

Pavel Středa
Kvantové Hallovy jevy

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 44 (1999), No. 3, 177--186

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/140994>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1999

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Kvantové Hallovy jevy

Pavel Středa, Praha

Úvodem

Nobelovu cenu za fyziku obdrželi v roce 1998 tři profesori z amerických univerzit, a to Robert B. Laughlin, Horst L. Störmer a Daniel C. Tsui. Cenu udělila Švédská královská akademie věd za jejich objev nové formy kvantové kapaliny s excitacemi o zlomkovém elektrickém náboji. Za touto formulací se skrývá zlomkový kvantový Hallův jev, který H. S. Störmer a D. C. Tsui naměřili v Bellových laboratořích (Murray Hill, New Jersey) již v roce 1982 na vzorcích připravených A. C. Gossardem. Jejich experimenty ukázaly, že fyzika elektronů v silných magnetických polích je mnohem bohatší, než si kdokoliv uměl představit. Následné vysvětlení R. B. Laughlina spočívající v zavedení nového typu kvantové kapaliny nastartovalo nový trend ve fyzice pevných látek. Cenu získali zaslouženě a většina fyziků se domnívala, že ji měli dostat již v roce 1985 spolu s Klausem von Klitzingem, kterému byla Nobelova cena udělena za objev celočíselného kvantového Hallova jevu z roku 1980.

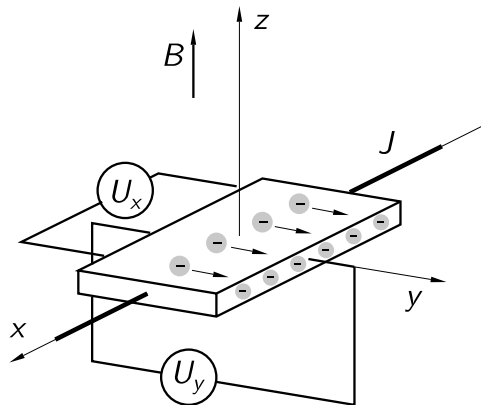
Objevy kvantových Hallových jevů i pochopení jejich fyzikální podstaty mohly být uskutečněny pouze díky rozvoji technologií pro přípravu polovodičových struktur, které jsou základem pro výrobu elektronických součástek. Ty dosáhly takové dokonalosti, že je možné přidávat na nosnou podložku atomové vrstvičky polovodičů kontrolovatelného složení. Umožnily připravit i tzv. dvojrozměrné elektronové systémy, vodivé destičky o tloušťce srovnatelné s atomovými rozměry. Právě na takových systémech umístěných v silných magnetických polích orientovaných kolmo na rovinu systému jsou při teplotách v blízkosti absolutní nuly ($0\text{ K} = -273\text{ °C}$) kvantové Hallovy jevy pozorovány. Udělení již druhé Nobelovy ceny za kvantový Hallův jev je vhodným důvodem, abych se pokusil přiblížit širší odborné veřejnosti fyzikální podstatu těchto jevů.

Klasický Hallův jev

Hallův jev je znám již více než sto let. Objevil jej v roce 1879 Edwin Herbert Hall, tehdy ještě student posledního ročníku na univerzitě Johna Hopkinse v Baltimore. Při studiu elektřiny a magnetismu se mu jevil jako pochybné tvrzení J. C. Maxwella, že mechanická síla, která vnucuje vodiči nesoucímu elektrický proud pohyb napříč siločarami magnetického pole, působí nikoliv na proud, nýbrž na vodič, který tento

Ing. PAVEL STŘEDA, DrSc. (1945), Fyzikální ústav AVČR, Cukrovarnická 10, Praha 6.

proud nese. Hallovi připadalo přirozenější, že síla působí na elektrický proud, tedy na pohybující se elektrony. Ty by tedy měly být vytlačovány směrem k jednomu kraji vzorku a vyvolané hromadění náboje by mělo vyvolat elektrické pole ve směru kolmém na procházející proud, jak je schematicky znázorněno na obr. 1. Po mnoha neúspěšných pokusech se mu podařilo naměřit nenulové napětí mezi protilehlými stranami pásku z tenké zlaté fólie. Výchylka na galvanometru byla úměrná procházejícímu proudu a Hallův jev byl na světě.



