t), \quad x \in \Gamma_I(t), \quad t \in (0, T). \tag{11}$$

V praxi se používají i jiné okrajové podmínky, o kterých se zde ale nemůžeme rozepisovat.

Často se setkáváme s použitím různých zjednodušení rovnic (1)–(7):

a) *Model barotropního homoentropického proudění* dostaneme za předpokladu, že tlak je funkcí hustoty ve tvaru

$$p = C\varrho^\gamma, \tag{12}$$

kde $C > 0$ je konstanta. (Entropie je pak konstantní.) V tomto případě uvažujeme pouze rovnice (1), (2), (4), (5) spolu s rovnicí (12).

b) *Model nevazkého adiabatického proudění*: zde klademe $\mu = \lambda = k = 0$ a Navierovy-Stokesovy rovnice se redukují na rovnice Eulerovy. V tomto případě je třeba modifikovat okrajové podmínky tak, že místo zadaného vektoru rychlosti je na hranici $\partial\Omega$ předepsána jeho normálová složka $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. V tomto případě je nutné zajistit splnění 2. termodynamického zákona reprezentovaného tzv. entropickou podmínkou (viz např. [4], kapitola 7). Tato podmínka je splněna automaticky v případě vazkého proudění.

Nyní se věnujme stručné charakterizaci *matematické teorie vazkého stlačitelného proudění*. Za předpokladu, že jsou dána data, tj. konstanty c_V , γ , koeficienty μ , λ , k a funkce \mathbf{f} , q , \mathbf{v}^0 , ϱ^0 , θ^0 , \mathbf{v}^* , θ^* , ϱ^* , chceme určit funkce \mathbf{v} , ϱ , p , θ , E , τ_{ij} , d_{ij} splňující rovnice (1)–(7) a podmínky (8), (9), (11).

Tato úloha patří k velmi obtížným problémům teorie parciálních diferenciálních rovnic. Jde o silně nelineární systém smíšeného typu. Rovnice kontinuity (1) pro neznámou ϱ je hyperbolického typu, kdežto rovnice (2), (3) mají charakter parabolický. Tyto obtíže jsou důvodem, že teoretické výsledky týkající se existence a jednoznačnosti řešení byly dokázány za zjednodušujících podmínek, konkrétně v případě nulové rychlosti \mathbf{v}^* na $\partial\Omega$.

Výsledky lze rozdělit do dvou skupin:

1. lokální řešitelnost,
2. globální řešitelnost pro malá data.

První výsledek, reprezentovaný pionýrskou prací [17], lze charakterizovat takto: *Předpokládejme, že $\mathbf{v}^* = 0$, hranice $\partial\Omega$ a funkce $\mathbf{v}_0, \varrho_0, \theta_0, \theta^*, \mathbf{f}, q$ jsou dostatečně hladké, $\varrho_0, \theta_0 > 0$, koeficienty $\mu, k > 0$ a λ jsou dostatečně hladké funkce proměnných θ, ϱ a $3\lambda + 2\mu \geq 0$. Pak existuje $T^* \in (0, T]$ takové, že problém (1)–(9) má jednoznačné „regulární“ řešení v $Q_T = \Omega \times (0, T^*)$.*

Druhá skupina výsledků byla poprvé získána v [13]: *Jsou-li splněny předchozí předpoklady a navíc $\theta^* = \text{konst}$, $\mathbf{f} = 0$, $q = 0$, pak existuje $\varepsilon > 0$ (dostatečně malé) takové, že za předpokladu*

$$\|\varrho_0 - \bar{\varrho}\|_{C^3(\bar{\Omega})}, \|\mathbf{v}_0\|_{C^3(\bar{\Omega})}, \|\theta_0 - \theta^*\|_{C^3(\bar{\Omega})} \leq \varepsilon,$$

kde $\bar{\varrho} = \int_{\Omega} \varrho^0 dx / \text{meas}(\Omega)$, existuje právě jedno řešení problému (1)–(9) v Q_T .

Tyto výsledky byly dále rozvíjeny řadou autorů. Jmenujme alespoň některé z nich: H. Beirao da Veiga, E. Feireisl, P. L. Lions, J. Neustupa, A. Novotný, M. R. Padula, P. Penel, R. Salvi, V. A. Solonnikov, I. Straškraba, A. Valli a W. M. Zajaczkowski.

Některé práce (např. [14]) se zabývají řešitelností stacionárního proudění, kdy je proces popsán funkcemi nezávislými na čase.

Globální existence řešení pro „velká“ data byla dokázána nedávno v případě barotropního homoentropického proudění, tj. pro systém (1), (2), (4), (5), (12) s počátečními podmínkami pro hustotu a rychlost a s nulovou rychlostí \mathbf{v}^* na hranici. Viz [12] a [7].

Poněkud odlišná je situace v případě *nestlačitelného proudění*, kdy se předchozí rovnice redukují na zdánlivě jednoduchý systém Navierových-Stokesových rovnic tvaru

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{j=1}^N v_j \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} + \text{grad } p - \nu \Delta \mathbf{v} = \mathbf{f} \quad (14)$$

v Q_T , s počátečními a okrajovými podmínkami

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}^0(x), \quad x \in \Omega, \quad (15)$$

$$\mathbf{v} \Big|_{\partial\Omega \times (0, T)} = \mathbf{v}^*. \quad (16)$$

Pro tento problém byla dokázána globální existence tzv. slabého řešení pro velká data (viz [10], [18], [9], [8], [4]). Je zajímavé, že jednoznačnost slabého nestacionárního řešení je podmíněna jeho regularitou. Ta byla dokázána v případě rovinného proudění, tj. $N = 2$. V trojrozměrném případě $N = 3$ je jednoznačnost a regularita otevřeným problémem, který již řadu desetiletí vzdoruje velkému úsilí mnoha vynikajících matematiků; můžeme ho proto považovat za obdobu Velké Fermatovy věty v aplikované matematice. Řešení tohoto problému má velký význam jak z hlediska matematického, tak i fyzikálního. Jde o potvrzení adekvátnosti modelu vazkého proudění a existuje souvislost s vysvětlením turbulentního proudění. Z tohoto důvodu byla na řešení jmenovaného problému (ať v kladném, či záporném smyslu) vypsána cena ve výši 1 000 000 USD.

