Michal Čihák

Pierre-Simon de Laplace a inverzní pravděpodobnost

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 47 (2002), No. 1, 9--21

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141108`

Pierre-Simon de Laplace a inverzní pravděpodobnost

Michal Čihák, Rychnov nad Kněžnou

1. Úvod

Článek je věnován osobnosti Pierra-Simona de Laplace, který mimořádným způsobem ovlivnil vývoj teorie pravděpodobnosti. V první části jsou zmíněny životní osudy, které jsou zajímavé zejména z hlediska jeho vztahů k význačným osobnostem a také s ohledem na jeho nezanedbatelnou roli ve známých historických událostech. Druhá část příspěvku je pokusem přiblížit Laplaceův pohled na pojem *inverzní pravděpodobnost* a zároveň ukázkou postupů a matematického aparátu, které Laplace použil při řešení praktických úloh.

2. Životní osudy

Pierre-Simon de Laplace patřil k nejvýznamnějším osobnostem vědy na přelomu 18. a 19. století. Narodil se 28. března 1749 v obci Beaumonte en Auge ve francouzské Normandii. Jeho otec, bohatý sedlák, usoudil, že bystrý, nadaný chlapec by se měl stát knězem. Poslal ho studovat do benediktinské školy, aby se připravoval na dráhu duchovního. Mladý Pierre v této mnišské škole výborně prospíval ve všech předmětech, zvláště pak v matematice, kterou se zabýval každou volnou chvíli. V 16 letech Laplace nastoupil ke studiu na univerzitě v Caen. Na přání svého otce zvolil studium teologie. Zapsal si však i několik přednášek z matematiky. Laplace byl nadšen. Postupně v sobě objevoval velký matematický talent a lásku k tomuto předmětu. Učitele mladíkovo nadání udivilo natolik, že mu poradili, aby svá neobvyklá matematická řešení poslal k posouzení předním odborníkům do Paříže. Pařížské posuzovatele Laplace sice nenadchl, ale z turínské Akademie, kam své práce také poslal, přišla slova chvály, která ho povzbudila tak, že se obrátil přímo na uznávaného matematika a fyzika Jeana le Ronda d'Alemberta (1717–1783). Tento osvícený vědec se mladíka ujal a tak brzy potom odešel osmnáctiletý Laplace do Paříže. Na základě d'Alembertova doporučení se stal profesorem matematiky na vojenské akademii.

Svou vědeckou dráhu započal v roce 1773 jako čekatel pařížské Akademie věd a později, v roce 1785, byl zvolen jejím řádným členem. Zde se zabýval především

---

Mgr. Michal Čihák (1974), Gymnázium F. M. Pelcla, Hrdinů odboje 36, 516 01 Rychnov nad Kněžnou; je externím postgraduálním studentem Matematicko-fyzikální fakulty UK, katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8 – Karlín.

Tato práce vznikla s podporou grantu MSM 113200008 (CEZ: J13/98: 113200008).

astronomií, přitom však neobyčejně prohloubil své matematické znalosti a utvořil si svébytné filozofické názory, kterými později proslul.

K jeho nejvýznamnějším vědeckým výsledkům v tomto období patří propočet dráhy malého vesmírného tělesa objeveného v souhvězdí Blíženců 13. března 1781 anglickým hvězdářem sirem Frederickem Williamem Herschelem (1738–1822). Laplace prokázal, že dráha neznámého tělesa je eliptická, čímž vyvrátil domněnku některých astronomů, že jde o kometu. Přispěl tak výrazně k objevu nové planety, která byla později nazvána Uran.

Pohnuté události roku 1789 neovlivnily zpočátku příliš Laplaceův život, neboť Akademie se bránila jakýmkoli vlivům zvenčí a pokračovala ve své činnosti bez ohledu na politické dění. Dokladem toho je i konání pravidelné konference 18. července 1789, čtyři dny poté, co byla dobytím Bastily zahájena Velká francouzská revoluce. Laplace na této konferenci vystoupil s výsledky svého výzkumu oběžné dráhy Země.

Brzy se však ukázalo, že ani Akademie nebude moci zůstat stranou politického vývoje a že bude nutno ji přizpůsobit novým podmínkám. Byl proto vytvořen výbor, který měl zpracovat návrh nového statutu Akademie. Jeho členy byli jmenováni Borda, Laplace, Condorcet a Teal. Návrh byl velmi brzy hotov, byl však zamítnut revolučně naladěnou akademií jako málo pokrokový.

V květnu 1790 byl Laplace zvolen členem Komise pro váhy a míry (Bureau des Longitudes). Brzy však byl spolu s Antoine Laurentem Lavoisierem (1743 až 1794) odvolán, přičemž jako důvod bylo uvedeno jejich „nedostatečné republikánské přesvědčení a malá nenávist vůči království“.