Obr. 1. Magnetické pole B orientované ve směru osy z vysunuje proudící elektrony ve směru osy y a generuje tak Hallovo napětí U_y ve směru kolmém na elektrický proud J . Podélný ohmický odpor je dán poměrem $R = U_x/J$ a Hallův odpor $R_H = U_y/J$.

Princip jevu je jednoduchý a lze jej snadno vysvětlit pro případ, kdy vodivý materiál obsahuje pouze jeden typ nositelů náboje, a to elektronů. Mějme kovový pásek umístěný v magnetickém poli $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ orientovaném kolmo na rovinu pásku. Na elektrický náboj e pohybující se rychlostí \mathbf{v} uvnitř pásku pak působí Lorenzova síla

$$\mathbf{F}_L = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

kde $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$ označuje elektrické pole a e je náboj elektronu. Předpokládejme, že kovový pásek má šířku d s plošnou hustotou elektronů n . Elektrický proud \mathbf{J} tak může téci pouze ve směru osy pásku, $\mathbf{J} = (J, 0, 0)$ a jeho hodnota je dána střední hodnotou rychlostí všech elektronů, tzv. driftovou rychlostí $\mathbf{v}_D = \langle \mathbf{v} \rangle$, $\mathbf{J} = en\mathbf{v}_D d$. Aby se proud s časem neměnil, musí v systému existovat rovnováha sil, $\langle \mathbf{F}_L \rangle \equiv 0$. Z této podmínky pak snadno dostaneme známý výraz pro Hallův odpor

$$R_H \equiv \frac{U_y}{J} = \frac{B}{en},$$

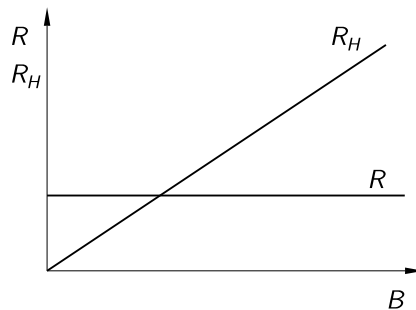
kde $U_y = E_y d$ je napětí mezi protilehlými hranami pásku. Z uvedeného výrazu je zřejmé, proč měl E. H. Hall potíže s jeho naměřením. Hallův odpor je nepřímo úměrný plošné koncentraci nositelů náboje a jím původně použitý měděný pásek nebyl dostatečně tenký, aby pro tehdy dostupná magnetická pole (do 1 T) a při citlivosti

galvanometrů mohl naměřit příčné napětí odpovídající vysokým hustotám elektronů v kovech. Teprve když použil velmi tenký zlatý pásek, mohl tehdejší technikou něco naměřit.

Z podmínky nulovosti Lorenzovy síly dále vyplývá, že ve směru proudu je $E_x = 0$ a nenaměříme žádné napětí. Podélný odpor $R \equiv U_x/J$ je roven nule a šlo by tedy o ideální vodič, ve kterém nedochází k energetickým ztrátám. Standardní elektrické vodiče však nejsou ideální a dochází v nich k rozptylu elektronů. Vliv rozptylu lze popsat silou, která elektrony, případně i jiné typy nositelů náboje, o hmotnosti m brzdí a je tedy úměrná jejich hybnosti, $\langle \mathbf{F}_S \rangle \equiv m\mathbf{v}_D/\tau$. Tato síla působí opačným směrem než Lorenzova síla a z podmínky $\langle \mathbf{F}_L \rangle - \langle \mathbf{F}_S \rangle \equiv 0$ dostaneme pro Hallův odpor stejný výraz jako pro ideální vodič, ale pro podélný odpor libovolně velké čtvercové plochy dostaneme

$$R \equiv \frac{U_x}{J} = \frac{m}{e^2\tau n},$$

kde $U_x = E_x d$ a m je efektivní hmotnost elektronu. Podélný odpor závisí na relaxačním čase τ , který charakterizuje energetické ztráty ve vodiči dané součinem $U_x J = R J^2$. Naproti tomu Hallův odpor je na rozptylových mechanismech ve vodiči nezávislý a navíc je nezávislý i na rozměrech pásku. Tato vlastnost umožňuje využívat Hallův jev pro určování koncentrace nositelů náboje. Nejrozšířenější je však jeho využití pro měření magnetického pole. Závislosti odporů na magnetickém poli, zhruba takové, jak je před více než sto lety naměřil E. H. Hall, jsou znázorněny na obr. 2.



Obr. 2. Typická závislost podélného odporu R a Hallova odporu R_H na magnetickém poli pro většinu kovů.