V případě obecného stlačitelného proudění s nehomogenními okrajovými podmínkami, s nimiž se setkáváme v technické praxi, je situace zcela neuspokojivá, poněvadž existence řešení nebyla dosud dokázána. Tato skutečnost nemůže být samozřejmě důvodem pro to, aby se model stlačitelného proudění v praxi nepoužíval. Právě naopak: ukazuje se, že tento model ve spojení s moderními numerickými metodami za použití výkonných počítačů umožňuje získat dobrou kvalitativní i kvantitativní představu o stlačitelném proudění v řadě důležitých případů.

3.3. Numerické řešení stlačitelného proudění

Uvažujme model stlačitelného proudění popsaný rovnicemi (1)–(7), k nimž přidáme počáteční podmínky (8) a okrajové podmínky (9), (11), event. další okrajové podmínky podle typu proudění (například periodické okrajové podmínky). Předpokládejme, že hustotu vnějších objemových \mathbf{f} sil a hustotu tepelných zdrojů \mathbf{q} lze zanedbat. Dosadíme-li vztahy (4)–(7) do rovnic (1)–(3), lze rovnice (1)–(3) zapsat v kompaktním tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})}{\partial x_s}, \quad (17)$$

kde

$$\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)^T = (\varrho, \varrho v_1, \dots, \varrho v_N, E)^T \in \mathbb{R}^m, \quad m = N + 2,$$

je tzv. *stavový vektor* a \mathbf{f}_s , resp. \mathbf{R}_s jsou tzv. *nevazké*, resp. *vazké toky* veličiny \mathbf{w} ve směrech x_s , $s = 1, \dots, N$. Jejich tvar lze najít např. v [4] nebo [5].

Numerické řešení stlačitelného proudění představuje velmi obtížný problém počítačové dynamiky tekutin. Je to způsobeno několika faktory:

- hyperbolicko-parabolický charakter soustavy rovnic,
- konvekce převažující nad difuzí (koeficienty μ , λ , k jsou malé),
- funkce popisující proudění mohou mít nespojitosti nebo velké gradienty na tzv. rázových vlnách v případě velkých rychlostí,
- existence mezních vrstev a úplavů a jejich interakce s rázovými vlnami,
- nedostatečná matematická teorie.

Uvedené faktory je třeba vzít v úvahu při návrhu numerické metody. Jednou z metod, která tyto faktory respektuje, je *kombinovaná metoda konečných objemů a konečných prvků* (viz např. [6]). Nevazké členy $\sum_{s=1}^N \partial \mathbf{f}_s(w) / \partial x_s$ v rovnici (17) jsou aproximovány metodou konečných objemů, při jejíž aplikaci se podstatným způsobem využívají matematické vlastnosti toků \mathbf{f}_s , jako je homogenita, hyperbolicita a rotační invariance (viz [4], kapitola 7, nebo [5]). Eliptický charakter vazkých členů $\sum_{s=1}^N \partial \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) / \partial x_s$ je zase vhodný pro použití metody konečných prvků.

V kombinované metodě konečných objemů a konečných prvků pracujeme se dvěma sítěmi. V oblasti Ω sestrojíme síť konečných prvků

$$\mathcal{T}_h = \{K_i\}_{i \in I} \quad (18)$$

(I je indexová množina), tvořenou uzavřenými trojúhelníky, resp. čtyřstěny pro dvojrozměrné, resp. třírozměrné proudění, takže

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i \in I} K_i. \quad (19)$$

Dále sestrojíme v Ω síť konečných objemů

$$\mathcal{D}_h = \{D_j\}_{j \in J}, \quad (20)$$

(J je indexová množina), tvořenou uzavřenými mnohoúhelníky, resp. mnohostěny pro dvojrozměrné, resp. třírozměrné proudění:

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{j \in J} D_j. \quad (21)$$

Hranici ∂D_i konečného objemu D_i lze vyjádřit jako sjednocení úseček, resp. rovinných stěn Γ_{ij}^α , $\alpha = 1, \dots, \beta_{ij}$, pro $N = 2$, resp. $N = 3$, které tvoří společné rozhraní sousedních konečných objemů D_i a D_j nebo jsou částí hranice $\partial \Omega$:

$$\partial D_i = \bigcup_{j \in S(i)} \bigcup_{\alpha=1}^{\beta_{ij}} \Gamma_{ij}^\alpha, \quad (22)$$

kde $S(i)$ je množina indexů všech sousedních konečných objemů D_j k objemu D_i a hran objemu D_i , které jsou částí $\partial \Omega$. Symbolem $|\Gamma_{ij}^\alpha|$ označíme $(N - 1)$ -rozměrnou míru Γ_{ij}^α a nechť \mathbf{n}_{ij}^α je jednotková vnější normála k ∂D_i na části Γ_{ij}^α .

Při odvození numerického schématu budeme pracovat s funkcemi, které jsou po částech lineární na konečných prvcích $K_i \in \mathcal{T}_h$:

$$X_h = \{\varphi \in C(\overline{\Omega}) : \varphi|_{K_i} \text{ je lineární } \forall K_i \in \mathcal{T}_h\}.$$

V definici prostoru X_h uvažujeme funkce φ spojitě na $\overline{\Omega}$. Tuto globální spojitost lze oslabit; viz práce [1]. Síť \mathcal{D}_h konečných objemů přiřadíme prostor

$$Y_h = \{\varphi \in L^2(\Omega) : \varphi|_{D_j} \text{ je konstantní } \forall D_j \in \mathcal{D}_h\}$$

funkcí po částech konstantních, v němž získáme konečně objemovou aproximaci řešení.

Jednou z důležitých vlastností je vztah mezi prostory X_h a Y_h . Předpokládejme existenci prostého lineárního zobrazení L_h prostoru X_h na prostor Y_h .

