Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Milan Hejný; Naďa Stehlíková
Zkoumání číselných představ dítěte a žáka

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 44 (1999), No. 2, 148--167

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/140991

[3] *Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání. Souhrnné výsledky žáků 8. ročníků.* Výzkumný ústav pedagogický, Praha, 1996.

[4] *Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání. Podmínky a průběh výuky v 8. ročníku.* Ústav pro informace ve vzdělávání, Praha, 1997.

[5] *Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání. Výsledky žáků 7. a 8. ročníků v matematické části testu.* Ústav pro informace ve vzdělávání, Praha, 1997.

[6] *Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání. Výsledky žáků 7. a 8. ročníků v přírodovědné části testu.* Ústav pro informace ve vzdělávání, Praha, 1997.

[7] *Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání. Souhrnné výsledky žáků posledních ročníků středních škol.* Výzkumný ústav pedagogický, Praha, 1998.

ZKOUMÁNÍ ČÍSELNÝCH PŘEDSTAV DÍTĚTE A ŽÁKA

Milan Hejný a Naďa Stehlíková, Praha

1. Úvod

Didaktika matematiky se výrazně rozvinula v padesátých a šedesátých letech, kdy byl ve všech vyspělých zemích světa udělán velkolepý pokus vymýtit z hodin matematiky na základních a středních školách memorování a dril. Prostředkem měla být zásadní změna obsahu vyučování — školská matematika byla postavena na bourbakistické koncepci množin a struktur. „Množinová matematika“ nejprve slavila skvělé úspěchy, ale po několika málo letech se do škol vrátil dril i memorování. Nabyli jsme hořkou, ale důležitou zkušenost, že změnou obsahu vyučování nelze natrvalo změnit tradiční školu memorování na školu tvořivou. Jestliže je taková zásadní a dlouhodobá změna vůbec možná, pak jejím nositelem není obsah vyučování, ani osnovy, ale učitel. Uvedená zkušenost zásadním způsobem ovlivnila směřování didaktiky matematiky. Jestliže se ještě v šedesátých letech převážná část výzkumu této disciplíny věnovala tvorbě a testování učebnic, učebních pomůcek a osnov, je soudobý výzkum v didaktice matematiky převážně zaměřen na poznávání myšlenkových procesů, které při „dělání“ matematiky probíhají v hlavě člověka, zejména na řešitelské procesy žáků a na procesy učení se a vyučování. I když ve světě se tomuto trendu věnuje obrovská pozornost, u nás ještě matematická veřejnost nahlíží na didaktiku matematiky očima „modernizace“.

Článek, kterým se ucházíme o pozornost čtenáře, chce především pomocí konkrétní ilustrace ukázat jednu z těch částí didaktiky matematiky, která naší matematické veřejnosti není zatím příliš známa. O ambicióznějších cílech článku se zmíníme později.

Předmětem našeho zájmu bude jeden ze základních jevů školské matematiky — číslo. Nikoli však číslo jako objekt matematické struktury, ale číslo jako prvek měnícího se žákova (a učitelova) vědomí.

Prof. RNDr. Milan Hejný, CSc. (1936), Mgr. Naďa Stehlíková, Dr. (1968), Pedagogická fakulta UK, Praha.

Naše pozornost bude zaměřena na *žákovské představy čísel a číselných oborů.*

Východiskem našich úvah jsou projevy matematického chování žáků vybrané z protokolů našich experimentů, v několika málo případech převzaté z [10], [11], [13]. Protokoly vytvořené ve slovenském jazykovém prostředí nepřekládáme, dáváme přednost autentickému zápisu.

1.1. Širší souvislosti

Ilustrace, kterou zahájíme naše úvahy, popisuje jev, který je dobře znám každému učiteli.

Příklad 1. Anita (7. třída) měla v písemné práci výpočet $\frac{2}{9}+\frac{4}{15}=\frac{6}{24}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$. Podívejme se na úryvek z následného rozhovoru, který se konal asi 5 hodin po psaní testu.

Experimentátor 5: ... *tak si predstav, že chceš dakomu názorne ukázať, ako sa dá sčítať* $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

Anita 5: *To akože* (pauza) *pomocou torty?*

E6: *Áno, napríklad pomocou torty, to je dobrý nápad.*

A6: (Kreslí kruh-dort a dělí jej nejprve na poloviny, pak na čtvrtiny, pak jako na třetiny; chvíli váhá, pak kreslí nový obrázek, na kterém kruh dělí na třetiny a pak na šestiny.) *Takto, áno, dobre?*

E7: *Nakreslila si to pekne, ale ešte si nič nespočítala. Máš ukázať, ako sa dá zrátať ...*

A7: *Tuto takto je* (šrafuje polovinu) *polovica, hej? A tá tretina, tretina,* (uvažuje) *nie,* (kreslí další kruh, dělí jej znakem „Mercedes“ na třetiny, jednu třetinu šrafuje) *je táto tretina, tuto* (dívá se na předchozí obrázek) *tunák, takto to ...* (v obrázku šrafuje polovinu) *to je ten súčet. Hej? Dobre?*

E8: *Vyzerá to dobre, ale nepovedala si, koľko to teda je. Koľko je polovica a tretina?*

A8: (Váhá, pak ji něco napadne a hbitě počítá.) *To je šestina. Jedna, dve, tri, štyri, päť. Päť šestín. Je to päť šestín. Hej?*

E9: *Výborne, áno, päť šestín. Dobre si to ukázala. A teraz by si mala spočítať* $\frac{2}{9}+\frac{4}{15}$. *Vedela by si i toto?*

A9: *To bolo tam. V tom teste. Mám to zle? Nošak?*[1])

E10: *Asi to nebude celkom dobre.* (Ukazuje dívce její test.) *Ale vysvetli mi, ako si to počítala.*

A10: (Kouká na svůj výpočet.) *Zrátala som to. Ale to treba inak. Nošak?*

Komentář. Anita umí smysluplně zacházet s malými zlomky, protože si umí zjednat představu o těchto číslech pomocí dortového modelu. Porozumění světu čísel nachází ve světě věcí. Když má však sčítat větší zlomky, které si ve svém modelu znázornit neumí, volí cestu pravidla, které leží uvnitř světa čísel a **nemá propojení na svět věcí**. Pravidlo, které dívka používá, je chybné, ale pochopitelné. Mohli bychom říci, že jde o „sčítání po složkách“ podobně jako u vektorů. Pravidlo je však v rozporu s realitou a dívka si je vědoma toho, že mu nerozumí, že neví, odkud se vzalo. Matematické poznání dívky je zde nakaženo **formalizmem**.

Podstatou choroby formalizmu není to, že pravidlo, které Anita použila, je špatné. Choroba by byla stejně zlá i v případě, kdyby pravidlo bylo správné. Dokonce by byla zákeřnější. Podstatou

[1]) Žejo?

choroby je to, že pravidlo není ukotveno v životní zkušenosti žáka. Není to poznání v pravém slova smyslu, protože neumožňuje člověku lépe se orientovat v životě. Je to poznání **protetické**. Je náhražkou skutečného poznání.

Hlavní příčinou formalizmu je instruktivní vyučování zaměřené na nácvik algoritmů a na paměťové učení se definic a pouček. Formalizmus nese hlavní vinu na nízké účinnosti výuky matematiky na školách. Proto patří výzkum formalizmu k nejzávažnějším oblastem didaktiky matematiky. Formalizmu je věnována značná pozornost v monografii [5]. Problematiku instruktivního a konstruktivního vyučování u nás jako první začal systematicky studovat F. Kuřina (viz [6]).

1.2. Předmět našeho zkoumání

Základní vymezení předmětu našeho zkoumání bylo dáno nadpisem: číselné představy dítěte a žáka. Tato oblast je příliš široká a my se omezíme jen na zdravé sémantické představy žáka předškolního a raně školního věku. Každý ze tří omezujících parametrů rozvedeme.

V předchozím bodě jsme zdůraznili význam choroby formalizmu a teď se omezujeme pouze na zkoumání *správných představ.* Může takový výzkum učiteli pomoci? Domníváme se, že může. Ve většině případů totiž dochází k onemocnění formalizmem právě proto, že učitel nezná zákonitosti, které řídí rozvoj správných číselných představ. Poznání těchto představ a poznání mechanizmů, které řídí jejich rozvoj, pomůže učiteli účinněji odstraňovat formalizmus.

Příklad 1 dále ukázal, že představy žáků o číslech lze třídit na ty, které leží uvnitř světa čísel, budeme je nazývat *strukturální*, a ty, které leží v překrytí světa čísel a světa věcí, budeme je nazývat *sémantické.* Ty poslední budou předmětem našeho zájmu, protože právě jejich absence je živnou půdou pro vznik nákazy formalizmu a jejich přítomnost dělá *mentální organizmus* žáka imunním vůči této nákaze.

Třetí a poslední omezení našeho výzkumu se týká *věku.* Na raně školní věk se zaměřujeme proto, že právě zde se rozhoduje o tom, v jaké míře budou matematické znalosti a schopnosti žáka imunní vůči „bacilu formalizmu", tj. prostředí, ve kterém se matematika učí instruktivně.