E. H. Hall měl možnost provádět svá měření pouze při normálních, pokojových teplotách. Teprve od roku 1908, kdy bylo poprvé zkapalněno helium, byly fyzikům k dispozici velmi nízké teploty odpovídající několika kelvinům (K). V roce 1930 se poprvé ukázalo, že závislosti podélného odporu na magnetickém poli nemusí být tak jednoduché. Při experimentech na univerzitě v Leidenu zjistil L. V. Shubnikov, že se podélný odpor velmi dokonalých monokrystalů bismutu s magnetickým polem periodicky mění, vykazuje tzv. Shubnikovovy-de Haasovy oscilace. Nezávisle na něm předpověděl tento jev geniální fyzik L. D. Landau. Příčinou je kvantování kinetické energie elektronů vlivem magnetického pole. Ta nemůže v rovině kolmé k magnetickému poli nabývat libovolných hodnot, ale pouze takových, které splňují následující

podmínku

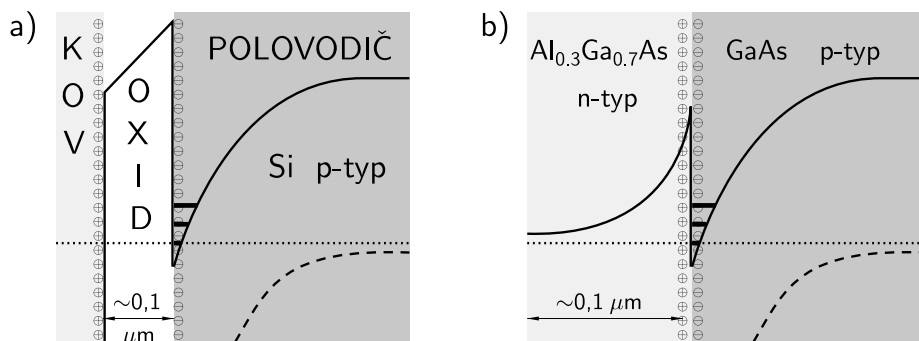
$$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 = \hbar\omega_c(i + \frac{1}{2}) \equiv \varepsilon_i,$$

kde $\omega_c = eB/m$ je cyklotronová frekvence. Energie ε_i se označují jako Landauovy hladiny a obsahují eB/h stavů na jednotku plochy (h je Planckova konstanta, $\hbar = h/2\pi$). Hallův odpor však žádné podobné anomálie tehdy nevykazoval.

Polovodičové součástky a Klitzingův objev

V padesátých letech se staly polovodičové materiály základem pro rozvoj elektroniky. Byl to především objev tranzistoru, který našel široké uplatnění. Výpočetní techniku si bez něj nelze představit. Společnosti zabývající se jejich výrobou začaly vynakládat obrovské prostředky na zdokonalování potřebných polovodičových součástek. Následný rozvoj technologií umožňoval kontrolovaně připravovat rozmanité polovodičové struktury. Nejprve bylo využíváno germanium, ale s postupem času se stal základním materiálem pro přípravu polovodičových součástek křemík a je jím dodnes. Jednou ze standardních součástek se stal i Si-MOSFET, křemíkový polem řízený tranzistor (Field Effect Transistor) schematicky znázorněný na obr. 3a. Zkratka MOS označuje jednotlivé vrstvičky struktury. Tenká kovová (M – metal) vrstvička je nanášena na zoxidovaný povrch (O – oxid) polovodičové (S – semiconductor) podložky. Křemík je špatným vodičem s nízkou koncentrací nositelů náboje, které dodávají do vodivostního pásu většinou příměsí. S klesající teplotou se stává nevodivým. Celkový odpor podložky však můžeme snížit tím, že na kovovou vrstvičku (hradlo) vložíme napětí, které přitahuje elektrony. Protože izolující oxidová vrstvička je pro ně nepřekonatelnou překážkou, začnou se u ní hromadit. Zvýšení jejich hustoty na rozhraní izolátor-polovodič pak usnadňuje vedení proudu ve směru rovnoběžném s rozhraním. Je to princip, který již kolem roku 1850 vymyslel lord Thompson, ale protože jako podložku používal kov, nemohl uspět.