Kombinovaná metoda konečných objemů a konečných prvků pro řešení systému (17) je založena na slabé formulaci vedoucí k integrální identitě tvaru

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(t) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx + \int_{\Omega} \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w}(t))}{\partial x_s} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx + \int_{\Omega} \sum_{s=1}^N \mathbf{R}_s(\mathbf{w}(t), \nabla \mathbf{w}(t)) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_s} \, dx = 0 \quad (25)$$

pro vhodné testovací funkce $\boldsymbol{\varphi}$. Nyní použijeme aproximace $\mathbf{w}(t) \approx \mathbf{w}_h(t) \in \mathbf{X}_h = X_h^m =$ prostor vektorových m -rozměrných funkcí, jejichž složky jsou prvky z X_h , $\boldsymbol{\varphi} \approx \boldsymbol{\varphi}_h \in \mathbf{V}_h \subset \mathbf{X}_h$, \mathbf{V}_h je vhodný prostor testovacích funkcí pro diskrétní problém. Navíc v členech obsahujících ne vazké toky \mathbf{f}_s aproximujeme $\boldsymbol{\varphi}_h \approx L_h \boldsymbol{\varphi}_h$. Aplikujeme Greenovu větu a ne vazký tok $\sum_{s=1}^N n_s \mathbf{f}_s(\mathbf{w})$ veličiny \mathbf{w} ve směru \mathbf{n} aproximujeme pomocí tzv. *numerického toku* $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w}_h)}{\partial x_s} \cdot \boldsymbol{\varphi}_h \, dx &\approx \sum_{i \in J} L_h \boldsymbol{\varphi}_h|_{D_i} \cdot \int_{D_i} \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w}_h)}{\partial x_s} \, dx \approx \\ &\approx \sum_{i \in J} L_h \boldsymbol{\varphi}_h|_{D_i} \cdot \sum_{j \in S(i)} \sum_{\alpha=1}^{\beta_{ij}} \mathbf{H}(L_h \mathbf{w}_h|_{D_i}, L_h \mathbf{w}_h|_{D_j}, \mathbf{n}_{ij}^{\alpha}) | \Gamma_{ij}^{\alpha} | =: b_h(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h). \end{aligned} \quad (26)$$

Označíme-li

$$(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) = \int_{\Omega} \mathbf{w}_h \cdot \boldsymbol{\varphi}_h \, dx, \quad (27)$$

$$a_h(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}_h) = \sum_{i \in I} \int_{K_i} \sum_{s=1}^N \mathbf{R}_s(\mathbf{w}_h, \nabla \mathbf{w}_h) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_h}{\partial x_s} \, dx, \quad (28)$$

můžeme formulovat prostorovou semidiskretizaci rovnice (17): Hledáme takovou funkci $\mathbf{w}_h \in C^1([0, T], \mathbf{X}_h)$ splňující předepsané Dirichletovy okrajové podmínky, že

$$\left(\frac{\partial \mathbf{w}_h(t)}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi}_h \right) + b_h(\mathbf{w}_h(t), \boldsymbol{\varphi}_h) + a_h(\mathbf{w}_h(t), \boldsymbol{\varphi}_h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi}_h \in \mathbf{V}_h \quad (29)$$

a

$$\mathbf{w}_h(0) = \mathbf{w}_h^0, \quad (30)$$

kde \mathbf{w}_h^0 je vhodná X_h -aproximace počáteční podmínky \mathbf{w}^0 . Problém (29)–(30) je ekvivalentní s velkou soustavou obyčejných diferenciálních rovnic, kterou v praktických výpočtech řešíme pomocí vhodné časové diskretizace, jako je např. explicitní Eulerova nebo Rungeova-Kuttova metoda. Integrály vyčíslíme pomocí vhodné numerické kvadratury.

Uvedený popis diskretizace problému stlačitelného proudění vypadá vcelku jednoduše a nevinně. Ukazuje se ale, že takto definovaná metoda obvykle nedává kvalitní

výsledky a že je třeba věnovat pozornost dalším důležitým aspektům, které vyžadují nejen matematické znalosti, ale i řadu zkušeností s aplikací metody konečných prvků a metody konečných objemů a znalostí fyzikálních vlastností různých typů proudění. Jde např. o následující hlediska:

1. Numerický tok je třeba volit tak, aby schéma mělo adekvátní míru numerické disipace, což má za následek, že získané přibližné řešení je fyzikálně přípustné (tzn. splňuje s dostatečnou přesností entropickou podmínku).
2. Je třeba, aby byl splněn princip maxima (např. hustota, tlak a teplota nesmějí být záporné).
3. Důležitá je volba integračních bodů a s tím související numerické kvadratury.
4. Při časové diskretizaci je třeba zabývat se stabilitou výsledného schématu, což je velmi obtížná partie numerické matematiky.
5. V řadě případů je třeba věnovat pozornost volbě fyzikálně adekvátních okrajových podmínek.
6. Důležitá je hustota sítí \mathcal{T}_h a \mathcal{D}_h , která může silně ovlivnit kvalitu získaného numerického řešení.

Na některé tyto otázky můžeme odpovědět na základě čistě teoretické numerické analýzy provedené pro navržené metody a schémata, kterou však lze realizovat nikoliv pro původní složitý problém, ale pouze pro problémy silně zjednodušené. To se týká volby numerického toku, stability a numerické integrace, principu maxima a vyšetřování odhadu chyby, které se dopustíme, když přesné řešení aproximujeme řešením přibližným. Zde vystupuje numerická matematika jako součást tzv. čisté matematiky, tedy jako věda. Bezprostředně se zde ale objevuje i druhá strana mince — numerická matematika jako umění — když teoreticky zdůvodněné výsledky heuristicky extrapolujeme na náš složitý kompletní problém. Zde je třeba znát fyzikální stránku problému, mít intuici a zkušenost. To se projevuje také při volbě výpočetní sítě, které věnujeme následující odstavce.

Adaptivní metody. V předcházejícím odstavci jsme se zabývali numerickou metodou pro řešení Navierových-Stokesových rovnic popisujících proudění vazké stlačitelné tekutiny. Zatím jsme se nezmínili o tom, jakým způsobem se vytváří triangulace (pro $N = 2$) či tetrahedrizační (pro $N = 3$) výpočetní oblasti Ω , respektive jak jemné dělení máme zvolit. Je zřejmé, že jemnější dělení povede k přesnějším numerickým výsledkům, nicméně také k daleko větším nárokům na výpočetní čas a paměť počítače. Nalezení „optimální“ sítě je tedy vždy kompromisem mezi přesností výsledku a efektivitou (časovou náročností) výpočtu.