I když chybným představám žáků — „patologii" — nevěnujeme systematickou pozornost, zmíníme se o nich v epizodách podobných té z příkladu 1. Chceme tím naznačit aplikační možnosti výzkumu a názorněji osvětlit správné představy žáka. Někdy totiž právě pohled na narušení funkčnosti pomůže hlouběji pochopit mechanizmy, jimiž je funkce řízena. Tak v příkladě 1 nám pohled na Anitinu formální znalost „sčítání zlomků" odhalil, že podstatou správného poznání není znalost pravidla (jak si někdy učitelé myslí), ale vhled do situace, schopnost zlomek propojit na realitu, například jej vizualizovat.

1.3. Metoda

Článek se snaží o víc než o nabytí vhledu do žákovských představ o číslech. Snaží se ukázat, jak se takové zkoumání dá dělat. Jsme přesvědčeni, že právě metodika práce je tím nejdůležitějším, co článek nabízí učiteli. Pokusíme se tuto tezi zdůvodnit.

Představy žáků nelze poznat pouhou aplikací diagnostické technologie, byť by byla sebedokonalejší. K nabytí poznání je nezbytně nutné, aby učitel, který o diagnostické poznání usiluje, měl osobní vhled do problematiky a aby dobře znal nástroj, kterým zkoumání provádí. Toho lze dosáhnout pouze tak, že se učitel, inspirován například naším přístupem, pokusí o vlastní výzkum. Sám si promyslí a realizuje vlastní experiment zaměřený na některou dílčí oblast. Dodejme, že když se při této práci sejde více učitelů, bude poznání každého z nich hlubší a přesnější, protože bude obohaceno o pohledy kolegů.

V předchozím bodě jsme ukázali, co budeme zkoumat. Teď osvětlíme nástroje, které ke zkoumání použijeme.

Východiskem našich úvah bude soubor číselných situací, příkladů, převzatých z různých učebnic, sbírek úloh a protokolů experimentů. Každou z těchto situací rozložíme na malé části obsahující vždy jen jeden číselný údaj. Pak se pokusíme o třídění získaných údajů nikoli podle kritérií světa čísel, ale podle kritérií světa věcí. Například z trojice údajů

a) dvoukilový chleba,
b) půllitr mléka,
c) tři prsty

budeme za příbuzné považovat údaje a), b), protože v obou vystupuje číslo ve funkci veličiny. Údaj c) obsahuje číslo ve funkci počtu, a proto jej budeme řadit do jiné třídy. Z hlediska světa čísel by k sobě patřily údaje a), c), protože v obou vystupuje číslo přirozené, ale v b) vystupuje zlomek.

Každou z identifikovaných tříd pak prozkoumáme podrobněji. Popíšeme její charakteristiky a případně ukážeme jemnější třídění. Konečně upozorníme na jevy didakticky důležité, které jsou založeny na experimentálně evidovaných chybných představách žáků.

2. Upřesnění termínu „číselná představa“

Řeknu-li „představa žáka o čísle 0,2“, mohu mít na mysli žáka povšechně, nebo konkrétního žáka. Řeknu-li „Bářina představa o čísle 0,2“, mohu mít na mysli tu představu, kterou měla Bára aktuálně přítomnu ve vědomí v jednom okamžiku našeho vzájemného rozhovoru, nebo její představu o čísle 0,2 vůbec. Na tyto odlišnosti poukážeme v této kapitole.

2.1. Ilustrace

Příklad 2. Bára (7. třída) měla v testu výpočet $0{,}2 \cdot 10 = 0{,}20$. Na otázku experimentátora, proč tak počítala, odpověděla, že deseti se násobí tak, že se na konec čísla připíše 0. Rozhovor pokračoval:

E5: *Báro, uměla bys vysvětlit mladšímu bratrovi, co to je to číslo* 0,2*?*

B5: (po chvíli váhání) *Musím napsat… Napíšu nulu. Pak napíšu tu čárku a pak tu dvojku.*

E6: *A myslíš, že tomu by tvůj bratr rozuměl?* (Bára mlčí.) *Uměla bys mu to vyložit na příkladě? Například na pravítku?*

B6: (Bere pravítko.) *No, jako že jeden centimetr* (ukazuje, pauza) *a toto* (ukazuje) *je* 0,1 *cm a toto* (ukazuje) 0,2 *cm.* (Pauza 8 vteřin.) *To je jako milimetr a to jako dva milimetry.*

E7: *A uměla bys říct, co je to* 0,2 *korun?*

B7: (po chvíli ticha) *To jsou dva halíře.* (Opět chvíli váhá, pak se rozzáří.) *To je tady, jako bych, když dva halíře vynásobím deseti, bude to* 20 *halířů* (ukazuje horní výpočet).

Komentář. Každý ze tří vstupů Báry demonstruje jinou představu dívky o čísle

0,2, resp. čísle 0,20. Každá z těchto představ je obsahem Bářiny mysli po jistou dobu a je tedy představou *aktuální*.

Ve výpovědi B5 jde o zápis čísla a jeho verbální popis. Zde není žádná představa kvantity.

Ve výpovědi B6 jsou čísla vložena do kontextu centimetrů a milimetrů a vzniká dobrá představa.

Ve výpovědi B7 jsou čísla vložena do kontextu korun, haléřů a desetihaléřů a vytvořená představa je chybná.

Komparace výpovědí B6 a B7 naznačuje, že podstatou Bářiny *globální* představy o desetinné čárce je toto schéma: desetinná čárka odděluje dvě čísla, číslo před desetinnou čárkou je ve větších jednotkách, číslo za ní je v menších jednotkách.

Tedy $1{,}2\,\mathrm{cm} = 1\,\mathrm{cm} + 2\,\mathrm{mm}$. $1{,}2\,\mathrm{Kč} = 1\,\mathrm{Kč} + 2\,\mathrm{hal}$. Podobně v jiných protokolech nacházíme vztahy $1{,}2\,\mathrm{hl} = 1\,\mathrm{hl} + 2\,\mathrm{l}$ nebo $1{,}2\,\mathrm{kg} = 1\,\mathrm{kg} + 2\,\mathrm{g}$ nebo dokonce $1{,}2\,\mathrm{hod} = 1\,\mathrm{hod}\,2\,\mathrm{min}$. Dodejme, že taková představa žáka o desetinné čárce (nebo tečce) je velice častá. Konečně s podobnými zápisy se může žák setkat v běžném životě. Například v jízdním řádu 4.25 značí 4 hod 25 min. Nebo při označení věku dítěte píšeme 3,2 ve smyslu 3 roky 2 měsíce.

2.2. Představa čísla — konkrétní vs. všeobecná, aktuální vs. globální

Termín *představa* jsme v předchozím bodě použili ve třech různých významech. Mluvili jsme o představě:

- *konkrétní, aktuální* — taková je například Bářina představa v okamžiku výpovědi B6;
- *konkrétní, globální* — taková je Bářina představa o desetinné čárce;
- *všeobecné* — to je ta, o které mluví poslední věta předchozího bodu, vztahující se k žáku všeobecně.

Uvedenou diferenciaci popisují dva páry adjektiv uvedených v nadpisu tohoto bodu. O *konkrétní* představě mluvíme tenkrát, když máme na mysli představu jistého konkrétního člověka. Mluvíme-li o představě člověka myšleného povšechně, pak hovoříme o představě *všeobecné*. O *aktuální* představě mluvíme, když máme na mysli obsah mysli jistého člověka v určitém časovém okamžiku. Soubor všech možných aktuálních představ jistého člověka v určitém časovém intervalu (nikoli okamžiku) budeme nazývat *globální* představou tohoto člověka.

Popsané rozlišování hraje v našich úvahách důležitou roli, protože ukazuje tříetapovou metodiku použitou v našem výzkumu.

1. Z experimentů získáváme informace o aktuálních představách žáka Y o objektu X.
2. Soubor všech aktuálních představ žáka Y analyzujeme s cílem vytvořit model globální představy daného žáka o objektu X.
3. Konečně analýzou série těchto globálních představ jednotlivých žáků konstruujeme všeobecný model představy o objektu X žáka daného věku a kognitivního typu.

2.3. Síť čísla X

Kognitivní psychologie používá někdy místo termínu *kognice* termín *kognitivní síť*. Slovo *síť* poukazuje na představu o struktuře rozumu jako souboru konkrétních znalostí a zkušeností (to jsou „uzlíky sítě“) propojených mezi sebou pletivem poukazů, vztahů, příčinných vazeb apod. Metaforická terminologie umožňuje například kvalitu poznání vyjádřit pomocí *hustoty sítě* nebo formalizmus jako absenci onoho pletiva, které dělá síť sítí, jako soubor víceméně izolovaných „uzlíků". Na druhé straně je uvedená metafora v několika směrech zavádějící. Například představa dvourozměrné rybářské sítě neodpovídá ani mnohovrstvové kognitivní struktuře, ani skutečnosti, že tato struktura je v neustálé změně, zejména když mluvíme o žáku.

V souladu s myšlenkovým konstruktem *kognitivní síť* zavedeme konstrukt *síť čísla X* jako termín alternativní k termínu *globální představa čísla X*. Rozumíme tím tu část kognitivní sítě jedince, která obsahuje představu „číslo X" a bezprostřední její okolí — soubor všech spojů mezi touto představou a zbytkem kognitivní sítě.