Zdokonalování technologií umožnilo vkládat na kovové vrstvičky stále vyšší napětí, aniž by došlo k elektrickému průrazu izolační oxidové vrstvy. Nakonec se podařilo vytvořit na rozhraní polovodič-oxid tzv. inverzní vrstvu (viz obr. 3a). Vzniklá vrstvička elektronů se chová jako tenký kovový pásek. Její odpor s teplotou klesá, zatímco odpor samotné polovodičové podložky roste. Poměrně dokonalé struktury však měly možnost připravovat pouze velké elektronické firmy a v sedmdesátých letech je začala řada fyziků studovat v laboratořích za extrémních podmínek: v silných magnetických polích (do zhruba 30 T) a za velmi nízkých teplot, okolo 1 K (-272°C). Místo aby si podle tradice experimentální fyziky připravovali materiály a vzorky v laboratořích, lze s trochou nadsázky říci, že je kupovali v obchodech. Výrobci jim poskytovali struktury, které se standardně používaly k přípravě součástek. Jedním z těch, kteří se pustili do zkoumání těchto komerčních systémů, byl i Klaus von Klitzing. Vhodnou strukturu pro fyzikální měření mu dodal G. Dorda (český emigrant a bývalý zaměstnanec Ústavu fyziky pevných látek ČSAV), v té době pracující v laboratořích firmy Siemens v Mnichově. Klaus von Klitzing ji vzal roku 1979 do laboratoře vysokých magne-



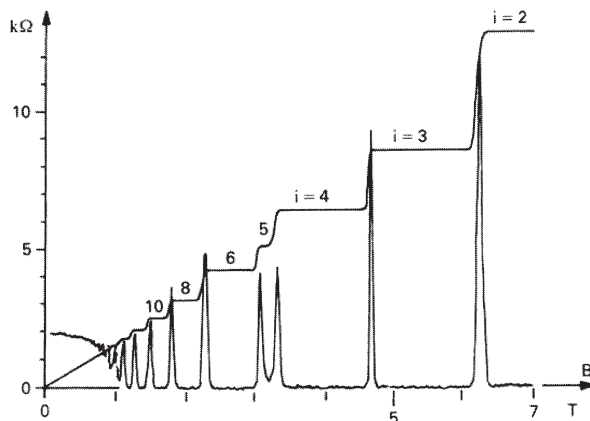
Obr. 3. Schéma řezu vrstevnatými strukturami Si-MOSFET (a) a GaAs/AlGaAs (b). Silnou čarou je znázorněn průběh elektronového potenciálu (spodní hrana vodivostního pásu u polovodičů). Čárkovaně je vyznačena horní hrana valenčního pásu. Dvojměrný elektronový systém se nachází v trojúhelníkových potenciálových jámách na rozhraních, ve kterých dochází k rozměrovému kvantování (vyznačeny jsou tři nejnižší hladiny).

tických polí v Grenoblu a měřil její odpor při nízkých teplotách. Zjistil, že existují intervaly elektronové hustoty a magnetických polí, pro které Hallův odpor nezávisí na vlastnostech materiálu, ale je dán kombinací základních fyzikálních konstant, náboje elektronu e a Planckovy konstanty h , dělenou malým celým číslem i

$$R_H = \frac{h}{e^2 i} = \frac{25\,812,807 \pm 0,005 \, \Omega}{i}.$$

Přítomnost Planckovy konstanty ve výrazech pro fyzikální veličiny je typická pro kvantově mechanické hodnoty a mluví se proto o kvantování Hallova odporu. Tento jev je doprovázen poklesem podélného odporu o několik řádů a systém se z tohoto hlediska jeví jako ideální vodič. Vede elektrický proud bez energetických ztrát, podobně jako je tomu u supravodičů. Při přechodu mezi kvantovými režimy s různými hodnotami Hallova odporu se systém dostává do „normálního“ stavu, dochází k energetickým ztrátám a podélný odpor je nenulový. Průkaznější výsledky byly dosaženy až na strukturách, ve kterých se „kovová vrstvička“ vytváří uvnitř polovodičových vrstevnatých struktur. Typické závislosti odporů na magnetickém poli jsou znázorněny na obr. 4.