Při řešení komplikovanějších úloh je vhodné mít jemné dělení pouze v těch částech výpočetní oblasti, kde to daná úloha vyžaduje. Např. při simulaci obtékání profilu křídla letadla stačí mít jemné dělení v blízkosti profilu, zatímco ve větší vzdálenosti od profilu, kde veličiny popisující proudění tekutiny jsou téměř konstantní, je postačující použít dělení podstatně hrubší. Přirozeně by bylo vhodné mít nějaký nástroj, který by automaticky detekoval oblasti a prováděl jejich zjemnění tam, kde je třeba. Touto problematikou se zabývá celá oblast numerické matematiky známá jako *adaptivní metody*, bez jejichž použití by se v současnosti neobešel téměř žádný výpočet praktického problému.

Základní princip adaptivních metod je následující. Na počátku výpočtu zvolíme startovací ne příliš jemnou síť \mathcal{D}_0 , na které provedeme první výpočet pomocí vhodné numerické metody.

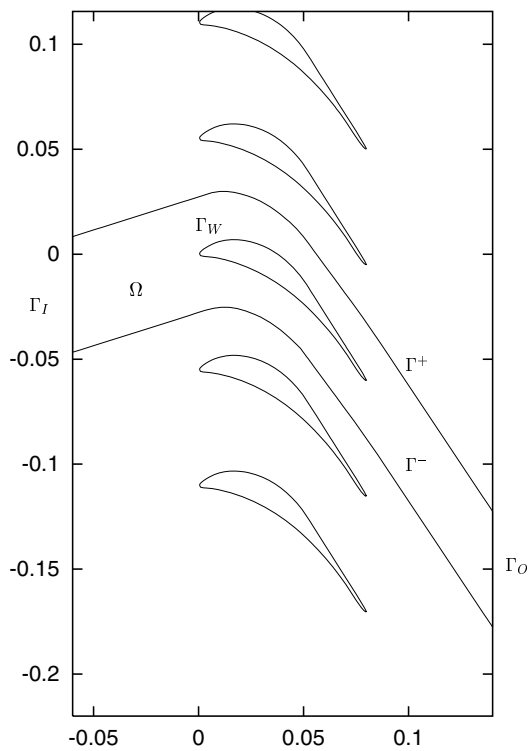
Na základě získaného numerického řešení spočteme pro každý element sítě \mathcal{D}_0 hodnotu nějakého vhodného *indikátoru*. Pokud je tato hodnota větší než zvolená tolerance, je třeba tento element nějakým způsobem rozdělit na elementy menší. Tak získáme novou (již zjemněnou) síť \mathcal{D}_1 a na ní pak provedeme další výpočet. Celý algoritmus můžeme opakovat (dostáváme postupně sítě $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots$), dokud nedosáhneme požadované přesnosti řešení. V principu dostáváme na nejhrubší síti první přiblížení řešení problému, pak postupně získáváme další detaily.

Celý adaptivní proces je dán volbou indikátoru a také způsobem zjemňování sítě. Zde uvedeme pouze několik základních přístupů, které se úspěšně používají při simulaci stlačitelného proudění.

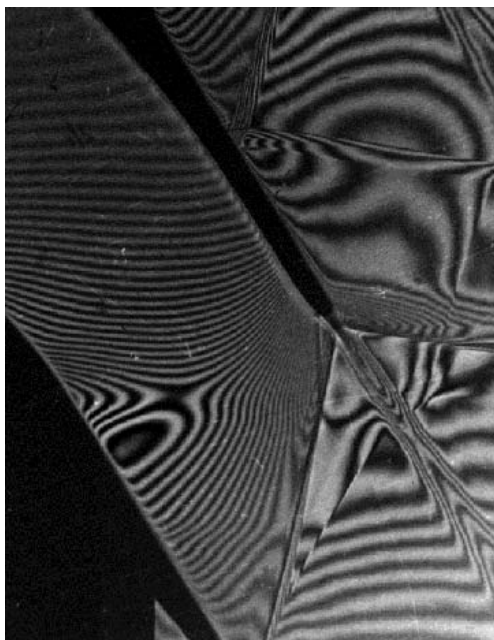
- **Indikátor rázové vlny** je vhodný při řešení transonického proudění, kdy rychlost proudící tekutiny přesahuje rychlost zvuku. Pak zpravidla dochází k jevům, kdy fyzikální veličiny popisující proudění (tlak, hustota a rychlost) jsou nespojitě na nějakých plochách (v případě rovinného proudění na nějakých křivkách), které nazýváme *rázové vlny*. Indikátor rázové vlny je založen na fyzikálních vlastnostech rázové vlny tím, že měří velikost změny hustoty ve směru proudící tekutiny. Pokud je tato změna větší než daná tolerance (indikátor detekoval rázovou vlnu), provede se tzv. *red-green* zjemnění, tj. trojúhelník se rozdělí na 4 stejné trojúhelníky. Pro trojrozměrné úlohy bývá použití red-green zjemňování technicky komplikovanější. Zde se užívá tzv. *bisekce*, kdy se daný čtyřstěn rozdělí na dva nové. Pomocí indikátoru rázové vlny lze docílit správné polohy a vysoké ostrosti rázových vln. Na druhou stranu nemáme žádnou informaci o chybě numerického řešení.
- **Reziduální a superkonvergenční indikátory** jsou založeny na testování velikosti chyby diskretizace daného problému. Oba tyto indikátory dávají informaci, s jakou chybou jsou řešené rovnice splněny lokálně na každém elementu. Pokud je chyba na nějakém elementu vyšší než zadaná přesnost, pak se tento element zjemní např. pomocí red-green zjemňování nebo bisekce.
- **Anizotropní adaptace sítí** představuje zcela jiný přístup, viz [3]. Metoda je založena na kontrole tzv. chyby interpolace přesného řešení v prostoru funkcí po částech lineárních. Rozdíl hodnoty funkce a její interpolace musí být menší než zadaná přesnost a současně počet elementů sítě musí být minimální. Tato myšlenka pak vede ke konstrukci sítě, která je rovnoměrná (délky všech hran jsou stejné) v Riemannově metrice, která je dána Hessovou maticí (tj. matice druhých derivací vhodné rekonstrukce přibližného řešení). Anizotropní adaptace sítě umožňuje kromě přidání nového bodu sítě také odebrání hrany či posuv bodu. Tento přístup umožňuje sestavit vysoce efektivní sítě, tj. sítě s poměrně malým počtem elementů, na kterých lze získat velmi kvalitní výsledky. Tento způsob adaptace má velké uplatnění především při řešení komplikovaných úloh z praxe. Bohužel opět chybí informace o skutečné chybě řešení. K získání spolehlivého aposteriori odhadu chyby je třeba použít velmi komplikované metody, o nichž se zde nemůžeme rozepisovat.