Místo termínu *síť čísla X* by bylo možné užívat termínu *podsíť čísla X* a zvýraznit tak skutečnost, že jde o část kognitivní sítě. Nebudeme to však dělat, protože sítě, o nichž budeme mluvit, budou mít mnohovrstevnou strukturu. Např. síť čísla $\frac{1}{2}$ je podsítí sítě „malý zlomek" i sítě „kmenový zlomek". Každá z nich je podsítí sítě „zlomek" a ta podsítí sítě „číslo". Předpona „pod", resp. „nad" by v tak bohaté struktuře někdy působila zbytečný chaos.

Představu „síť čísla X" lze charakterizovat pomocí atributů *hustota*, *spolehlivost*, *strukturovanost*. Všechny tři uvedené atributy budeme ilustrovat pomocí příkladu 2.

- Jestliže v Bářině síti představy čísla 0,2 je i spoj $0{,}2 = \frac{1}{5}$, pak jej lze využít k reedukaci chybného násobení. Když tam tento spoj není, když síť není dostatečně **hustá**, je tato cesta nemožná.
- Propojení pojmu 0,2 na sémantickou oblast korun a haléřů je nespolehlivé, ale na oblast centimetrů a milimetrů je **spolehlivé**.
- Kdyby Bára věděla, že kontext centimetrů zná lépe než kontext korun, kdyby tedy jednotlivé spoje měla **strukturovány**, pak by sama byla schopna úspěšně analyzovat vlastní chybu.

Termín *síť čísla* aplikujme na příklad 1. Anitina představa malých zlomků je propojena na model dortu. Tedy síť každého z čísel $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ a $\frac{2}{6}$ je ukotvena ve světě věcí pomocí modelu. Ten navíc tyto sítě vzájemně svazuje. To umožňuje Anitě s těmito zlomky zacházet s porozuměním. U větších zlomků však takové propojení v Anitině vědomí neexistuje a dívka zde nepracuje s představou čísla, ale s návodem (správným nebo chybným). Síť čísla $\frac{2}{9}$ nebo $\frac{4}{15}$ v Anitině vědomí je v podstatě redukována na grafický zápis a nemá propojení na svět věcí.

Objevuje se vážná didaktická otázka, jak dívce pomoci chybu opravit.

2.4. Reedukace chybné představy

Běžná praxe, jak učitel Anitinu chybu opravuje, je, že vymění špatné pravidlo za pravidlo správné. Taková oprava léčí vnější projev formalizmu, nikoli nemoc samu. Je částečně účinná pouze do té doby, dokud nedojde k narušení paměti. Jakmile Anita správné pravidlo zapomene, nemá možnost korigovat svůj postup.

Dva nejúčinnější způsoby reedukace Anitiny představy jsou: a) vytvoření spojení mezi čísly $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{15}$ a světem věcí a b) odhalení souvislostí, které vedou ke konstrukci všeobecného postupu sčítání zlomků. Přitom způsob a) má nižší a způsob b) vyšší úroveň obecnosti i abstrakce.

Teď se podívejme na Bářinu představu pojmu „číslo 0,2“ (příklad 2). Je charakterizována trojicí různých spojů manifestovaných v B5, B6, B7. V protokolu, z něhož je fragment vybrán, jsou ještě další čtyři spoje: a) na zlomky $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{5}$, b) na čísla 1,2 a 2,2, c) na model „0,2 dortu“, d) na porovnávání čísel 0,2 a 0,02. Soubor všech těchto spojů, obohacený o další existující, ale zatím neevidované spoje tvoří pak Bářinu síť čísla 0,2.

Podobně jako u Anity i zde běžná praxe reedukace směřuje k záměně chybné instrukce za instrukci správnou. I zde je však výsledek reedukace pochybný.

Účinná reedukace může být založena, podobně jako u Anity, na dalším rozpracování správných sémantických spojů Báry. Může však být použit i didakticky náročnější, ale účinnější postup, který je založen na tom, že učitel cestou rozhovoru dovede dívku k poznání, že v její představě o čísle 0,2 je vnitřní spor. Například vyzve Báru, aby výpočet $1{,}2 \cdot 10 = 1{,}20$ vysvětlila pomocí centimetrů. Bára bude dovedena k poznání, že $1{,}2\,\mathrm{cm} \cdot 10 = 1{,}20\,\mathrm{cm} = 1\,\mathrm{cm} + 20\,\mathrm{mm} = 3\,\mathrm{cm}$. Nenahlédne-li dívka vnitřní rozpornost výsledku, vyzve ji učitel k tomu, aby situaci nakreslila.

Z uvedených příkladů můžeme vyvodit dva různé postupy při reedukaci chybných nebo nepřesných představ žáků.

1. Vycházíme od existující dobré představy žáka a postupně ji rozšiřujeme. Tím vytěsňujeme představy chybné. V jazyce sítí jde o zahuštění sítě, tj. vytvoření nových zdravých spojů a potlačování spojů nespolehlivých.
2. Vycházíme od vnitřního sporu, který je v představě žáka. Žáka vedeme k tomu, aby tento vnitřní spor uviděl, pocítil potřebu spor odstranit a měl dostatek sebedůvěry, že to dokáže. V jazyce sítí jde o poznání lokality chybné představy a o samostatně uskutečněnou opravu nespolehlivého spoje.

Z didaktického hlediska je druhý způsob náročnější, ale přináší trvalejší a hlubší poznání pro žáka. Žák v případě prvním bude vědět, jak se to má počítat, nebude však vědět, proč jeho původní postup byl chybný. Žák v případě druhém bude znát příčinu své chyby a navíc bude vyzbrojen zkušeností, jak organizovat své chování v situaci, když se vyskytne chyba. Bude vědět (nebo aspoň tušit), že má hledat vnitřní rozpor a ten analyzovat. Samozřejmě izolovaně nabytá zkušenost výraznější změnu do žákova chování nepřinese. Jestliže však učitel důsledně upřednostňuje reedukační postup 2 před reedukačním postupem 1, budou představy žáků v uvedeném směru kvalitnější.

Zeptejme se, zda i v případě Anity nebylo možné použít druhou reedukační technologii. Domníváme se, že ano, nikoli však jen na základě poznání, které přináší příklad 1. K tomu, aby učitel v představách Anity objevil vnitřní rozpor, musí s ní navázat diagnostický dialog, např. vyzvat ji, aby použitým způsobem sčítala dvě poloviny. Jakmile Anita uvidí, že její pravidlo vede k poznání $1 = \frac{1}{2}$, může pocítit přítomnost rozporu, může však rozpor necítit a argumentovat: „Tam, kde to jde udělat pomocí dortu, dělám to pomocí dortu, tam, kde se to udělat nedá, dělám to pomocí pravidla.“ V tomto okamžiku vyvstává před učitelem problém odhalit v představě Anity cestu k hranici mezi teritorii malých a velkých zlomků a k vytvoření rozporu v představách právě v prostoru této hranice.

Poslední úvaha naznačuje, jak lze nástrojů, jimiž analyzujeme číselné představy žáků, využít v běžné každodenní práci učitele.

3. Třídění číselných představ

Východiskem první etapy zkoumání je soubor příkladů, v nichž se číslo objevuje v nejrůznějších sémantických kontextech. Soubor nám poskytne materiál k prvnímu třídění číselných představ. Slova psaná kurzívou vysvětlíme v části 3.3 a dále.

3.1. Ilustrace

Příklad 3. Ve větě vytržené z textu úlohy „Já ti dám tři nugátové bonbóny, ty mi dáš 100 g oříšků.“ jsou dvě čísla. První je *počtem* (počítá se na kusy), druhé *veličinou* (musí se měřit).

Příklad 4. Ve větě „Přestěhoval jsem se z pokoje číslo 501 o tři pokoje dál do pokoje, jehož rozloha je dvojnásobkem rozlohy pokoje 501.“ jsou čtyři čísla.

První a poslední číslo, tedy číslo 501, je *adresou* (udává místo). Druhé číslo udává míru změny a třetí poměřuje rozlohy dvou pokojů. Tedy druhé číslo je *operátorem změny* a třetí číslo je *operátorem porovnání.*

Příklad 5. V příběhu „Poprvé jsem se vezl tramvají, když mi bylo osm. Pamatuji se, že to byla trojka. Jel jsem s babičkou. Nastoupili jsme do druhého vozu, ve kterém byl pouze průvodčí. V prvním voze bylo kromě průvodčího ještě asi 5–6 lidí.“ jsou čtyři čísla.

První číslo je *veličinou*, neboť udává věk, tedy to, co lze měřit. Druhé číslo, číslo tramvaje, je *jménem.* Poslední dvě čísla jsou *počtem.* Kromě těchto čtyř čísel, která jsou přímo uvedena, obsahuje výpověď další čísla, která vyplývají z kontextu — *kontextové údaje.* Například že tramvaj měla dva vozy, že v každém byl právě jeden průvodčí, že v prvním voze byli pouze dva cestující, jeden dospělý a jedno dítě. Každý z těchto údajů je *počet* (kusů).

Příklad 6. Cyril (3. třída) řeší úlohu: „Uhodni, které číslo si myslím. Víš, že moje myšlené číslo se od čísla pět liší o dvě.“ Hoch má těžkosti s uchopením úlohy. Až po třetím zopakování pochopí, co se od něj žádá, a začne situaci modelovat na prstech. Roztáhne všech pět prstů levé ruky. Pak k nim přidá palec a ukazováček pravé ruky. Chvíli na své ruce hledí a pak řekne „sedm“.