Kvantový Hallův jev je typický pro dvojměrné elektronové systémy, které mají vlastnosti kovové destičky tloušťky srovnatelné s atomovými rozměry, kolem 10 nm. Hluboké a úzké potenciálové jámy vhodné pro jeho existenci lze vytvořit v polovodičových vrstevnatých strukturách vhodného složení. Nejpoužívanější jsou heterostruktury vhodně dopovaných polovodičů GaAs a AlGaAs, které mají různé široké energetické mezery. Na polovodičovém rozhraní se díky vnitřním polím vytvoří trojúhelníková potenciálová jáma (viz obr. 3b) podobná těm, které vznikají ve strukturách Si-MOSFET vlivem vloženého elektrického pole. Elektronů se pak mohou volně pohybovat jen podél rozhraní. Kolmo na rozhraní je jejich pohyb omezen šířkou potenciálové jámy, ve které dochází k tzv. rozměrovému kvantování. Pokud je hustota elektronů v jámě dostatečně nízká a je obsazena pouze nejnižší kvantová hladina, prostě řečeno, pokud se na šířku



Obr. 4. Závislosti podélného odporu R a Hallova odporu R_H na magnetickém poli pro heterostrukturu AlGaAs/GaAs s dvojrozměrným elektronovým systémem o plošné koncentraci $2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ měřené za velmi nízkých teplot, $T = 66 \text{ mK}$. Díky poměrně malé pohyblivosti ($52 \cdot 10^3 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$), svědčící o nedokonalosti struktury, se výrazně projevuje pouze celočíselný kvantový Hallův jev.

do jámy nevejde více než jeden elektron, mluví se o dvojrozměrném elektronovém systému. Vodivé pásy takto připravované jsou standardně široké několik stovek μm .

Nezávislost kvantových hodnot Hallova odporu na použitých materiálech, rozměrech vzorků, fluktuacích teploty i magnetického pole předurčily jeho využití v metrologii elektrických veličin. Přesnost a reprodukovatelnost měřených hodnot (běžně je dosahováno relativní neurčitosti 10^{-8}) vedly Comité International des Poids et Mesures k doporučení používat kvantový Hallův jev pro realizaci primárního etalonu stejnosměrného odporu. Ve spolupráci s Fyzikálním ústavem AVČR jej využívá i Český metrologický institut.

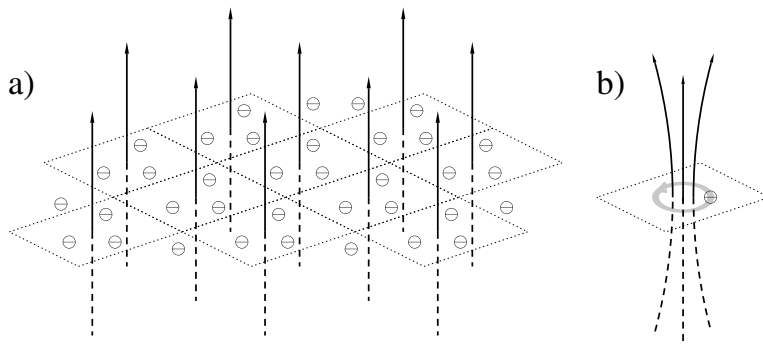
Celočíselný kvantový Hallův jev

Magnetické pole si obvykle představujeme pomocí siločar, jak je znázorněno na obr. 5. Jejich hustota se řídí velikostí magnetického toku Φ , tedy součinu magnetického pole B a dané plochy A , $\Phi = BA$. V kvantové mechanice je přirozené přiřadit jednu siločáru jednomu kvantu magnetického toku $\Phi_0 = h/e$. Podmínky pro kvantový Hallův režim lze pak pochopit na základě vztahu pro klasický Hallův odpor vzorku o ploše A , který můžeme upravit následujícím způsobem

$$R_H = \frac{B}{en} = \frac{h}{e^2} \frac{BA}{(h/e)nA} = \frac{h}{e^2} \frac{\Phi}{\Phi_0 N} \equiv \frac{h}{e^2} \frac{1}{\nu},$$

kde $N = nA$ je celkový počet elektronů ve vzorku. Hallův odpor nabývá tedy kvantových hodnot právě tehdy, připadá-li na plochu s magnetickým tokem rovným právě jednomu kvantu celočíselný počet elektronů, $\nu = N\Phi_0/\Phi = i$. Pro případ $i = 3$ je tato

situace schematicky znázorněna na obr. 5a. Pro kvantování Hallova odporu je tedy rozhodující tzv. plnicí faktor Landauových hladin ν , což je právě poměr mezi hustotou elektronů a hustotou kvant magnetického toku — hustotou siločar. Je-li tento poměr celočíselný, je zaplněn právě celočíselný počet Landauových hladin. Nejbližší stavy, do kterých by se elektron mohl rozptylovat, jsou odděleny energetickou mezerou velikosti $\hbar\omega_c$. Za nízkých teplot nejsou takové excitace možné a nemůže docházet k rozptylu, a tedy ani k energetickým ztrátám. Ukazuje se, že v takových případech se vytváří velmi stabilní stav a elektronový systém se chová jako *nestlačitelná kapalina*. K tomu ale dochází jen pro přesně definované hodnoty magnetického pole a hustoty elektronů. Proč se tedy ale v závislostech na magnetickém poli objevují tak široké prodlevy, když je poměr $N\Phi_0/\Phi$ nepřímo úměrný magnetickému poli?