Protože politické nepokoje dále narůstaly, bylo stále nebezpečnější setrvávat v centru revoluce — Paříži. Laplace se proto na jaře roku 1793 rozhodl přestěhovat do provinčního Melunu. Zde také nabídl azyl Jeanu Sylvainu Baillymu, známému astronomovi a členu pařížské Akademie věd. Ten se skrýval, aby se vyhnul trestu za masakr, který se odehrál 17. července 1791 na Martově poli. Bailly byl v té době pařížským starostou a na jeho rozkaz zahájily národní gardy střelbu do republikánské demonstrace. Avšak v době, kdy byl Bailly na cestě k Laplaceovi, byl Melun obsazen armádou revolucionářů. Laplace varoval Baillyho, ten však do Melunu přesto dorazil. Zde byl brzy rozpoznán jedním z účastníků masakru. Byl uvězněn a později popraven rozhodnutím revolučního tribunálu.

Dne 20. dubna 1794 byl popraven další Laplaceův blízký přítel Bouchard de Saron a stejný osud potkal 8. května i Lavoisiera.

Francie byla neustále v nebezpečí před útoky prusko-rakouských armád. Známí vědci jako Lazar Carnot (1753–1823), Gaspard Monge (1746–1818), Jean Baptiste Fourier (1768–1830), Antoine François de Fourcroy (1755–1809), Alexander-Théophile Vandermonde (1735–1796) a mnoho dalších věnovalo svou energii na její obranu. Laplace však zatím stále setrvával v bezpečí venkova.

Teprve 27. července 1794, krátce po popravě vůdce jakobínů Maximiliena de Robespierra, se Laplace vrátil zpět do Paříže. Důvodem byla nabídka místa profesora na nově zřízené École Normale, určené ke vzdělávání učitelů. Byl mu svěřen obtížný úkol přednášet o nových výsledcích obecné teorie pravděpodobnosti. Obtížný proto, že bylo nutno přizpůsobit výklad úrovni posluchačů, kteří neovládali infinitezimální počet.

Laplace se však úkolu zhostil nadmíru dobře. V roce 1795 proslovil sérii přednášek, později vydanou pod názvem *Essai Philosophique sur les Probabilités* jako úvod ke druhému vydání jeho knihy *Théorie Analytique des Probabilités* roku 1814. (Poprvé byla tato kniha vydána v roce 1812.) Jak napovídá název, přednášky měly spíše filozofický než matematický charakter a byly tedy přístupné široké veřejnosti. Laplace v nich představil prostředky, které dává teorie pravděpodobnosti pro řešení problémů v přírodních i společenských vědách (např. v astronomii, geodézii, demografii aj.). Přednášky si získaly velkou popularitu po celé Francii, ještě před knižním vydáním byly zapisovány stenografy a dále šířeny.

V roce 1795 byl místo zrušené Akademie zřízen Národní institut. Laplace byl jmenován prezidentem matematické sekce. Členem institutu byl také Napoleon Bonaparte (1769–1821). Laplace byl k němu zpočátku nedůvěřivý, svůj postoj však postupně změnil. Viděl v Napoleonovi osobnost schopnou stabilizovat politickou situaci ve Francii, vrátit jí bývalou prestiž a pozici evropské mocnosti.

V roce 1802, kdy Laplace vydává třetí svazek své knihy *Méchanique Céleste*, věnuje ho *„Bonapartovi, dobyvateli Evropy, kterému Francie vděčí za svoji prosperitu, velikost a nejslavnější epochu svých dějin“*. Poté, co se Napoleon v květnu roku 1804 nechal prohlásit císařem, zasílá mu Laplace osobní gratulaci. Přitom je nutno poznamenat, že mnoho vědců té doby (Monge, Arago a další) nesouhlasilo s přeměnou Francie na císařství. Nicméně Laplace podporoval Napoleona po celou dobu trvání císařství a za svoji přízeň byl odměněn povýšením do šlechtického stavu. Byl však první, který Napoleona opustil v době jeho první porážky a nepodpořil ho ani při jeho návratu v době stodenního císařství, protože jak správně předpokládal, obnovení původní monarchie už nebylo možné.

V době restaurované vlády Bourbonů se Laplaceovo politické smýšlení vyhrotilo až na ultramonarchistické. Přísahal věrnost Ludvíku XVIII. a přidal se k radikální politické větvi „Ultras“, vytvořené převážně z řad emigrantské aristokracie pobouřené ztrátou rodových postavení a majetků. Jeho radikální názory způsobily, že na konci svého života ztratil mnoho přátel a zůstal izolován od pokrokové vědecké obce. Když například Karel X. vyhlásil cenzuru, Národní institut se rozhodl protestovat. Laplace reagoval tím, že opustil schůzi, na které se protest projednával a navíc vydal zvláštní prohlášení, v němž se od protestu distancoval.

Laplaceova životní pouť skončila 5. března 1827 v Paříži.