Analyzujme Cyrilovo řešení. V zadání jsou tři čísla. Dvě z nich „pět“ a „dvě“ jsou uvedena přímo. Třetí, „myšlené číslo“, je ukryto a má se najít. Ani jedno z těchto tří čísel není propojeno na svět věcí. Všechna leží uvnitř světa čísel a jsou pro chlapce méně dostupná. Cyril však již při uchopování úlohy přenáší (promítá) obě daná čísla ze světa čísel do světa věcí. Dělá tak pomocí modelu „prsty“. Projekcí mění *čísla na počty*: číslo „pět“, resp. „dvě“ mění na počet „pět prstů“, resp. „dva prsty“. V tomto modelu pak úlohu vyřeší. Výsledek, počet „sedm prstů“, pak po zpětné projekci do světa čísel vysloví jako číslo „sedm“. Vzájemné propojení obou světů, projekci ze světa čísel do světa věcí (modelování) i zpětnou projekci, tedy oddělení čísla od modelu, dělá Cyril zcela automaticky, bez většího vydání energie.

TABULKA 1.

FUNKCE	ODPOVÍ NA OTÁZKU	ILUSTRACE
jméno	jak se jmenuje?	tramvaj číslo 11
adresa	kde?, na jaké adrese?	bydlím na pokoji 276
množství	kolik?, za kolik (hodin)? jak daleko?, jak rychle?	dva prsty, 5 korun, 5 korun dluhu, za 5 Kč, 10 cm, tři lžíce cukru, 60 km $\cdot$ h^{-1}
operátor	o kolik?, kolikrát?, kolik %?	David od minulého roku vyrostl o 6 cm

Dodejme, že v této chvíli nás nezajímá skutečnost, že řešení je neúplné. K tomu se vrátíme později. Teď nám šlo o vyjasnění vztahu světa čísel a světa věcí v běžné školní situaci.

Příklad 7. Dana (5. třída) měla řešit úlohu: „Honza je o 5 cm vyšší než Jana a Jana o 3 cm vyšší než Mirek. Porovnejte výšku Honzy a Mirka.“ Chvíli si text četla a pak chtěla vědět, jakou výšku má aspoň jedno z dětí. Zdálo se jí, že se bez takového údaje úloha řešit nedá.

Příklad 8. Eva řeší rafinovanou úlohu: „Ivanovi a Pavlovi je dnes dohromady 7 let. Za dva roky bude staršímu z chlapců dvakrát víc, než bylo Pavlovi loni. Který z hochů je starší?“ V uvedené úloze jsou tři čísla. První udává věk a je tedy *veličinou.* Druhé je *operátorem změny*, třetí pak *operátorem porovnání.* V úloze je ve slově „loni“ viditelně přítomen i *kontextový údaj* „před jedním rokem“. I toto číslo je *operátorem změny.*

3.2. Základní třídění

Svět čísel se dítěti utváří v lůně světa věcí. V rozbřesku poznávání světa čísel dítě ví, co jsou tři panenky, tři židle, tři kamarádi, ale neví, co je to „tři“. Proces, který lze zapsat jako zobrazení

$$\text{Abs}: \{\text{tři panenky, tři židle,}\\ \text{tři kamarádi}, \dots\} \to \text{tři}$$

je abstrakcí. Souboru objektů světa věcí přiřadí pojem světa čísel. Poznání čísla tři však nekončí vytvořením této abstraktní představy. Pokračuje dále rozšiřováním vzoru, tj. obohacováním souboru, který matematik zapíše $\text{Abs}^{-1}(3)$. Je to soubor dalších objektů představujících slovo „tři“. Nacházíme je v příkladech 3, 4, 5, 7; pokaždé v jiném sémantickém kontextu. Když si žák tyto úlohy přečte a porozumí jim, víme, že jeho síť čísla 3 obsahuje propojení na počet (bonbónů), na změnu (stěhování o 3 pokoje dál), na jméno (tramvaj trojka) i na porovnání (o 3 cm více). Samozřejmě tato síť obsahuje ještě mnoho dalších možných spojů na svět věcí. Když chceme o některém spoji mluvit, řekneme „číslo 3 je ve *funkci* počtu, resp. změny, resp. jména, resp. porovnání“. Tím do souborů $\text{Abs}^{-1}(n)$ zavádíme jistou organizaci.

V příkladech 3.1 nacházíme čtyři základní funkce čísla. Jsou uvedeny v tabulce 1.

Třída JMÉNO je z hlediska světa čísel chudá. Bývá však někdy zdrojem šumů, které vznikají, když jsou tato jména chápána jako něco víc než jména (například jako veličiny). Příklad 10 ilustruje jednu takovou situaci.

Druhou třídu ADRESA budeme analyzovat v propojení na třídu JMÉNO, protože každá z těchto tříd se používá k označení místa, objektu nebo události. Z hle-

TABULKA 2.

nenasycený	nasycený		
	kontextový		daný
	skrytý	viditelný	
rozloha pokoje číslo 501 (**4**) výška Honzy (**7**)	myšlené číslo je 3 nebo 7 (**6**) Honza je o 5 cm vyšší než Mirek (**7**)	v prvním voze jedou dva cestující (**5**) loni = před jedním rokem (**8**)	3 nugátové bonbóny (**3**) číslo pokoje 501 (**4**) když mi bylo osm (**5**)

diska světa čísel je však třída ADRESA daleko bohatší a důležitější.

Zbývající dvě funkce MNOŽSTVÍ a OPERÁTOR tvoří pilíře světa čísel a rozbor každého z nich vyžaduje hodně prostoru a času. Zde se omezíme na analýzu funkce „množství“. Funkce „operátor“ je tak náročná, že by její analýza vyžadovala další článek. Dříve než začneme funkci „množství“ analyzovat, uvedeme několik termínů, které jsme použili již v horních příkladech a které budeme i dále používat.

Údajem nazýváme buď číslo samo, nebo kteroukoli z jeho funkcí popsaných zde i v dalším textu. Údaj, jehož číselná hodnota je uvedena jednoznačně nebo alternativně (jako řešení Cyrilovy úlohy v příkladu 6), nazýváme *nasyceným.* V příkladech 3 až 8 jsou údaje čtyř typů z hlediska našich znalostí číselné hodnoty údaje. Přehledně jsou uvedeny v tabulce 2 (v závorce za ilustrací uvádíme číslo příslušného příkladu).

Údaj, jehož číselnou hodnotu zjistit nelze, nazýváme *nenasyceným.* Údaj, jehož číselná hodnota je přímo uvedena, nebo je možné ji zjistit, nazýváme *nasyceným.* Je-li přímo uvedena, mluvíme o *daném údaji*, v opačném případě o *kontextovém údaji.* Ten nazveme *viditelným*, když je číslo bezprostředně z textu vyvoditelné, a *skrytým*, když tomu tak není. Informaci, která neobsahuje žádné číslo (například „Jan Novák bydlí v Mníšku“), za údaj nepovažujeme.

Protože v celém článku uvažujeme o třídění představ, může se stát, že týž údaj je pro jednoho žáka údajem viditelným, pro jiného skrytým a pro dalšího dokonce nenasyceným. Tak v příkladě 7 je rozdíl výšky Honzy a Mirka pro Danu údajem nenasyceným, zatímco pro jiného žáka může být údajem skrytým nebo dokonce viditelným.

Klasifikace daná tabulkou 2 se týká číselných údajů. Tuto klasifikaci můžeme rozšířit na všechny informace. Například jméno hotelu (příklad 4) je *nenasycená informace*, jméno staršího z chlapců (příklad 8) je *skrytá kontextová informace*, v idiomu „bylo mi osm“ (příklad 5) je *viditelná kontextová informace* „let věku“, jméno žáka v příkladu 6 (Cyril) je *daná informace.*

Speciální a didakticky zvláště významný případ skryté informace je informace *hledaná.* Jádrem této informace je většinou jeden údaj, někdy i soubor údajů. V příkladu 3 žádná hledaná informace neexistuje, v příkladu 4 sice není uvedena, ale můžeme si ji lehce domyslet. V příkladu 5 je potenciálně přítomno více možných hledaných informací (kolik lidí v tramvaji jelo, kolik z toho bylo cestujících, kolik zaměstnanců MHD, ...). V příkladech 6, 7, 8 je hledaná informace přímo označena, přičemž v příkladech 6 a 7 je touto informací údaj, resp. údaje.

Úmluva: Chceme-li kontextovou informaci napsat přímo do textu, píšeme ji do ostrých závorek. Například zápis „Nás ⟨kluků⟩ bylo osm a holek jen polovina ⟨tedy čtyři⟩“ říká, že původní věta neobsahovala slova „kluků“ a „tedy čtyři“ a my jsme je připsali až dodatečně. Poučná ilustrace o vložené informaci je v úloze v podkapitole 4.2.

3.3. Jméno — číslo jako nástroj označení

Všimněme si následujících devíti příkladů použití čísel k označení jistého objektu, jevu, události.