4. Příklady numerické simulace stlačitelného proudění

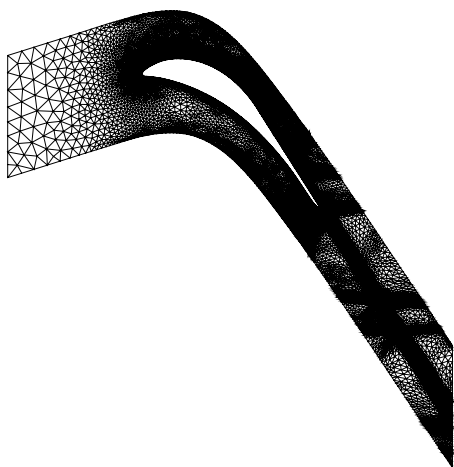
Prvním z příkladů je simulace proudění nevazké stlačitelné tekutiny kolem testovacího profilu NACA0012. Jde o řešení úlohy se symetrií (vektor nabíhající rychlosti je rovnoběžný s osou symetrie profilu). Obr. A.1 (viz barevnou přílohu) ukazuje rozložení Machova čísla M (poměru rychlosti k lokální rychlosti zvuku) kolem leteckého profilu při rychlosti v nekonečnu dvakrát větší než rychlost zvuku ($M = 2$). Ostré barevné přechody představují rázové vlny objevující se v nadzvukovém proudění.



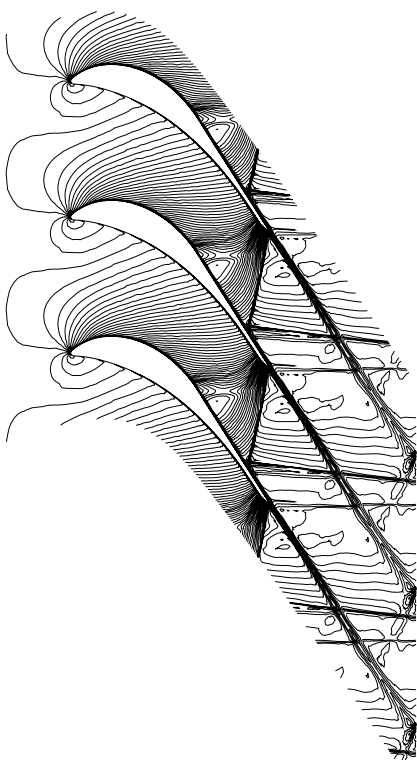
Obr. 2. Profilová mříž parní turbíny, výpočetní oblast Ω , vstup Γ_I , výstup Γ_O , neprostupná stěna lopatky Γ_W a dvě části umělé hranice Γ^+ a Γ^- .



Obr. 3. Interferogram aerodynamického tunelu s izokřivkami konstantní hustoty. Experiment byl proveden v Ústavu termomechaniky AV ČR.



Obr. 4. Konečná trojúhelníková síť získaná pomocí anizotropního adaptátoru sítí.



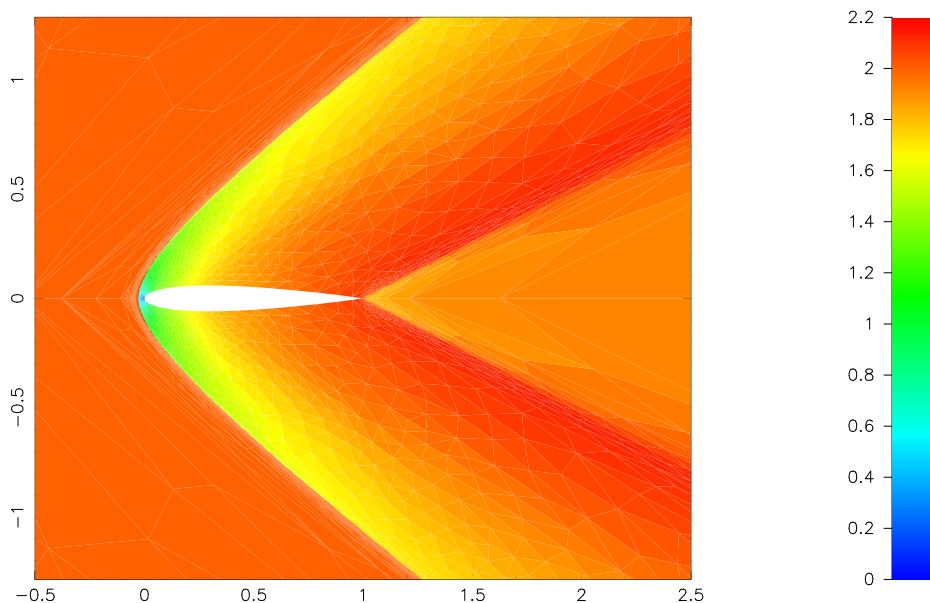
Obr. 5. Izokřivky konstantní hustoty v mezilopatkovém prostoru parní turbíny.