3. Inverzní pravděpodobnost a její aplikace

Když v roce 1812 poprvé vyšlo Laplaceovo dílo *Analytická teorie pravděpodobnosti* (*Théorie Analytique des Probabilites*[1])), bylo vědeckou veřejností očekáváno s velkým napětím. Svými přednáškami získal mnoho zájemců o studium teorie pravděpodobnosti a ti byli zvědavi, jak se podaří Laplaceovi formulovat filozofické úvahy do

[1]) Poznamenejme, že v knihovně MFF UK v Praze je téměř kompletní Laplaceovo dílo k dispozici v originálních vydáních z let 1845–1847.

exaktního jazyka matematiky. Nutno říci, že Laplace očekávání beze zbytku naplnil. Teorii buduje důsledně užitím diferenciálního a integrálního počtu, definuje množství nových pojmů (jako např. *vytvořující funkce*) a celé metodicky velmi dobře propracované dílo ilustruje řadou praktických aplikací. Vyvrcholením díla je potom důkaz tzv. *Moivreovy-Laplaceovy věty*, vyjadřující limitní vlastnosti binomického rozdělení.

My se zde však zmíníme o jiném významném Laplaceově výsledku, uvedeném také v této knize. Je jím tzv. *definice inverzní pravděpodobnosti.* Problém směřující k této definici zkoumali už, jak uvádí [8], Jakob Bernoulli (1654–1705) a Thomas Bayes (1702–1761). V dnešní formulaci by zněl asi takto:

Nechť jev M má pravděpodobnost p, kterou neznáme. Proveďme sérii n nezávislých pokusů a nechť jev M v nich nastane k-krát. Jaká je pravděpodobnost jevu, že $a < p < b$, kde a, b jsou daná čísla?

V článku [8] je uveden způsob, jakým řešil uvedený problém v ne zcela obecné podobě Thomas Bayes. Je zajímavé, že Bayes při řešení vůbec nevyužívá možností integrálního počtu, v té době jinými matematiky již běžně užívaného.

Jak se uvádí v [11], Laplace publikoval svou první práci zabývající se problematikou inverzní pravděpodobnosti roku 1774. V té době ještě neznal Bayesovy výsledky. Dozvěděl se o nich teprve roku 1781. Laplace však od počátku přistoupil k problému obecněji. Ve svých úvahách vyšel ze vztahu, který je v současných učebnicích uveden pod názvem Bayesův vzorec. Protože jde o vzorec, který je dostatečně znám, uvedeme ho jen stručně a bez důkazu.

3.1. Bayesův vzorec

Nechť $H_1, H_2, \ldots, H_m$ jsou navzájem se vylučující jevy v pravděpodobnostním prostoru Ω a tvoří rozklad tohoto prostoru. Přitom pravděpodobnosti těchto jevů nechť jsou předem známé a platí $P(H_i) > 0$ pro $i = 1, \ldots, m$. Představme si nyní, že dostaneme dodatečnou informaci, že nastal jev A. Zajímá nás, jak se změní pravděpodobnosti nastoupení jevů $H_1, H_2, \ldots, H_m$ za podmínky, že nastal jev A. Za předpokladu $P(A) > 0$ není těžké ukázat, že

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)\,P(A \mid H_i)}{\sum\limits_{j=1}^{m} P(H_j)\,P(A \mid H_j)}\,. \qquad (1)$$

Je zajímavé, jak je zmíněno v [10], že Bayes nedospěl ke vzorci v tomto tvaru, pouze se zabýval velmi blízkými úvahami. Skutečným autorem vzorce ve tvaru (1) byl teprve Laplace.

Bayesův vzorec je dnes základem, na kterém je vybudována tzv. teorie bayesovských metod. Ta má četné praktické aplikace a je všeobecně považována za užitečný statistický nástroj. Má však také své odpůrce, kteří poukazují zejména na její „částečnou“ subjektivitu. Problém je v tom, že ve vzorci (1) často neznáme pravděpodobnosti $P(H_j)$ a musíme je (subjektivně) odhadnout.

Jinou možností je vyjít z principu neurčitosti a považovat pravděpodobnosti $P(H_j)$ za stejné. Jak je ukázáno v [1], nedopustíme se tím významné chyby v případě dostatečně velkého výběru. Navíc se vzorec (1) ještě dále zjednoduší, neboť pravděpodobnosti $P(H_j)$ je možné zkrátit a dostaneme

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{m} P(A \mid H_j)}. \tag{2}$$

Myšlenka považovat výchozí pravděpodobnosti $P(H_j)$ za stejné se objevila už u Bayese. Teprve Laplace však upozorňuje na to, že je nutno s tímto předpokladem nakládat opatrně zejména v případě malého počtu pokusů v sérii.

Nyní budeme ilustrovat Bayesovu větu na jednom konkrétním příkladě, který nám zároveň ukáže cestu k řešení úvodního problému.