Tramvajová linka číslo 6. *Telefonní číslo policie je* 158. *Agent* 007. *Dominik Hašek má číslo* 39. *Charta* 77. *Třída* 5.B *je teď v tělocvičně. Tomy bydlí na* 32. *třídě v domě číslo* 388. *Dne* 7. 4. 1348 *byla založena Univerzita Karlova. Zeměpisná poloha Prahy je* $14^\circ\, 26'$ *v. d.* $50^\circ\, 35'$ *s. š.*

Všechny uvedené příklady můžeme rozdělit do dvou skupin podle toho, zda přiřazení

$$\text{číslo} \leftrightarrow \text{objekt}$$

má nebo nemá *strukturální charakter*. Poslední termín blíže osvětlíme pomocí ilustrací.

V posledním příkladu je dvěma čísly vymezena poloha Prahy na zeměkouli. Toto přiřazení není libovolné, je určeno přesně definovanými pravidly. Kdybychom první z těchto čísel zvětšili třeba o jeden stupeň, dostali bychom se někam do Chlumce nad Cidlinou. Číselné údaje a místa na zeměkouli jsou strukturálně propojeny. Budeme mluvit o číslu ve funkci *adresy.*

Naproti tomu žádné strukturované propojení nenajdeme, když mluvíme o tramvajových linkách. Číslo 7 je o 1 větší než 6, ale z této skutečnosti o tramvajových linkách číslo 6 a číslo 7 nic neplyne. Číslování tramvajových linek není *strukturováno*, nemá charakter adres. Budeme mluvit o číslu ve funkci *jména.* První čtyři z nahoře uvedených příkladů mají číslo ve funkci jména. Zkoumáním této funkce čísla zahájíme podrobnější analýzu jednotlivých funkcí čísla.

Jméno je to, co označuje jednotlivinu, individualitu: člověka, skupinu lidí, lokalitu, předmět, časový okamžik, časový interval, … Může to být slovo, znak, soubor slov, soubor znaků nebo soubor slov i znaků. Číslo ve funkci jména nazveme *číselné jméno.*

Příklad 9. Před závodem v běhu na 100 m si závodníci losovali startovní čísla. Michal si vylosoval číslo 14, Jan číslo 3. Přiřazení „14 ↔ Michal“ a „3 ↔ Jan“ jsou zcela náhodná, nelze z nich vyvodit žádnou novou informaci, nemají strukturální charakter. Kdyby si chlapci čísla vyměnili, na závodě by to nic neměnilo. Kdyby místo startovních čísel měli startovní znaky (kotvu, jablíčko, kočárek, …), zkomplikovalo by to pořadatelům evidenci, ale na podstatě věci by se nic nezměnilo.

Příklad 10. V Motole se ptá pan Vesničan pana Pražáka, jak se dostane na Výtoň.

Pan P: „Pojedete čtyřkou až na Palackého náměstí a pak trojkou proti proudu Vltavy.“

Pan V: „Čtyřkou a pak trojkou? Proč tak? To já pojedu raději rovnou sedmičkou.“

Pan Vesničan si počkal na sedmičku a ta jej dovezla na Výtoň.

I když panu Vesničanovi přálo štěstí, příhoda jednoznačně ukazuje, že jeho představa čísel je značně narušena. S číslem ve funkci jména pracuje, jako by to bylo množství.

S čísly tramvajových linek nelze smysluplně aritmeticky operovat, protože jsou to jména. Když čísla změníme na písmena (jak je tomu u linek metra), nic podstatného se na značení nezmění. Cestující se budou muset učit nová jména linek, ale když se je naučí, bude jejich znalost stejně kvalitní, jako byla znalost v době čísel. Kdyby měly aritmetické operace s čísly linek nějaké opodstatnění, bylo by označování linek pomocí písmen o něco chudší. Není tomu tak.

Příklad 11. Telefonní seznam podniku XYZ má osm položek abecedně seřazených: dispečer 19, garáž 18, osobní 15, ředitel 04, sekretářka 11, sklad 12, ústředna 20, vrátnice 01. Telefonní čísla vnitřních linek podniku jsou kódy jednotlivých oddělení. Mají funkci jmen. Číslo 11 je zde „telefonní jméno“ sekretářky. Nápis SEKRETÁŘKA na dveřích její kanceláře je její funkční jméno. Chci-li mluvit telefonem se sekretářkou, vytočím 11. Toť vše. Nic dalšího se k číslu 11 nevztahuje. Ani poloha příslušné kanceláře v budově, ani významnost postu. Když číslo zapomenu, musím jej opět vyhledat v seznamu. Kdyby se jakkoli čísla telefonů permutovala, nic by se na podstatě seznamu nezměnilo.

Připusťme ale, že montér, který síť zřizoval, měl svůj tajný systém: jménu přiřadil pořadové číslo třetího písmene tohoto jména. Například, „vrátnice $\leftrightarrow$ 01“, „ředitel $\leftrightarrow$ 04“, ..., „ústředna $\leftrightarrow$ 20“ (A je první, D čtvrté a T dvacáté písmeno abecedy). Pro tohoto montéra jsou čísla telefonů zakódované *adresy.* Případné přečíslování telefonů by zničilo jeho systém pamatování si čísel.

3.4. Adresa — ilustrace

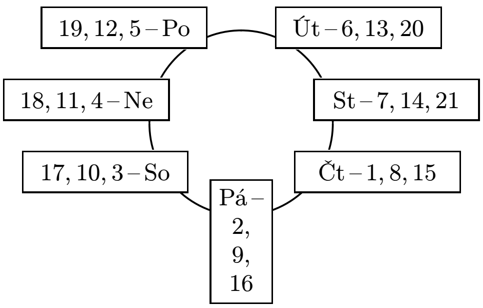
Když je strukturovaný soubor objektů, míst nebo událostí označen čísly obsahujícími znaky tak, že mezi strukturou objektů, míst nebo událostí a strukturou jejich číselných znaků je přesně daná souvislost, pak takové označování nazveme *adresováním* a znak přiřazený objektu, místu nebo události nazveme *adresou* (někdy též *souřadnicí*) toho objektu.

Příklad 4a. Vracím se do svého hotelového pokoje 504. V chodbě je tma. Nouzové světlo mi dovolí přečíst jen číslo krajního pokoje: 501 (v tom jsem původně bydlel). Hmatám podél zdi a počítám dveře, kolem kterých procházím: 502, 503, 504. Jsem u mého pokoje. Číslo pokoje mi umožnilo pokoj najít, protože čísla pokojů tvoří strukturu.

Příklad 9a. Kdyby v příkladě 9 šlo o slalom, ve kterém závodníci startují ve vylosovaném pořadí po jednom, a ne o běh, ve kterém závodníci startují naráz, pak by přiřazení „14 $\leftrightarrow$ Michal“ a „3 $\leftrightarrow$ Jan“ bylo adresováním, neboť z něj plyne, že Jan startuje jako třetí a Michal jako čtrnáctý. Kdyby si chlapci čísla vyměnili, mělo by to na závod jasný vliv.

Příklad 12. Vnuk netrpělivě vyhlíží babičku. Tatínek ukáže synovi kuchyňské hodiny a praví: „Autobus přijede až za dvacet minut. To bude tehdy, kdy tato velká ručička dojde na číslici 9.“

Příklad 13. Pan Emil věří, že každé pondělí, jehož pořadové číslo dne v roce je prvočíslo, je jeho šťastným dnem a každý pátek nebo neděle, jehož pořadové číslo dne v roce je dělitelné 13, je jeho nešťastným dnem. Již v prosinci 1997 si udělal kalendář svých významných dnů roku 1998: Nakreslil kružnici a na ni ve směru pohybu hodinových ručiček rozmístil sedm dnů týdnu Po, Út, ..., Ne a pak, počínaje čtvrtkem, psal ve stejném směru pořadová čísla dnů roku 1998. Nakonec si červeně u dne „Po“ vyznačil prvočísla 5, 19, 47, 61, 89, 103, 173, 229, 257, 271, 313 a černě u dne „Pá“ vyznačil čísla: 65, 156, 247, 338 a u dne „Ne“ čísla 39, 130, 221, 312.



Obr. 1

Příklad 14 (A. Hošpesová). Šestiletý hoch z poznání, že Mirek byl v jednom závodě první a ve druhém třetí, vyvodil, že závodu se zúčastnili 4 závodníci.

3.5. Lineární a cyklické adresování

Příklady uvedené v předchozím bodě ilustrují dva základní typy adresování:

lineární — modeluje procesy ubíhající stále vpřed, bez návratu,

cyklický — modeluje procesy periodicky se opakující.

Standardním teoretickým modelem lineárního adresování je *číselná osa.* Na ní má každé místo přesně určenu souřadnici a každé reálné číslo je souřadnicí jednoho místa. V reálném světě nacházíme modely číselné osy ve formě *stupnice.* Například krejčovský metr, váha, teploměr, tlakoměr, tachometr, fonoměr, výškoměr, kalendář, ...

Stupnice se od číselné osy liší přinejmenším ve třech bodech. Na rozdíl od číselné osy stupnice

1. je vázána na svět věcí,
2. je z obou stran omezena,
3. má jistou rozlišovací schopnost.