Dalším příkladem je simulace vazkého stlačitelného proudění mezi lopatkami parní turbíny. Místo obecné trojrozměrné úlohy uvažujeme pouze její dvojrozměrné zjednodušení. V důsledku periodicity problému pak stačí vypočítat proudění pouze kolem jedné lopatky. Na umělých hranicích Γ^+ a Γ^- zadáváme periodické okrajové podmínky, viz obr. 2. Na povrchu lopatky turbíny Γ_W předepisujeme podmínku $\mathbf{v} = 0$, na vstupu Γ_I uvažujeme podzvukové proudění se vstupním Machovým číslem $M = 0,32$

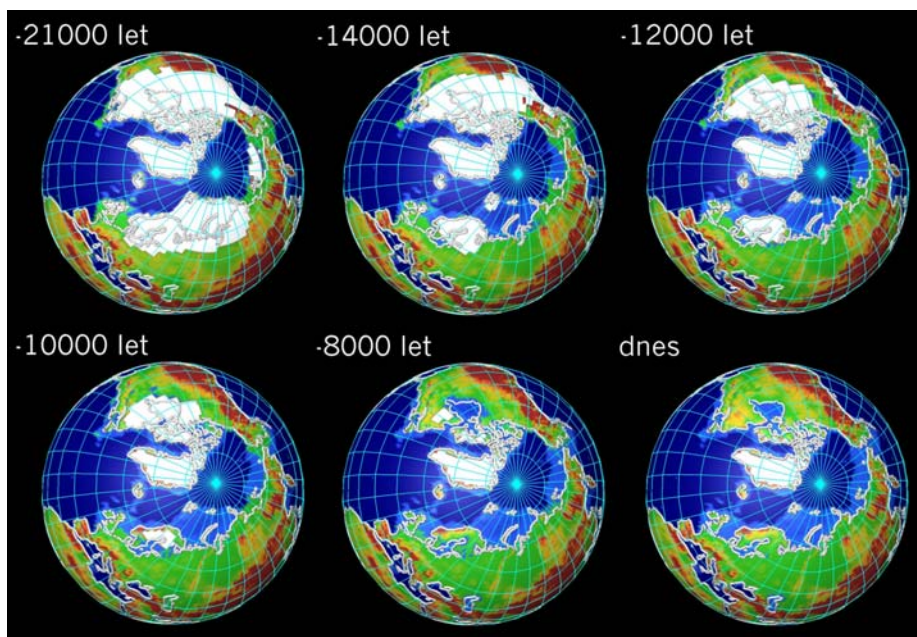
a úhlem náběhu $\alpha = 19^\circ 18'$. Na výstupu Γ_O volíme tlak takovým způsobem, abychom docílili nadzvukového výstupního Machova čísla $M = 1,189$. Výpočet byl proveden pro hodnoty koeficientů γ , μ , k a c_V , pro něž máme k dispozici srovnání s experimentálním měřením v aerodynamickém tunelu, které bylo provedeno v Ústavu termomechaniky Akademie věd ČR v Praze (viz [16]). Obr. 3 představuje interferogram izokřivek konstantní hustoty (podobně jako vrstevnice na mapě). Velká hustota izokřivek znamená velké změny hustoty, např. na rázových vlnách. Na obr. 4 je konečná trojúhelníková síť získaná pomocí anizotropního adaptátoru sítí. Na obr. 5 jsou vidět vypočtené izokřivky konstantní hustoty. Z obrázků 3 a 5 je patrné, že bylo dosaženo velmi dobré shody numerických výsledků s měřením.

L i t e r a t u r a

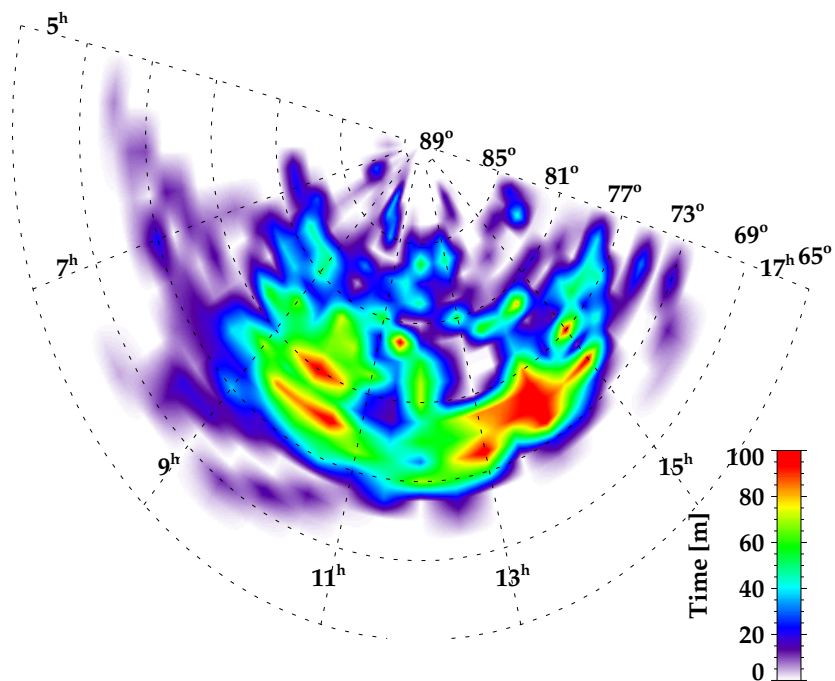
- [1] ANGOT, P., DOLEJŠÍ, V., FEISTAUER, M., FELCMAN, J.: *Analysis of a combined barycentric finite volume — nonconforming finite element method for nonlinear convection-diffusion problem*. Appl. Math. 43 (4) (1998), 263–310.
- [2] BRDIČKA, M.: *Mechanika kontinua*. Nakladatelství ČSAV, Praha 1959.
- [3] DOLEJŠÍ, V.: *Anisotropic mesh adaptation technique for viscous flow simulation*. East-West J. Numer. Math. 9 (1) (2001), 1–24.
- [4] FEISTAUER, M.: *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*. Longman Scientific & Technical, Harlow 1993.
- [5] FEISTAUER, M.: *Numerical Methods for Compressible Flow*. In: *Mathematical Fluid Mechanics. Recent Results and Open Questions* (NEUSTUPA, J., PENEL, P. — editors), Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin 2001, 105–142.
- [6] FEISTAUER, M., FELCMAN, J., LUKÁČOVÁ, M., WARNECKE, G.: *Error estimates of a combined finite volume – finite element method for nonlinear convection-diffusion problems*. SIAM J. Numer. Anal. 36 (1999), 1528–1548.
- [7] FEIREISEL, E.: *On compactness of solutions to the compressible isentropic Navier-Stokes equations, when the density is not square integrable*. Comment. Math. Univ. Carolin. 42 (2001), 83–98.
- [8] GALDI, G. P.: *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*. Volume I, Linearized Steady Problems. Springer Tracts in Natural Philosophy, Volume 38, Springer-Verlag 1994.
- [9] GIRAULT, V., RAVIART, P. A.: *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*. Springer-Verlag, Berlin 1986.
- [10] LADYZHENSKAYA, O. A.: *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon and Breach 1969.
- [11] LANDAU, L. D., LIFSHITZ, E. M.: *Hydrodynamik*. Akademie Verlag, Berlin 1981.
- [12] LIONS, P. L.: *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*. Volume 2, Compressible Models. Clarendon Press, Oxford 1998.
- [13] MATSUMURA, A., NISHIDA, T.: *Initial boundary value problems for the equations of motion of general fluids*. In: *Comput. Methods Appl. Sci. Engrg.* (GLOWINSKI, R., LIONS, J. L. — editors), North-Holland, Amsterdam 1982, 445–464.
- [14] NOVOTNÝ, A.: *Steady flows of viscous compressible fluids in exterior domains under small perturbations of great potential forces*. M³AS 3 (1993), 725–757.
- [15] RALSTON, A.: *Základy numerické matematiky*. Academia, Praha 1973.
- [16] ŠTASTNÝ, M., ŠAFAŘÍK, P.: *Experimental analysis data on the transonic flow past a turbine cascade*. ASME Publ. No. 90-GT-313, New York 1990.
- [17] TANI, A.: *On the first initial-boundary value problem of compressible viscous fluid motion*. Publ. RIMS Kyoto Univ. 13 (1997), 193–253.
- [18] TEMAM, R.: *Navier-Stokes Equations*. North-Holland, Amsterdam 1977.