Nechť je dáno m osudí²), z nichž každé obsahuje bílé a černé koule. Osudí jsou číslována čísly $1, 2, \ldots, m$. Pravděpodobnosti volby jednotlivých osudí jsou stejné, pravděpodobnost vytažení bílé koule z i-tého osudí nechť je p_i. Zvolíme náhodně jednu urnu a vytáhneme z ní n-krát po sobě jednu kouli (po každém tahu vždy vybranou kouli vrátíme zpět, jde tedy o tzv. výběr s vracením). Při tomto pokusu zjistíme, že mezi n takto vytaženými koulemi je k koulí bílých a $n-k$ koulí černých. Ptáme se:

a) *Jaká je pravděpodobnost, že jsme při pokusu zvolili osudí s číslem i?*
b) *Jaká je pravděpodobnost, že jsme zvolili osudí, pro něž pravděpodobnost vytažení bílé koule leží v intervalu $[a, b]$, kde a, b jsou daná reálná čísla?*

Řešení:

a) Označíme H_i jev, který odpovídá zvolení i-tého osudí, dále označíme A jev, který odpovídá vytažení právě k koulí bílých mezi všemi n vytaženými koulemi. Potom můžeme psát

$$P(A \mid H_i) = \binom{n}{k} p_i^k (1-p_i)^{n-k}. \tag{3}$$

Odtud podle vzorce (2) dostaneme

$$P(H_i \mid A) = \frac{\binom{n}{k} p_i^k (1-p_i)^{n-k}}{\sum_{j=1}^{m} \binom{n}{k} p_j^k (1-p_j)^{n-k}}. \tag{4}$$

b) Náhodný jev, na jehož pravděpodobnost se zde ptáme, je sjednocením několika náhodných disjunktních jevů, z nichž každý odpovídá volbě takové urny, že pravdě-

²) Úlohy o vybírání koulí z osudí se v Laplaceově knize [7] objevují velmi často. Laplace je pravděpodobně považoval za velmi vhodné pro demonstraci svých teoretických výsledků.

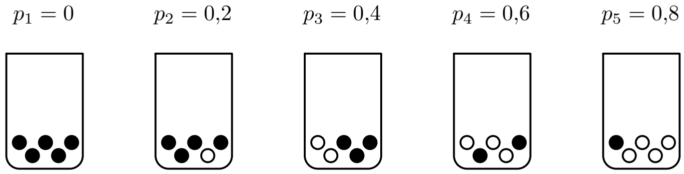
podobnost vytažení bílé koule z této urny je v intervalu $[a, b]$. Můžeme tedy psát

$$P(a \leqq p \leqq b \mid A) = \frac{\displaystyle\sum_{\{j : p_j \in [a,b]\}} \binom{n}{k} p_j^k (1 - p_j)^{n-k}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \binom{n}{k} p_j^k (1 - p_j)^{n-k}}, \tag{5}$$

kde p může nabývat hodnot $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Pravděpodobnosti (4) a (5) jsou tzv. *aposteriorní pravděpodobnosti* počítané na základě získané informace, že při pokusu bylo mezi n vytaženými koulemi právě k koulí bílých. Naproti tomu *apriorní pravděpodobnosti* zvolení uren považujeme před obdržením informace podle principu neurčitosti za stejné a tady rovné $1/m$.

Speciálním případem této úlohy je případ, kdy v každém osudí je celkem m koulí, přičemž v i-té urně je právě i koulí bílých, tj. $p_i = i/k$. Příkladem může být situace znázorněná na obrázku 1.



Obr. 1. Speciální případ pěti uren. Zde může parametr p nabývat pěti různých hodnot.

Pak podle (5) je pravděpodobnost, že jsme zvolili osudí, pro něž pravděpodobnost vytažení bílé koule p_i leží v intervalu $[a, b]$, dána výrazem

$$P(a \leqq p \leqq b \mid A) = \frac{\displaystyle\sum_{\{j : j/k \in [a,b]\}} \binom{n}{k} \left(\frac{j}{m}\right)^k \left(1 - \frac{j}{m}\right)^{n-k}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \binom{n}{k} \left(\frac{j}{m}\right)^k \left(1 - \frac{j}{m}\right)^{n-k}}. \tag{6}$$

Představme si nyní, že číslo m čili počet osudí bude velmi vysoký. Potom výraz (6) limitně přejde ve výraz

$$P(a \leqq p \leqq b) = \frac{\displaystyle\int_a^b \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \, \mathrm{d}p}{\displaystyle\int_0^1 \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \, \mathrm{d}p}, \tag{7}$$

kde p je parametr z intervalu $[0, 1]$. Výraz (7) přitom můžeme po zkrácení členem $\binom{n}{k}$ zapsat v jednodušším tvaru

$$P(a \leqq p \leqq b) = \frac{\displaystyle\int_a^b p^k (1 - p)^{n-k} \, \mathrm{d}p}{\displaystyle\int_0^1 p^k (1 - p)^{n-k} \, \mathrm{d}p}. \tag{8}$$

Vztah (8) je vlastně vyjádřením rozdílu funkčních hodnot $F(b) - F(a)$ aposteriorní distribuční funkce rozdělení parametru p za podmínky, že nastalo k úspěchů v posloupnosti n nezávislých pokusů a za předpokladu, že apriorní hustota parametru p se řídí rovnoměrným rozdělením na intervalu [0,1]. Vzorec v této podobě je nazýván vzorcem pro *inverzní pravděpodobnost.* Velmi podobný tvar uvádí i Bayes. Podle [11] je však jeho vyjádření pro současného čtenáře hůře čitelné, neboť, jak už bylo řečeno, nepoužíval integrální symboliku. Teprve Laplace při práci s podobnými výrazy plně využil možnosti, které skýtal diferenciální a integrální počet.