Například lékařský teploměr měří teplotu v rozmezí od 34,1 °C do 42 °C s rozlišovací schopností 0,1 °C. Řídicí panel výtahu má 9 tlačítek s čísly od -1 do 7. Kalendář je stupnice času pro každý rok jiná. Dny v něm mají více adres. Například: „dnes je 16. 3. 1997“ lze zapsat „75. den roku 1997“ nebo „neděle 11. týdne roku 1997“. Žádné z těchto čísel neoznačuje časový bod — okamžik, ale časový interval 24 hodin. Podobně adresa „20. století“ označuje 100 let trvající interval od 1. 1. 1901 až do 31. 12. 2000.

Teoretickým modelem cyklického adresování je kružnice rozdělená na jistý počet stejných dílků. Když je dílků n, můžeme jednotlivé dělicí body kružnice označit $0, 1, 2, \dots, n-1$. Pak je každému reálnému číslu t z polouzavřeného intervalu $\langle 0, n)$ přiřazen bod $(\cos 2\pi t/n, \sin 2\pi t/n)$ jednotkové kružnice $K \equiv x^2 + y^2 = 1.$[2]) Popsané zobrazení $\langle 0, n) \to K$ je vzájemně jednoznačné.

Alternativní model cyklického adresování je dělení plného úhlu (tj. úhel 360°)

[2]) Zobrazení si můžeme představit jako „namotávání číselné osy na kružnici“. Při tomto namotávání všechna celá čísla 0, n, $2n$, $3n$, ..., i čísla $-n$, $-2n$, $-3n$, ... číselné osy padnou na stejný bod kružnice.

na n stejných úhlů. Oba modely jsou izomorfní a není tedy nutné mezi nimi příliš rozlišovat.

Standardním modelem cyklického adresování je dělení kružnice, resp. plného úhlu na $n = 360$ dílků, které zavedli již Babyloňané. Jeden dílek nazýváme stupněm, dělíme jej na 60 minut a minutu na 60 vteřin. Nástroj na měření úhlů je úhloměr, stupnice, která měří velikosti úhlů od $0°$ do $180°$ s rozlišovací schopností $1°$.

Ještě dříve, než se žáci seznámí s úhloměrem, poznají jinou cyklickou stupnici — ciferník hodin. Prostředníkem mezi kružnicí a časem je dvojice ručiček, které se pohybují rovnoměrným pohybem. Pro každou z nich je na ciferníku vytvořena jiná stupnice.

- Z pohledu malé ručičky je ciferník dělen na $n = 12$ dílů — hodin,
- Z pohledu velké ručičky je ciferník dělen na $n = 60$ dílů — minut.

V časomíře se hodina dělí na 60 minut, minuta na 60 vteřin. Náročnost této stupnice je dána právě popsanou víceúčelovostí ciferníku. Navíc je zde i terminologická dvojznačnost.

Mezi cyklickou a lineární stupnicí jsou tři základní rozdíly.

- Cyklická stupnice umožňuje měřit neomezeně. Ciferník hodin zobrazuje všechny hodiny minulé i budoucí. Lineární stupnice (například krejčovský metr) je omezená.
- Cyklické adresování je nejednoznačné. Témuž číslu stupnice odpovídá nekonečně mnoho orientovaných úhlů nebo časových okamžiků. (Dílku $40°$ odpovídají i úhly $400°$, $-320°$, …)
- Cyklická stupnice má absolutní jednotku.[3]) Například $1°$ odpovídá $\frac{1}{360}$ kružnice.

Propojení mezi lineárním a cyklickým adresováním je znázorněno na obrázku 1.

Poznámka. Zkoumali jsme pouze ty případy, v nichž vazba mezi soubory čísel a věcí je buď přesná (adresa), nebo žádná (jméno). Zajímavé je zkoumat částečné vazby. To přenecháme čtenáři. Ilustrací částečné vazby je modifikace příkladu 4a. Kdyby na tmavé chodbě mezi pokojem 501 a 504 byly nečíslované dveře WC, nevedl by popsaný postup k nalezení pokoje 504 přesně, dal by pouze přibližnou informaci.

3.6. Upřesňování adresy

Údaj, jehož číselná hodnota je uvedena pouze přibližně, nazveme *přibližným*. Takovým je například údaj o počtu cestujících v druhém voze tramvaje z příkladu 5. Údaj, jehož hodnota je uvedena přesně, nazveme *přesným*. Přesnost zde chápeme ve smyslu informace, nikoli ve smyslu reálné přesnosti. Tak v příkladě 3 mluvíme o veličině „100 g oříšků“. Tento údaj považujeme za přesný, i když víme, že nelze navážit přesně 100 g oříšků. Podobně informačně *přesný*, i když reálně pouze přibližný je údaj o dvojnásobku rozlohy pokoje z příkladu 4.

Lineární i cyklické adresování může být:

---

[3]) Když chceme v prázdném prostoru definovat jednotku délky, musíme tak učinit úmluvou — sestrojit úsečku a tu prohlásit za jednotku. V případě úhlové míry je však plný úhel jednotkou apriorně danou.

diskrétní — adresované objekty stojí za sebou v řadě, každý objekt má svého souseda,

spojité — adresované objekty jsou rozloženy spojitě tak, že mezi libovolnými dvěma existuje další.

Příkladem lineárního diskrétního adresování jsou celá čísla na číselné ose, kde například číslo -5 má sousedy -4 a -6. Jiným příkladem jsou čísla pokojů na hotelové chodbě, kde pokoj číslo 401 má jediného souseda, a to pokoj číslo 402. Tento pokoj má sousedy dva: 401 a 403.

Příkladem cyklického diskrétního adresování je dvanáct čísel na ciferníku hodin, kde číslo 12 má dva sousedy, čísla 11 a 1, nebo dny v týdnu, kde „čtvrtek" má sousedy „středa" a „pátek".

Příkladem lineárního spojitého adresování jsou racionální nebo reálná čísla na číselné ose, kde žádné číslo nemá svého souseda a mezi každými dvěma čísly existuje další (například jejich aritmetický průměr).

Příkladem cyklického spojitého adresování je určení polohy bodu na úhloměru nebo určení zeměpisné délky jistého místa na zeměkouli.

Jiným příkladem je určování časového okamžiku, ve kterém začala jistá událost, například atomová reakce. Takový časový údaj určíme s přesností na sekundu, ale vědcům, kteří pokus sledují, to nestačí. Časový okamžik upřesňujeme na desetiny, setiny, tisíciny sekundy, ... Přesnost je limitována dokonalostí měřicích nástrojů, ale teoretické výpočty mohou tuto přesnost daleko přesáhnout. Absolutní přesnosti lze dosáhnout pouze ve světě čísel, ve světě věcí je každý údaj pouze přibližný.

Upřesňování adresy — ať již lineární nebo cyklické — může sloužit jako motivující situace pro porozumění desetinným číslům nebo zlomkům. Ukazuje to následující příklad.

Příklad 15. Žáci 6. třídy měli za domácí úkol popsat co nejpřesněji polohu lustru (či lampy) v pokoji, ve kterém si budou psát domácí úkol. Většina žáků odpověděla pouze slovy, bez čísel. Například „v kuchyni na stole", nebo „uprostred našej ⟨detskej⟩ izby, na plafóne"[4]). Osm žáků použilo při popisu místa číslo. Například „hore na plafóne, 175 cm od oknovej steny a 103 cm od dverovej steny". Originální řešení přinesla Nina, inspirovaná bratrem. Její odpověď zněla „14,623 v ulici, 520 cm do hĺbky a 375 do výšky". Pak třídě barvitě líčila nejen význam těchto údajů, ale i to, jak je otec s bratrem měřili. Význam je následující: Nina bydlí ve Slepé ulici, číslo 14. Průčelí jejich domu má délku přesně 10 m. Nina si představila ulici jako číselnou osu. Místo, kde končí dům číslo 13 a začíná dům číslo 14, vzala jako „bod o souřadnici 14" a místo, kde končí dům číslo 14 a začíná dům číslo 15, vzala jako „bod o souřadnici 15". Tedy střed průčelí domu 14 má „souřadnici" 14,5. Její pokojík je kousek za středem a lampa 123 cm od středu směrem k domu číslo 15. „Preto pre poštára má moja lampa číslo popisné 14,623. Potom od ulice smerom dovnútra namerali 520 cm a od chodníka po okno nahor to bolo 235 cm, od okna k lampe 140 cm, dokopy 375 cm."

Ukončili jsme zkoumání čísla ve funkci označení, tj. jména nebo adresy. Podle programu, který byl stanoven v 3.2, přikročíme ke studiu funkce *množství.*

[4]) Plafón, tj. strop.

4. Množství

V předchozí kapitole jsme zkoumali schopnost čísla pomáhat při označování objektů. Teď se zaměříme na hlavní funkci čísla, na jeho schopnost popisovat kvantitativní jevy.

4.1. Třídění

Vraťme se k příkladům 3 až 10. V každém z nich se vyskytuje několik čísel. Nás budou zajímat ta, která vyjadřují *množství*, tj. ta, která

1. jsou přímo propojena na objekty ve světě věcí a vypovídají o jejich kvantitě; například: 3 nugátové bonbóny (příklad 3), 5–6 lidí (příklad 5) — takové číslo nazveme *počet*,
2. jsou na objekty ve světě věcí propojena zprostředkovaně, pomocí jednotky; například 100 g oříšků (příklad 3), x m^2 rozlohy pokoje (příklad 4), 8 ⟨let věku⟩ (příklad 5), 100 m ⟨běžecké dráhy⟩ (příklad 10) — takové číslo nazveme *ukotvená veličina*,
3. nejsou na svět věcí propojena, ale pouze na něj poukazují prostřednictvím jednotky; například „21 dm ⟨délka⟩“, „pět litrů ⟨objem⟩“, „54 ha ⟨obsah⟩“ — takové číslo nazveme *veličina*.