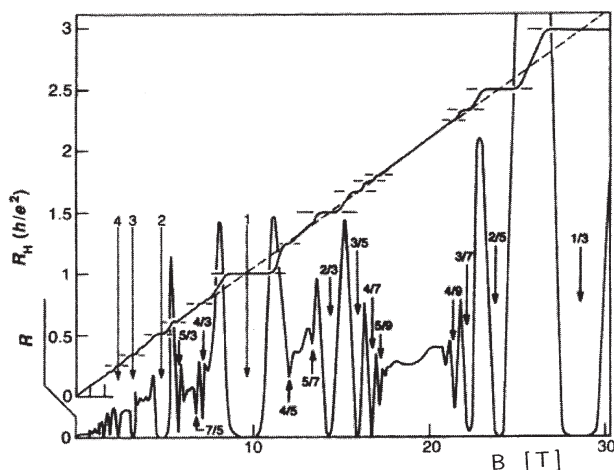


Obr. 5. Siločáry magnetického pole představují jednotlivá kvanta magnetického toku. Na obrázku a) je znázorněna situace odpovídající třem plně zaplněným Landauovým hladinám ($\nu = 3$), kdy na tři elektrony připadá jedno kvantum magnetického toku. Schematické zobrazení b) představuje kompozitní částici tvořenou elektronem a třemi kvanty magnetického toku ($\nu = \frac{1}{3}$). Takovéto částice mají charakter bozonů a mají tendenci kondenzovat do stavu nestlačitelné kvantové kapaliny.

Existence prodlev je důsledkem nedokonalosti připravovaných struktur. Díky nerovnoměrnosti tlouštěk jednotlivých polovodičových, případně oxidových vrstviček a dalším strukturním poruchám není hustota elektronového plynu homogenní, ale kolísá. Podmínka, aby na jedno kvantum magnetického toku připadal celočíselný počet elektronů, je tak splněna v širokém rozmezí magnetických polí, ale pouze v některých částech systému. Díky stabilitě a energetické výhodnosti stavu označovaného jako kvantová kapalina mají elektrony tendenci v tomto stavu zůstat i za cenu změny rozložení své hustoty. Jsou to právě nehomogenity, které snižují elektrostatickou energii spojenou se změnami hustoty elektronů a umožňují, aby co největší část elektronů zůstávala ve stavu odpovídajícím nestlačitelné kvantové kapalíně. Dokud jsou oblasti s kvantovou kapalinou souvislé, kvantové hodnoty Hallova odporu se nemění. Zbylé ostrůvky, kde se elektrony nacházejí v „normálním stavu“, jsou obklopeny ideálně vodivými oblastmi a k vedení proudu nepřispívají. Pouze efektivně zmenšují šířku vodivého pásku, která nemá vliv na velikost Hallova odporu ani v klasickém případě.

Zlomkový kvantový Hallův jev

Zdokonalování technologických procesů umožnilo připravovat stále ideálnější dvojrozměrné elektronové systémy. Kromě očekávaného zužování prodlev našli již v roce 1982 H. S. Störmer a D. C. Tsui v Hallově odporu prodlevu, která odpovídala hodnotě plnicího faktoru $\nu = \frac{1}{3}$. Na jedno kvantum magnetického pole připadl pouze zlomek elektronového náboje a Landauova hladina byla zaplněna jen z jedné třetiny. Přesto i v tomto případě byla prodleva doprovázena výrazným poklesem podélného odporu. Další experimenty prokázaly existenci prodlev i pro řadu dalších hodnot daných zlomkem malých celých čísel, avšak vždy s lichým číslem ve jmenovateli, jak je možno vidět na obr. 6. Čím dokonalejší dvojrozměrné elektronové systémy s nízkými elektronovými hustotami byly připravovány, tím bohatší byly pozorované závislosti.