Poznamenejme ještě, že integrál ve jmenovateli výrazu (7) je tzv. beta funkce, jež hraje významnou roli v matematické analýze a nejen tam.

3.2. Problém narození chlapce

Ukažme si nyní jednu z úloh, které Laplace řešil pomocí inverzní pravděpodobnosti. V [7] na str. 414 nalezneme problém, který ve volném překladu zní asi takto:

Uvažujme narození dětí pozorovaná v Paříži, Londýně a Království Neapolském.

- *V období čtyřiceti let od roku 1745, kdy se v Paříži začaly zaznamenávat počty narozených dětí, do roku 1784 zde bylo pokřtěno* 393 386 *chlapců a* 377 555 *dívek, což dává poměr přibližně* 25 : 24. *Přitom jsou zde započítány i děti nalezené.*
- *Podobně v Londýně bylo v období devadesáti pěti let od roku 1664 do roku 1758 zaznamenáno* 737 629 *chlapců a* 698 958 *dívek, takže přibližný poměr je* 19 : 18.
- *Konečně v Království Neapolském (Sicílie není započítána) bylo v období devíti let od roku 1774 do roku 1782 registrováno* 782 352 *chlapců a* 746 821 *dívek. Poměr je tedy asi* 22 : 21.

Je to právě Paříž, kde se poměr narozených chlapců k dívkám nejvíce blíží jedné. Proto pravděpodobnost, že možnost narození chlapce překročí $\frac{1}{2}$, *by zde měla být menší než v Londýně a Království Neapolském. Určeme tuto pravděpodobnost.*

Motivace úlohy je jasná. Poté, co se začaly vést záznamy o novorozencích, zjistili demografové, že chlapci se rodí o něco častěji než dívky. Chtěli tedy vyslovit obecný přírodní zákon, že narození chlapce je pravděpodobnější než narození dívky. Avšak objevili se i odpůrci, kteří tvrdili, že i opak může být pravdou, neboť větší počty chlapců mohou být jen „dílem náhody“. Demografové se proto obrátili na matematiky s žádostí, ať jim pravděpodobnost, že taková „náhoda“ nastane, vypočítají. Ukažme si tedy, jak Laplace při řešení postupoval.

Použijeme původní značení, i když je z dnešního hlediska trochu nezvyklé. Počet chlapců z určitého počtu narozených dětí je možno považovat za náhodnou veličinu s binomickým rozdělením (stejně jako počet úspěchů v posloupnosti nezávislých pokusů). Označíme-li p počet narozených chlapců v souboru $p+q$ novorozenců, q počet narozených dívek v souboru $p+q$ novorozenců a x neznámý parametr znamenající skutečnou pravděpodobnost narození chlapce, pak můžeme podle (3) psát

$$P(\text{narodilo se } p \text{ chlapců}) = \binom{p+q}{p} x^p (1-x)^q. \tag{9}$$

Nyní chceme určit pravděpodobnost, že hodnota neznámého parametru x je větší než $\frac{1}{2}$. To je přesně úloha na použití vzorce (7). Přitom je výhodnější počítat doplňkovou pravděpodobnost, tj. pravděpodobnost jevu, že hodnota parametru x je menší než $\frac{1}{2}$. Dostáváme

$$P(0 \leqq p \leqq \tfrac{1}{2}) = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^p (1-x)^q \,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 x^p (1-x)^q \,\mathrm{d}x}\,. \tag{10}$$

Z dnešního hlediska máme vlastně úlohu vyřešenou, neboť zbývá dosadit do vzorce za p a q a pomocí tabulek beta funkce nebo spíše pomocí počítače a vhodného matematického systému (např. Mathematica nebo Maple) určit hodnoty integrálů. Tuto možnost však Laplace neměl, a proto navrhl různé aproximace pro výpočet těchto integrálů. Je přitom obdivuhodné, jak elegantně se s problémem vyrovnává. Užívá spoustu triků a dostává poměrně jednoduché, přitom však velmi přesné výsledky. Zde jsou uvedeny aproximace integrálů z (10)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p (1-x)^q \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{p+q+1}\cdot(p-q)}\left[1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} + \cdots\right], \tag{11}$$

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q \,\mathrm{d}x = \frac{p^{p+\frac{1}{2}}\cdot q^{q+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2\pi}}{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}\left[1 + \frac{(p+q)^2 - 13pq}{12pq(p+q)} + \cdots\right]. \tag{12}$$