Čtyři nové pojmy zavedeme přesněji.

> *Množství* = číslo + jeho kvantitativní propojení nebo poukázání na objekty světa věcí.[5])

> *Počet* = uspořádaná dvojice (číslo, věc)[6]). Jinak: číslo je počet kusů uvažované věci.
> *Ukotvená veličina* = uspořádaná trojice (číslo, jednotka, věc), případně doplněná o kvalitu.
> *Veličina* = uspořádaná dvojice (číslo, jednotka), případně doplněná o kvalitu.

Počet je množství, jehož jednotkou je „kus“. Například počet „tři nugátové bonbóny“ obsahuje číslo „tři“, věc „nugátové bonbóny“ a zamlčuje jednotku „kus“. Jiné příklady: „jeden stůl“, „pět prstů“, „64 stran“, „čtyři góly“, „šest tlesknutí“, „100 kusů hospodářských zvířat“, „2000 slov“ apod. První část počtu odpovídá na otázku „kolik?“, druhá na otázku „čeho?“.

Počet je první a nejsnazší funkce čísla. Porozuměním počtu si začíná dítě vytvářet svůj svět čísel. Nástrojem k získání porozumění počtu je známá říkanka „jedna, dvě, tři, …“, která má charakter pohybu po číselné ose. Poslední slovo, u kterého říkanka skončí, určí výsledný počet zkoumané skupiny objektů. Propojení procesu říkanky a konceptu počtu (posledního slova) se nám jeví jako samozřejmé, ale poučný příklad 14 ukazuje, že to tak samozřejmé není.

Ukotvená veličina je množství, jehož jednotka je něco jiného než kus. Jednotka je jednotkou něčeho. To „něco“ nazveme *kvalita.* Například ukotvená veličina „6 litrů mléka“ obsahuje číslo „6“, věc „mléko“, jednotku „litry“ a kvalitu „objem“. Jiné příklady (kvalita je dána do

[5]) Rámeček, kterým zvýrazňujeme některé termíny, má usnadnit jejich hledání, nikoli nabádat k „naučení se“.

[6]) Výstižnější by bylo zavést zde dvojici (*kolikost*, *čehost*). Tato slova jsou bohužel nespisovná. Slovo *kolikost* však najdeme v Ottově slovníku naučném u hesla „číslo“.

ostrých závorek): „21 dm lana ⟨délka⟩“, „pět litrů vody ⟨objem⟩“, „54 ha půdy ⟨obsah⟩“, „osm hodin spánku ⟨čas⟩“, „tři lžíce oleje ⟨objem⟩“, „dva roky prázdnin ⟨čas⟩“, „100 Kč dluhu ⟨obnos⟩“.

Třídu „ukotvená veličina“ by bylo možné ještě dále jemněji třídit pomocí kritéria abstrakce. Například „6 litrů mléka“, „6 litrů tekutiny“ a „objem nádoby je 6 litrů“ jsou tři různá ukotvení veličiny „6 litrů“. Je zřejmé, že první je nejkonkrétnější, poslední nejabstraktnější[7]).

Veličina postrádá „věc“, a proto není ve světě věcí ukotvena. Na svět věcí pouze poukazuje. Má jen jednotku a popřípadě i kvalitu. Například „25 km $\cdot$ h^{-1} ⟨rychlost⟩“, „osm hodin ⟨čas⟩“, „dva roky ⟨čas⟩“, „126 Kč ⟨obnos⟩“, „50 otáček za sekundu ⟨rychlost otáčení⟩“.

4.2. Jednotka

Jednotka je didakticky nejzávažnější a nejnáročnější část množství. Náročnost jednotky spočívá v jejím umístění do překrytí světa věcí a světa čísel. Informace „5 cm“ leží ve světě čísel, ale jednotka „cm“ poukazuje ze světa čísel „ven“ do světa věcí. Veličina „5 cm“ může být strana čtverce, ale i délka provázku. Snaha vymanit jednotku z područí světa věcí a uvažovat o ní pouze jako o obyvateli světa čísel bývá často příčinou choroby formalizmu. Choroba se projevuje ztrátou orientace v oblasti veličina a ukotvená veličina. Například žák měří obsah v cm a délku v cm^2 nebo ví, že tři kvality — rychlost, dráha, čas — jsou vázány tak, že podíl dvou dává třetí, ale nedovede zjistit, jak to vlastně je.

[7]) Pro malé dítě je pojem mléko jasnější a konkrétnější než pojem tekutina a ten jasnější než pojem objem.

Podívejme se na záludnosti, které se objevují v oblasti jednotek. Jde o nejednoznačnosti, které mohou vzniknout v propojení *objekt* $\leftrightarrow$ *kvalita* nebo *kvalita* $\leftrightarrow$ $\leftrightarrow$ *jednotka*. Příkladem prvního propojení je měření tekutin (např. alkoholu) buď pomocí hmotnosti, nebo pomocí objemu. Tento jev leží zcela vně světa čísel a nebudeme se jím zabývat. Nejednoznačnost druhého propojení nás zajímá. Vzniká v důsledku homonymity jednotky — stejné slovo nebo znak označuje jednotky dvou různých kvalit.

Například slovem „stupeň“ označujeme jednotku úhlu i teploty. Znak „90°“ může být jak pravý úhel, tak teplota vody. Uvedená nejednoznačnost by stěží vedla k nedorozumění, protože kvality „úhel“ a „teplota“ jsou kontextově vzdálené. Přesto napíšeme-li „90° ⟨teplota⟩“, je naše řeč trochu přesnější, ale zcela přesná není, protože není jasné, zda používáme stupnici Celsia, Fahrenheita nebo Réaumura. Zde je nebezpečí nedorozumění reálné a vzniká nedbalostí, opomenutím přesné citace jednotky. Zápis „90 °C“ je zcela přesný. Podobně nejednoznačné jsou mnohé peněžní jednotky: dolar, frank, koruna, libra, ..., u nichž je též nutné upřesnění. Někdy nestačí upřesnění země, je nutné i upřesnění časové.

Zvláštní pozornost zasluhuje termín *minuta*, který se objevuje jak v kontextu času, tak v kontextu úhlu. Například když malá ručička hodin opíše *úhel* 30 minut, uplyne čas 1 minuta. Jestliže slovo *vteřina* použijeme i ve významu *sekunda* jako jednotku času, mohou vzniknout nedorozumění.

4.3. Přeměny jednotek

Těžkosti, které mají někteří žáci s přeměnami jednotek, jsou dobře známy každému učiteli. Jsou žáci, kteří i přes mnohonásobné opakování a procvičování nemají při přeměnách jednotek potřebnou jistotu. Chyby, jichž se zde dopouštějí, jsou pro učitele někdy až nepochopitelné. Jsme přesvědčeni, že příčinou není nedostatek nácviku, ale to, že nácvik probíhá na úrovni paměťových záznamů, nikoli na úrovni učení se podstatě.

Pro náš názor máme silný argument. Nejsložitější systém jednotek má nepochybně kvalita „čas". Jednotky „sekunda, minuta, hodina, den, týden, měsíc, rok" jsou vzájemně vázány koeficienty 60, 24, 7, 12, 30, 365 a jejich případnými součiny, přičemž koeficient 30 je variován od 28 po 31 a koeficient 365 je někdy zaměněn číslem 366. Přes tuto nepřehlednost jednotek žáci v této oblasti chybují málo. Příčina je jednoduchá. Čas vstupuje do jejich každodenních zkušeností a deformace, která se v představách o čase objeví, je přirozeným způsobem korigována. Přesto se stává, že žák neumí vyřešit školskou úlohu týkající se času. Dochází k tomu tehdy, když žák uchopuje úlohu v kontextu školských poznatků a neaplikuje na ni své životní zkušenosti. Ilustraci školského přístupu k práci s jednotkami jsme viděli v příkladě 2. Při nákupu v obchodě by se Bára nedopustila chyby: $0{,}2\,\mathrm{Kč} \cdot 10 = 0{,}20\,\mathrm{Kč}$.

Idea přeměny jednotek je prostá. Jsou-li J a j dvě jednotky měřící stejnou kvalitu, pak existuje číslo x tak, že $J = xj$. Zvláště významné jsou případy, kdy číslo x je mocninou čísla 10. V těchto případech používáme předpony „mili", „centi" „deci" „deka", „hekta/hekto", „kilo", které jsou řeckého a latinského původu. Právě nácvik těchto předpon bývá častým zdrojem formálního poznání. Přitom existuje jednoduchý, účinný a pro mnohé děti motivačně silný prostředek, jak otevřít dětským představám vstup do této struktury. Je to právě kvalita času, jednotky, která po propojení na uvedené předpony přináší silný vhled do významu těchto předpon. Ukážeme si to na příkladech.

Příklad 16. Již v páté třídě, když učitel vysvětlil slova kilogram a kilometr jako tisíc gramů a tisíc metrů, dal domácí úkol: „Zjistěte, kolik kilo dnů je Honzovi, resp. kolik kilo týdnů je jeho rodičům."