Obr. 6. Závislosti podélného odporu R a Hallova odporu R_H na magnetickém poli pro heterostrukturu AlGaAs/GaAs s dvojrozměrným elektronovým systémem o plošné koncentraci cca $1 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ měřené za velmi nízkých teplot, $T = 400 \text{ mK}$. Vysoká elektronová pohyblivost (cca $2 \cdot 10^6 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$), svědčící o velké homogenitě struktury, umožnila pozorovat nedisipativní režimy zlomkového kvantového Hallůva jevu pro celou řadu zlomkových hodnot plnicího faktoru ν .

Necelý rok po experimentálním objevu nabídl R. B. Laughlin teoretické vysvětlení. Je zřejmé, že k vysvětlení nevystačil jako L. D. Landau pouze s kvantováním kinetické energie jednotlivých elektronů, ale musel vzít v úvahu vliv coulombické interakce mezi elektrony. Navrhl tvar mnohočásticové vlnové funkce pro základní stav elektronového systému v magnetickém poli odpovídající nestlačitelné kvantové kapaliny. Elektrony, jako částice se spinem $\frac{1}{2}$, jsou fermiony, a proto funkce musí změnit znaménko při záměně dvou elektronů. Z této podmínky okamžitě vyplynulo, že stav kvantové kapaliny může vzniknout pouze tehdy, připadá-li na jeden elektron lichý počet kvant magnetického toku. Kompozitní částice tvořené elektronem svázaným s lichým počtem magnetických kvant mají navíc charakter bozonů, které mohou kondenzovat do stavu nestlačitelné kvantové kapaliny, podobně jako je tomu v případě supratekutého helia.

Kompozitní částice tvořené elektronem a sudým počtem kvant mají charakter fermionů, které nemají tendenci ke kondenzaci. To je důvod, proč je ve dvojrozměrných elektronových systémech pozorován kvantový Hallův režim odpovídající zlomkům s lichým jmenovatelem.

Tvar mnohočásticové vlnové funkce uhodl R. B. Laughlin geniálně. I přesné numerické výpočty energie základního stavu se lišily pouze o několik procent od energie odpovídající jím navrženým funkcím. Teprve po mnoha letech bylo nalezeno přiblížení, na jehož základě byly Laughlinovy funkce odvozeny. Na základě jeho teorie bylo možno vysvětlit kvantový Hallův režim odpovídající jednoduchým zlomkům $1/m$, $m = 3, 5, 7, \dots$, případně na základě symetrie elektron-díra i zlomkům $1 - 1/m$. Pro magnetická pole a takové hustoty elektronů, kterým tyto zlomky neodpovídají, lze konstruovat další kompozitní částice z kompozitních částic odpovídajících jednoduchým zlomkům. Experimenty takto vytvořenou hierarchii kvantových hodnot Hallova odporu plně potvrdily.

Určení základního stavu je pouze jedním ze dvou klíčů k popisu fyzikálních systémů. Většina vlastností je dána nízkoenergetickými excitacemi. Laughlin ukázal, že excitace základního stavu odpovídajícího zlomkům $1/m$ jsou velmi speciální. Navíc k tomu, že jsou od základního stavu odděleny energetickou mezerou, nesou zlomkový náboj $\pm e/m$. Existence zlomkového kvantového Hallova jevu je pouze nepřímým důkazem naznačených představ. Teprve měření tunelovacích proudů, jmenovitě výstřelového šumu (shot noise), uskutečněná po roce 1995, jasně prokázala, že elektrický proud je nesen objekty s nábojem $e/3$. Tak padla jedna ze vžitých fyzikálních představ, že náboj elektronu je nejmenším nábojem, který se může v přírodě vyskytovat.

Transmutace částic

Vývoj v porozumění zlomkovému kvantovému Hallovu jevu přinesl do fyziky celou řadu nových pojmů. Vedla k nim snaha o nalezení analogií s jinými kvantovými jevy. Aby těchto analogií mohlo být dosaženo, bylo nutno provádět vhodné transmutace, které by umožňovaly převádět popis systému silně vzájemně interagujících elektronů na popis systému slabě interagujících kvazičástic. Z matematického hlediska jsou velmi podobné cejchovacím transformacím a spočívají ve vytváření již dříve zmíněných kompozitních částic tvořených elektronem a celočíselným počtem magnetických kvant.