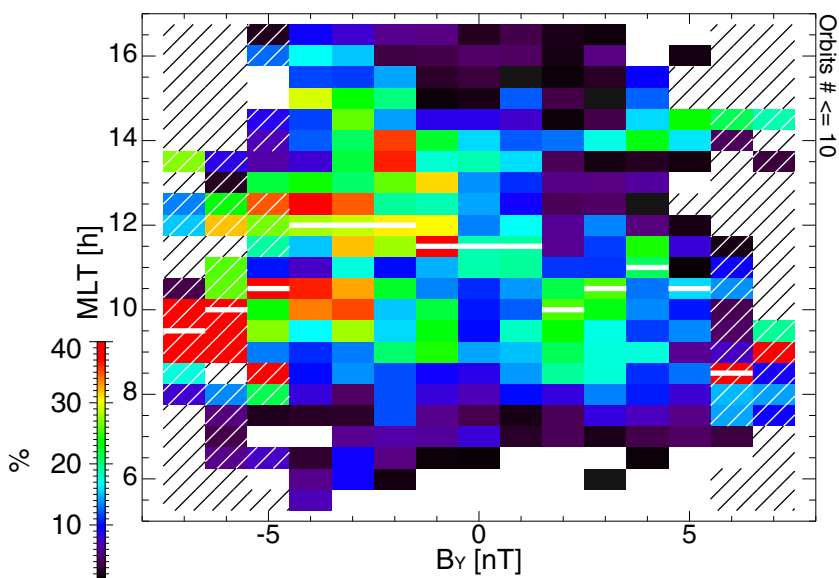
Obr. A.1 (ke str. 217). Rozložení Machova čísla kolem leteckého profilu.



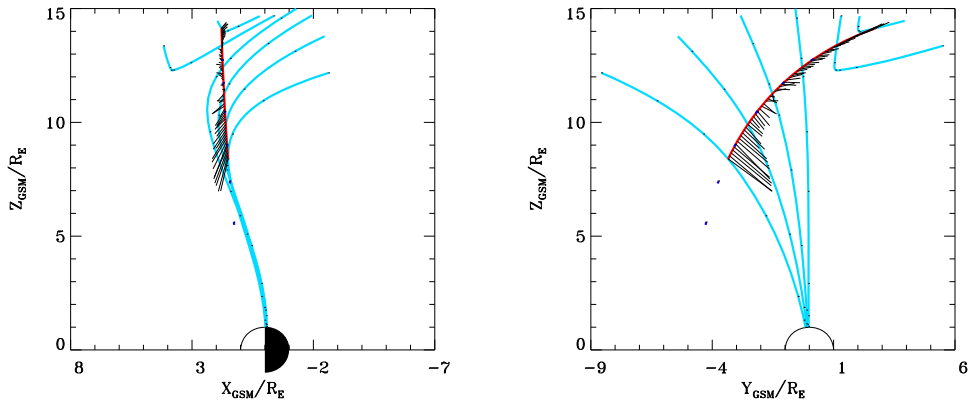
Obr. B.1 (ke str. 223). Tání ledovců na severní polokouli od maxima poslední doby ledové po současnost podle modelu ICE-4G [10]. S ústupem ledovců dochází ke stoupání mořské hladiny a zalévání severu „velké Evropy“ a pevninského „mostu“ spojujícího Asii s Amerikou. V posledních 8000 letech není už tání tak dramatické, a lze proto pozorovat jev opačný: ústup pobřežních linií kanadského Hudsonova zálivu a severního Baltu v důsledku opožděného viskoelastického výzdvihu dříve zatížených oblastí.