Ukázka postupu, jakým Laplace dospěl k těmto aproximacím, je pro zájemce uvedena v dodatku. Nyní můžeme výrazy (11), (12) dosadit do vztahu (10). Laplace však nejprve provedl zjednodušení. Označil

$$Q = \frac{(p+q)^2 - 13pq}{12pq(p+q)} \tag{13}$$

a vztah (12) přepisuje do tvaru

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q \,\mathrm{d}x = \frac{p^{p+\frac{1}{2}}\cdot q^{q+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2\pi}}{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}\,[1 + Q + \cdots]\,. \tag{14}$$

Nyní rozšířil pravou stranu vztahu (14) výrazem $1-Q$, výraz $[1 - Q^2 - \cdots]$ položil přibližně roven 1 a dostal

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q \,\mathrm{d}x \approx \frac{p^{p+\frac{1}{2}}\cdot q^{q+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2\pi}}{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{1-Q}\,. \tag{15}$$

Konečně dosadil (15) do (10), takže obdržel

$$P(0 \leqq p \leqq \tfrac{1}{2}) = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^p (1-x)^q \,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 x^p (1-x)^q \,\mathrm{d}x} =$$

$$= \frac{(p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}(p-q)2^{p+q+\frac{3}{2}}\cdot p^{p+\frac{1}{2}}\cdot q^{q+\frac{1}{2}}}\left[1 - \frac{p+q}{(p-q)^2} - \frac{(p+q)^2 - 13pq}{12pq(p+q)} - \cdots\right]. \tag{16}$$

Ani s tímto výsledkem však Laplace stále nebyl spokojen, neboť výraz obsahuje exponenty s čísly p a q, která jsou v naší úloze značně vysoká a umocnění by tedy bylo problematické. Proto pokračuje dále úpravami členů, které tyto exponenty obsahují. Využívá přitom následujícího obratu: Označil

$$R = \ln\left[\frac{\left[\frac{1}{2}(p+q)\right]^{p+q}}{p^p q^q}\right] = -p\ln\left(1+\frac{p-q}{p+q}\right) - q\ln\left(1-\frac{p-q}{p+q}\right), \tag{17}$$

kde použil vztahy

$$1+\frac{p-q}{p+q} = \frac{2p}{p+q}, \qquad 1-\frac{p-q}{p+q} = \frac{2q}{p+q}. \tag{18}$$

Nyní rozvinul logaritmy podle Taylorovy věty, takže dostal

$$\ln\left(1+\frac{p-q}{p+q}\right) \approx \left[\frac{p-q}{p+q} - \frac{1}{2}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^4 + \cdots\right], \tag{19}$$

$$\ln\left(1-\frac{p-q}{p+q}\right) \approx -\left[\frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{2}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^4 + \cdots\right]. \tag{20}$$

Ze (17), (19) a (20) obdržel

$$\begin{aligned} -p\ln\left(1+\frac{p-q}{p+q}\right) - q\ln\left(1-\frac{p-q}{p+q}\right) \approx \\ \approx \left(\frac{p-q}{p+q}\right)(q-p) + \frac{1}{2}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2(q+p) + \\ + \frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3(q-p) + \frac{1}{4}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^4(q+p) + \cdots = \\ = (p+q)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^6 + \cdots\right] + \\ + (q-p)\left[\frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^5 + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Rozšíříme-li poslední závorku výrazem $p+q$, dostaneme

$$R \approx -(p+q)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2 + \frac{1}{3\cdot 4}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^4 + \frac{1}{5\cdot 6}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^6 + \cdots\right]. \tag{21}$$

Do výrazu (21) již Laplace dosadil $p = 393\,386$ a $q = 377\,555$, což jsou počty novorozenců zjištěné v Paříži. K určení argumentu přirozeného logaritmu používal tabulky dekadických logaritmů. Po dosazení do (16) obdržel hodnotu $5{,}59092940 \cdot 10^{-73}$, což je přibližně hodnota doplňkové pravděpodobnosti k hledané.

Pro srovnání: tatáž pravděpodobnost vypočítaná přímo ze vztahu (10) pomocí počítačového programu MATHEMATICA je rovna $5{,}59280142 \cdot 10^{-73}$. Obdržíme ji po zadání jediného příkazu

```
BetaRegularized[0.5, 393387, 377556].
```

Nyní Laplace konstatuje, že doplňková pravděpodobnost je tak nepatrně malá, že ji můžeme považovat skoro za nulovou. Z toho vyvozuje, že máme prakticky stoprocentní jistotu, že narození chlapce je v Paříži pravděpodobnější než narození dívky. Podobné výsledky, jak říká Laplace, obdržíme i pro jiná velká evropská města.