Kompozitní částice s lichým počtem magnetických kvant mají charakter bozonů a podléhají Boseově-Einsteinově statistice. Stejný charakter mají i atomy ${}^4\text{He}$, které za nízkých teplot kondenzují do stavu kvantové kapaliny vykazující jev supratekutosti. Ta má nulovou viskozitu a protéká kapilárami bez odporu, tedy bez energetických ztrát. Ukazuje se, že i excitace mají v obou systémech velmi podobné vlastnosti.

Velkou popularitu získaly kompozitní fermiony tvořené elektronem a sudým počtem magnetických kvant, které se řídí Fermiho-Diracovou statistikou i Pauliho vylučovacím principem. Například připneme-li k elektronu dvě kvanta, popisují kompozitní fermiony stav odpovídající z poloviny zaplněné Landauově hladině, tj. s plnicím faktorem $\nu = \frac{1}{2}$ (na obr. 6 odpovídá magnetickému poli cca 19 T). Protože s sebou nesou kvanta

magnetického toku, pohybují se vlastně v nulovém magnetickém poli. Mají efektivní hmotnost, rozptylují se podobně jako normální elektrony a výsledkem je nenulový podélný odpor pro zlomkové hodnoty ν se sudým číslem ve jmenovateli. Změníme-li magnetické pole, dochází ke kvantování jejich kinetické energie a vytvářejí se Landauovy hladiny odpovídající efektivnímu magnetickému poli B^* danému rozdílem celkového pole B a pole B_0 zachyceného kompozitními fermiony, $B^* = B - B_0$. Popis zlomkového kvantového Hallova jevu je tak převeden na popis normálního kvantového Hallova jevu, ale v redukováném vnějším poli. Například stav odpovídající $\nu = \frac{1}{3}$ odpovídá celočíselnému Hallovu jevu s plně zaplněnou jednou Landauovou hladinou kompozitními fermiony. Této představě odpovídají nejen periody oscilací podélného odporu v blízkosti poločíslných plnicích faktorů ν , ale i měřené poloměry cyklotronových orbit.

Ukázalo se, že právě ve dvojrozměrném prostoru lze mezi uvedenými dvěma popisy interpolovat a definovat systémy kvazi-částic se zlomkovým nábojem, které nemají charakter ani bozonů, ani fermionů, a řídí se jinými, velmi nestandardními statistikami. Pro takové částice se vžil název „anyony“ (jakékoliv). Tyto nestandardní teoretické popisy našly své uplatnění i při popisu vlastností vysokoteplotních supravodičů.

Závěr

Problematika zlomkového Hallova jevu studovaná na komplikovanějších systémech přinesla fyzikům řadu dalších nečekaných překvapení a není tedy divu, že je stále velmi aktuální. Vděčné jsou tzv. kvazi-dvojrozměrné systémy, ve kterých je elektronová hustota vyšší, než je přípustné pro čisté dvojrozměrné systémy (na šířku se vedle sebe vejde několik elektronů). V nich se vyskytují jak elektrony se spinem orientovaným ve směru magnetického pole, tak elektrony s opačnou orientací spinu, a silně se projevuje tzv. výměnná interakce. Zdokonalování technologií umožňuje také připravovat kvazi-dvojrozměrné systémy složené ze dvou rovnoběžných dvojrozměrných systémů tak blízko u sebe, že není možno zanedbat jejich vzájemné působení. Ukázalo se, že v těchto vícesložkových systémech jsou některé režimy kvantového Hallova jevu, standardně pozorované na jednoduchých dvojrozměrných systémech, potlačeny a jiné se objevují. Byly naměřeny i kvantové hodnoty Hallova odporu odpovídající zlomkům se sudým jmenovatelem. Se snižováním magnetického pole je pozorován i fázový přechod ze stavu odpovídajícího nestlačitelné kvantové kapalině do stavu, kdy elektronový systém krystalizuje (tzv. Wignerova krystalizace).

Se zdokonalováním technologií se připravují stále dokonalejší elektronové systémy, ve kterých se kvantové vlastnosti projevují stále silněji. Jistě bude pozorováno stále více zlomkových hodnot v Hallově odporu, i když se stále užšími prodlevami. Možná, že se časem podaří připravit tak dokonalé, ideální dvojrozměrné systémy, že experimentátoři opět naměří stejně hladkou lineární závislost Hallova odporu na magnetickém poli, jako naměřil E. H. Hall v roce 1879.