S podobnou hrou učitel pokračoval v 6. i 7. třídě. V 7. třídě se hra žákům tak zalíbila, že objevovali krásné a překvapivé konstrukce: Milión = tisícina ÓNu, ARDA $= 10^{12}$, neboť miliarda $= 1000$ miliónů $= 10^3 \cdot 10^6$, ale též miliarda = tisícina ARDY = ARDA $\cdot\, 10^{-3}$. Dále Milina = tisícina NA, Centiden = setina dne = 14 minut 24 sekund, Kilosekunda = 16 minut 40 sekund, Kiloden = 2 roky + 270 dnů, Týpět = 35, protože Tý-den = sedm dnů, Týkoruna = 7 korun, Milicionář = tisícina CIONÁŘe, pes Hektor = sto psů Orů.

5. Závěr

V knize [5] na straně 457 uvádíme příhodu, která se odehrála ve třetím ročníku jednoho gymnázia na první hodině tematického celku „komplexní čísla". Vyučující, vědoma si náročnosti látky, se na hodinu pečlivě připravila a myšlenku komplexního čísla důkladně vyložila. Zdálo se, že žáci věci chápou. Pouze nejlepší matematik třídy Miro jevil narůstající nespokojenost, až posléze prudce zaútočil:

„Ja tomu neverím, to je všetko dáky podvod! Čo je to za číslo? Koľko je to $1 + i$? Čo ním odmeriam? Kde ho uvidím?“ V mírnějším tónu pokračoval „Keď sa ma niekto opýta, čo je to tri, ukážem mu tri prsty. Dve pätiny môžem znázorniť ako istú časť torty. Odmocninu z dvoch vidím na štvorci ako uhlopriečku. Záporné číslo si predstavím ako dlžobu. Ale čo je to to »i«?“ Miro ve svém útoku přesně poukázal na velice slabé místo našeho způsobu vyučování matematice.

Vyučování matematice na základních i středních školách v ČR (ale i v zahraničí) je výrazně orientováno na procesy, na otázku JAK — jak sestrojit, jak vypočíst, jak najít, jak dokázat. Málo pozornosti se věnuje otázkám PROČ a CO. Přitom právě tyto dvě otázky osvětlí kvalitu matematického poznání žáka ve své podstatě.

Víme, že žák může úspěšně řešit úlohy, odříkávat definice, věty, ba i důkazy a mít přitom pouze chatrnou a nepřesnou představu o podstatě toho, co dělá. Ví, jak to udělat, ale vlastně neví, co dělá, nezná to, s čím zachází. Žák rychle a správně sečte $\frac{2}{7} + \frac{3}{5}$, ale znázornit tyto objekty obrázkem neumí. Takovéto formální poznání vzniká právě v důsledku malé pozornosti, která se věnuje otázce CO, tedy představám žáků o matematických objektech.

Článkem jsme se pokusili poukázat na bohatost žákovských představ o světě čísel a na možnosti zkoumat tyto představy. Na několika místech jsme uvedli, jak takové poznání může učiteli pomoci zvýšit adresnost a účinnost jeho působení na žáky. V žádném případě jsme však nechtěli dávat učiteli návody, protože bychom se tím sami dopustili chyby, kterou kritizujeme. Naším hlavním záměrem bylo upozornit na důležitost žákovských představ a nadějné způsoby jejich zkoumání.

Poděkování. Článek byl napsán s podporou grantu GAČR 406/96/1186. Některé výsledky vznikly ve spolupráci s kolegy: Josef Brody, Concordia University, a Steave Rosenfield, Vanier College, Montreal, Kanada. Za cenné kritické připomínky děkují autoři F. Kuřinovi.

Literatura

[1] Bell, A.: *Purpose and awareness.* In: Hejný, M., Novotná, J. (Eds): *Proceedings of European Research Conference on Mathematical Education, Faculty of Education Charles University*, Prague 1997, str. 33–45.

[2] Brody, J., Hejný, M.: *A Mathematical Analysis of Problem Situations* (ve dvou částech). GRKG Grundlagenstudien aus Kybernetik Geisteswissenschaft. Část 1.: Band 38, Heft 2, Juni 1997, 69–76. Část 2.: Band 38, Heft 3, 1997, 164–171.

[3] Dantzig, T.: *Number. The Language of Science.* The Free Press, New York 1953.

[4] Gruszczyk-Kolczyńska, E., Zielińska, E.: *Edukacja matematetyczna dzieci.* Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1997.

[5] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2.* SPN, Bratislava 1989.

[6] Hejný, M., Kuřina, F.: *Konstruktivní přístupy k vyučování matematice.* Matematika, Fyzika, Informatika *7,* Březen 1998, str. 385–395.

[7] Hošpesová, A.: *Protokoly experimentů* (nepublikováno).

[8] Křivohlavý, J., Mareš, J.: *Komunikace ve škole.* Brno, MU 1995.

[9] Noss, R., Hoyles, C.: *Windows on Mathematical Meanings.* Kluwer Academic Publishers, 1996.

[10] Rendl, M.: *Vývoj počítání v první třídě.* In: Zpráva projektu GAČR 406/94/1417 „Žák v měnících se podmínkách současné školy“ (1997), str. 171–228.

[11] SCHWARTZ, J. L.: *Intensive Quantity and Referent Transforming Arithmetic Operation.* In: Number Concepts and Operations in the Middle Grades, NCTM, Lawrence Erlbaum Associates, USA 1991, str. 41–52.

[12] TICHÁ, M.: *Entwicklung der Vorstellung von Bruchen und der Aufgabensammlung.* In: Beiträge zur Mathematik Unterricht, Franz Becker, 1998 (v tisku).

[13] URBAŃSKA, A..: *O aktywności matematycznej dziecka przedszkolnego — na przykladzie ksztaltowania pojencia liczby.* In: Problemy studiów Nauczycielskich, Wydawnictwo Naukowa WSP, Kraków, 1996, No 6.

[14] VERGNOUD, G.: *Algebra, additive and multiplicative structures. Is there any coherence at the early secondary level?* In: HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J. (Eds): Proceedings of European Research Conference on Mathematical Education, Faculty of Education Charles University, Prague, 1997, str. 33–45.

jubilea & zprávy

SPOMIENKA NA IVANA KORCA (1943–1998)

Uprostred horúceho leta a prázdnin otriasla nami strašná správa o predčasnom skone prof. RNDr. Ivana Korca, DrSc. Pre tých, čo sme ho poznali, to bola neuveriteľná zvesť. Veď bol v plnom rozkvete tvorivých síl a mal veľké plány do budúcnosti.

Kto bol vlastne Ivan Korec? Po prvý raz som o ňom počul od prof. Kolibiara, ktorý ho v lete 1960 prijímal na štúdium matematiky na vtedajšiu Prírodovedeckú fakultu UK v Bratislave. Korec získal povesť zázračného dieťaťa a jeho matematický talent vzbudzoval obdiv. Niet divu, veď roku 1960 sa stal víťazom dvoch olympiád: matematickej a fyzikálnej. Navyše sa stal absolútnym víťazom aj prvej medzinárodnej matematickej olympiády v Bukurešti. Čosi takého dovtedy v Československu nebolo a ani sa dodnes v našich krajinách nezopakovalo. Že to nebola náhoda, presvedčili sme sa postupne počas jeho štúdia. Nestretol som doteraz takého pohotového a systematického mysliteľa, akým bol Ivan. Je darmo, druhý Korec sa na Slovensku tak skoro nenarodí.

Korcov životopis bol jednoduchý. Narodil sa 1. septembra 1943 v Chynoranoch (Slovensko), tam chodil aj do školy a r. 1960 zmaturoval v Partizánskom. Nasledovalo štúdium na PFUK v Bratislave. Po ukončení r. 1965 začal pracovať na Katedre algebry a teórie čísel PFUK (od r. 1980 po reorganizácii MFF UK), kde zostal až do roku 1987. Vtedy prešiel na Matematický ústav SAV v Bratislave. Tam pracoval až do konca života. Míľnikmi v jeho profesionálnom živote boli roky 1967, 1972, 1980, 1988 a 1993, kedy postupne získal tituly RNDr., CSc., docent (riadnou habilitáciou), DrSc. a nakoniec titul profesora pre algebru a teóriu čísel.

Okrem pedagogických povinností, ktoré spočívali vo vedení cvičení, prednášok a seminárov, hlavne z algebry a matematickej logiky, vyprodukoval prof. Korec vyše 74 vedeckých prác, aspoň 9 učebných textov a skrípt a aspoň 36 článkov odborného charakteru — tak ako sme to stihli po jeho smrti spočítať. Jeho vedecké práce sa týkali algebry, teórie čísel, matematickej logiky a computer science. Spočiatku riešil problémy z rozličných oblastí matematiky, ktoré mu donášali kolegovia, aby vyskúšali jeho riešiteľské schopnosti. Neskoršie sa systematicky zaoberal teóriou Pascalových trojuholníkov, ktorú pozdvihol na medzinárodnú úroveň. Typickým rysom jeho práce bola dokonalosť: nepublikoval skôr, pokiaľ nevyriešil všetky mysliteľné otvorené otázky.

Nemienim sa bližšie zaoberať vedeckou tvorivosťou prof. Korca, čo si určite zasluhuje zvláštny článok. Namiesto toho by som rád