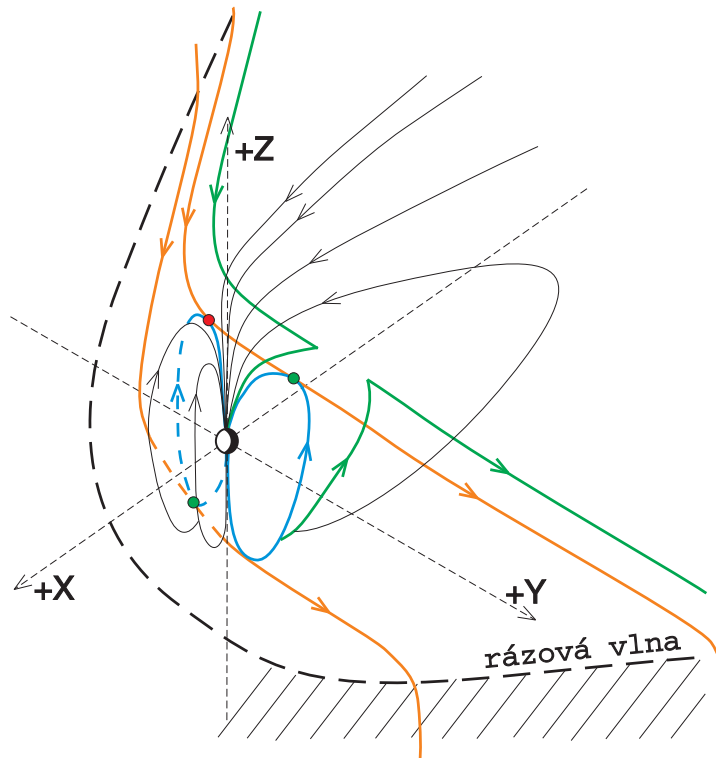
Obr. C.4 (ke str. 236). Projekce pozorování kaspu na zemský povrch.



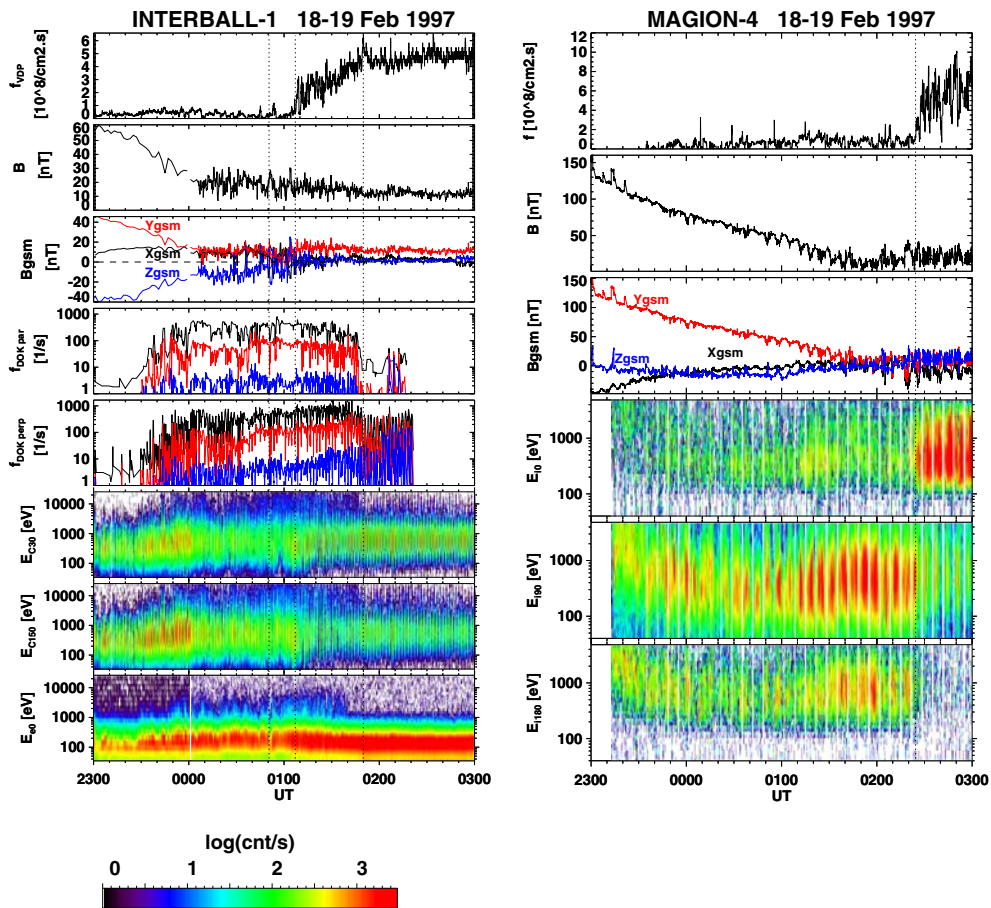
Obr. C.5 (ke str. 236). Závislost pravděpodobnosti pozorování kaspu (barevná stupnice) na lokálním čase pozorování (vodorovná osa) a na velikosti B_y složky meziplanetárního magnetického pole.



Obr. C.7 (ke str. 238). Znázornění studovaného úseku dráhy družice INTERBALL-1 na pozadí modelových siločar magnetického pole Země. Krátké úsečky představují skutečný (měřený) směr pole.



Obr. C.10 (ke str. 241). Schematické znázornění konfigurace siločar magnetického pole. Černé tenké čáry znázorňují siločáry magnetopauzy, modře jsou zvýrazněny ty siločáry, které jsou v některém bodě antiparalelní s meziplanetárním magnetickým polem. Body styku antiparalelních polí jsou zvýrazněny zelenou tečkou, červená tečka ukazuje místo, ve kterém dráha družice INTERBALL-1 kříží magnetopauzu. Zelená čára představuje otevřenou siločáru pohybující se směrem do chvostu magnetosféry.



Obr. C.8 (ke str. 238 a 241). Vertikální profil kaspu měřený družicemi INTERBALL-1 (vlevo) a MAGION-4 (vpravo). Horní panely v obou částech obrázku ukazují velikost iontového toku a další dva panely na obou stranách zobrazují velikost modulu a jednotlivých složek magnetického pole. V levé části obrázku pak následují dva panely s toky nadteplných iontů (černá – 25 keV, červená – 50 keV, modrá – 100 keV). Vyšší z nich (f_{DOKpar}) ukazuje měření iontů směřujících ke Slunci, nižší (f_{DOKperp}) měření kolmo k ose rotace družice. V posledních třech panelech jsou dynamická spektra iontů a elektronů (pouze vlevo) registrovaná v různých směrech. Čísla v indexu znamenají úhel odklonu vektoru rychlosti částic od směru Slunce – Země.