Naproti tomu v malém francouzském městečku Vitteaux bylo zaznamenáno ze 415 narozených dětí 203 chlapců a 212 dívek. I přesto, že počet narozených chlapců je zde nižší než počet narozených dívek, počítá Laplace pravděpodobnost jevu, že pravděpodobnost narození chlapce ve Vitteaux je vyšší než pravděpodobnost narození dívky. Tentokrát obdržel hodnotu 0,33, kterou interpretuje tak, že vzhledem k malému počtu pozorování je dost dobře možné, že skutečná pravděpodobnost narození chlapce je ve Vitteaux vyšší než pravděpodobnost narození dívky, a to i přesto, že záznamy ukazují pravý opak.

Zde Laplace názorně demonstruje zákonitost, dnešním statistikům velmi dobře známou, že totiž není možné činit spolehlivé závěry na základě malého počtu pozorování.

Velmi zajímavá je také poznámka uvedená ve formulaci úlohy ze začátku tohoto oddílu. Laplace zde zmiňuje, že v pařížských záznamech jsou započítány i děti nalezené. Tato zdánlivá maličkost se ukázala být velmi důležitá. Při zkoumání poměrů narozených chlapců a dívek v jednotlivých evropských městech Laplace zjistil, že právě v Paříži se uvedený poměr nejvíce blíží jedné, a to značně výrazněji než v ostatních městech. Nejprve si nedokázal tento jev vysvětlit, později však objevil v záznamech sirotčinců zajímavou skutečnost. Mezi nalezenými dětmi velmi výrazně převažovaly dívky. Venkovské rodiny, které žily často ve velké bídě a nedokázaly uživit všechny děti, se zbavovaly hlavně dívek, neboť chlapci mohli lépe zastat těžkou práci na poli. A protože sirotků bylo v té době v Paříži velmi mnoho, byl jimi celkový poměr značně zkreslen. Uvedená poznámka souvisí opět s problematikou tzv. *reprezentativnosti výběru*, statistiky dnes intenzivně zkoumanou.

Ačkoliv za období vzniku statistiky jako vědy je považována až druhá polovina 19. století, můžeme v Laplaceově díle nalézt řadu velmi zajímavých úvah, týkajících se právě statistiky. Laplace se však nikdy nepokoušel vnést mezi tyto úvahy nějaký systém, zajímaly ho jen v souvislosti s pravděpodobnostními problémy, které řešil.

4. Dodatek

Ukažme si přibližně postup, jakým Laplace aproximoval hodnoty integrálů tvaru

$$\int_0^\theta x^p(1-x)^q \,\mathrm{d}x \tag{22}$$

pro $\theta \in (0,1]$ a velmi velká přirozená čísla p a q. Použijeme přitom v podstatě stejné označení jako Laplace, pouze s drobnými úpravami pro zvýšení čitelnosti.

Laplace nejprve pro pevně zvolené p, q označil $y(x) = x^p(1-x)^q$ a provedl substituci

$$t(x) := t = \ln\frac{y(\theta)}{y(x)}\,. \tag{23}$$

Inverzní funkci k funkci $t(x)$ označil $x(t)$ a vyjádřil ji Taylorovým polynomem se zbytkem

$$x(t) = x(0) + \frac{\mathrm{d}x(0)}{\mathrm{d}t}\frac{t}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2x(0)}{\mathrm{d}t^2}\frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathrm{d}^nx(0)}{\mathrm{d}t^n}\frac{t^n}{n!} + R_n(t)\,, \tag{24}$$

kde

$$R_n(t) = \frac{\mathrm{d}^{n+1}x(\xi)}{\mathrm{d}t^{n+1}}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \tag{25}$$

je zbytek v Lagrangeově tvaru a ξ je vnitřní bod intervalu J s krajními body 0 a t.

Dále pokračoval derivováním funkce $x(t)$ podle t až do řádu n. Přitom zavedl další substituci

$$v(x) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}t(x)}{\mathrm{d}x}\right)^{-1} = \left[\frac{y(x)}{y(\theta)}\left(\frac{-y(\theta)\,\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}}{[y(x)]^2}\right)\right] = -\frac{y(x)}{\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}} \tag{26}$$

a jejím využitím vyjádřil

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}v\big(x(t)\big)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\,v(x),\\
\frac{\mathrm{d}^3x(t)}{\mathrm{d}t^3} &= \frac{\mathrm{d}^2v(x)}{\mathrm{d}x^2}\,v(x),\\
\frac{\mathrm{d}^4x(t)}{\mathrm{d}t^4} &= \frac{\mathrm{d}^3v(x)}{\mathrm{d}x^3}\,v(x)\,,\\
&\ \ \vdots
\end{aligned} \tag{27}$$

Existence derivací (26) a (27) je zaručena při splnění předpokladů věty, která se dnes uvádí pod názvem *věta o derivaci inverzní funkce* a kterou můžeme nalézt např. v [4, str. 216]. Laplace se na tomto místě otázkou existence derivací nezabýval.

Důvodem je patrně jeho strohý způsob výkladu. Předpokládal již značně erudovaného čtenáře, který si sám platnost jeho tvrzení promyslí a zdůvodní.

Derivace (26) a (27) potom dosadil do výrazu (24). Dále z (23) usoudil, že $x(0) = \theta$. Výraz (24) nyní zapsal ve tvaru

$$x(t) = \theta + v(\theta)\frac{t}{1!} + v(\theta)\frac{\mathrm{d}v(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\frac{t^2}{2!} + v(\theta)\frac{\mathrm{d}^2v(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{t^3}{3!} + \cdots \tag{28}$$

Derivováním (28) obdržel

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= 0 + v(\theta)\frac{1}{1!} + v(\theta)\frac{\mathrm{d}v(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\frac{t}{1!} + v(\theta)\frac{\mathrm{d}^2v(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{t^2}{2!} + \cdots = \\ &= v(\theta)\left(1 + \frac{\mathrm{d}v(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\frac{t}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2v(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{t^2}{2!} + \cdots\right). \end{aligned} \tag{29}$$

Nyní již přistoupil k vyjádření integrálu. S využitím *věty o substituci*[3]) při použití vztahu (23) dostal

$$\begin{aligned}\int_\theta^1 y(x)\,\mathrm{d}x &= y(\theta)v(\theta)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\left(1 + \frac{\mathrm{d}v(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\frac{t}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2v(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{t^2}{2!} + \cdots\right)\mathrm{d}t = \\ &= y(\theta)v(\theta)\left(1 + \frac{\mathrm{d}v(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\frac{t}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2v(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{t^2}{2!} + \cdots\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Zde Laplace využil znalost tzv. Γ-*funkce*. Ta je definována (např. v [6]) pro $s \in (0, \infty)$ integrálem

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t. \tag{31}$$

Připomeňme, že pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$\Gamma(n) = (n-1)!\ . \tag{32}$$

Vyjádřeme nyní ještě

$$\begin{aligned}\int_\theta^\vartheta y(x)\,\mathrm{d}x &= y(\theta)v(\theta)\left(1 + \frac{\mathrm{d}v(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\frac{t}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2v(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{t^2}{2!} + \cdots\right) - \\ &- y(\vartheta)v(\vartheta)\left(1 + \frac{\mathrm{d}v(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}\frac{t}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2v(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta^2}\frac{t^2}{2!} + \cdots\right). \end{aligned} \tag{33}$$

Nyní již dosadíme $y(x) = x^p(1-x)^q$, $\theta = 0$ a $\vartheta = \frac{1}{2}$. Nejprve však ještě vyjádříme

$$y(\vartheta) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^p\left(\tfrac{1}{2}\right)^q = 2^{-(p+q)}, \tag{34}$$

$$v(\vartheta) = \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q} = \frac{-1}{2(p-q)}\,, \tag{35}$$

$$\frac{\mathrm{d}v(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} = \frac{-(p+q)}{(p-q)^2}\,, \tag{36}$$

[3]) Větu o substituci formuloval Laplace v prvním dílu své knihy. Ověření předpokladů věty ponechává čtenáři.

dosadíme do (24) a konečně dostáváme

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p(1-x)^q \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{p+q+1}\cdot(p-q)}\left[1-\frac{p+q}{(p-q)^2}+\cdots\right]. \tag{37}$$

Poděkování. Děkuji doc. RNDr. Jaromíru Antochovi, CSc., z KPMS MFF UK za pomoc s překladem částí Laplaceova díla z francouzštiny a dále za cenné rady, náměty a připomínky, které mi po celou dobu přípravy článku ochotně poskytoval. Dále děkuji doc. RNDr. Jiřímu Veselému, CSc., a Ing. Josefu Machkovi, CSc., za pečlivé pročtení rukopisu a množství faktických i stylistických připomínek.

L i t e r a t u r a

[1] Anděl, J.: *Matematická statistika.* SNTL/ALFA, Praha 1978.
[2] Blom, G., Holst, L., Sandell, D.: *Problems and Snapshots from the World of Probability.* Springer-Verlag, New York 1994.
[3] *Dějiny Francie.* Nakladatelství Svoboda, Praha 1988.
[4] Jarník, V.: *Diferenciální počet I.* 7. vyd., Academia, Praha 1984.
[5] Jarník, V.: *Integrální počet I.* 6. vyd., Academia, Praha 1984.
[6] Jarník, V.: *Integrální počet II.* 3. vyd., Academia, Praha, 1984.
[7] Laplace, P. S.: *Théorie Analitique des Probabilites.* Vydáno jako 7. svazek *Œuvres de Laplace*, Imperie Royale, Paris 1814.
[8] Mačák, K.: *Poznámky k formování teorie pravděpodobnosti v 17. a 18. století.* Historie matematiky II, JČMF, Prometheus, Praha 1997.
[9] Machek, J.: *A letter across two centuries.* Informační bulletin České statistické společnosti, anglická mutace, prosinec 1991, ročník 2, str. 1–8.
[10] Maistrov, L. E.: *Probability Theory. A Historical Sketch.* Academic Press, New York 1974.
[11] Hald, A.: *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930.* Wiley, New York 1998.