Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

František Kuřina

Transformační pojetí školské geometrie a konstrukční přístupy k vyučování matematice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 44 (1999), No. 1, 75--83

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/140983

vyučování

TRANSFORMAČNÍ POJETÍ ŠKOLSKÉ GEOMETRIE A KONSTRUKČNÍ PŘÍSTUPY K VYUČOVÁNÍ MATEMATICE

František Kuřina, Hradec Králové

Motto: *„Přímka neexistuje, protože prostor je zakřiven. A bod taky neexistuje, protože i nejmenší částečku lze dělit.“*

V. K., student matematiky a fyziky

Citovaný názor studenta učitelství, který absolvoval zkoušku z matematické analýzy a algebry a začíná studovat geometrii, dokumentuje charakteristický rys matematiky. Matematika vzniká jako duševní konstrukce ve vědomí toho, kdo ji studuje. Základní otázkou matematického vzdělávání je podle mého názoru otázka, jak účinně tuto konstrukci rozvíjet.

Vnější svět, který se skládá z přírody, společnosti a objektivní vědy popsané v monografiích a učebnicích, může působit na studenta v mnoha směrech. Klasický způsob vzdělávání formou přednášek však dává příliš příležitostí k formálnímu zvládnutí učiva, bez hlubšího porozumění a dovednosti učivo aplikovat. Samozřejmě v každém vzdělávacím procesu je významná osobnost toho, kdo se učí, a cíle, které sleduje. Pro studenta se zájmem o matematiku je každá definice výzvou, proč je pojem právě takovýmto způsobem zaveden, každá věta je vyjasněním souvislostí, které chce poznat, a každý důkaz nejen odpovědí na otázku, proč věta platí, ale i jejím zařazením do systému. Studium matematiky je pro něho příležitostí k vytváření ucelené soustavy poznatků o určité struktuře. Matematický text, který vysvětluje příslušné pojmy, tedy odpovídá na otázky typu „co“, provokuje takového studenta k otázkám „jak“ je pojem konstruován a „proč“ uvedené souvislosti platí, podněcuje jeho aktivitu, jejímž prostřednictvím dochází k porozumění matematice a její myšlenkové rekonstrukci. Pro mnohé studenty je ovšem matematický text ve tvaru definic, vět a důkazů částí hotové matematiky, kterou se má „naučit“, tedy zvládnout hlavně reprodukčně. Zdá se, že pro uvědomělé osvojení matematiky mnoha studenty je výhodnější připravit pro ně systém úloh, otázek a problémů, které mají samostatně řešit, a tak pro sebe postupně matematiku vytvářet. Takovému přístupu budeme říkat konstruktivní vyučování matematice.

V pozadí našich úvah stojí otázka, zda konstruktivní přístupy k vyučování matematice mohou pomoci k uplatnění transformačního pojetí geometrie.

Euklidovy Základy

Právě před sto lety vyšly dvě pozoruhodné knihy inspirované klasickým dílem řecké matematiky, Euklidovými *Základy* [1]. Jde o geometrické monografie německého matematika D. Hilberta [2] a italského matematika M. Pieriho [3].

Prof. RNDr. František Kuřina, CSc. (1932), Vysoká škola pedagogická, Víta Nejedlého 573, 500 03 Hradec Králové.

Citované knihy se od sebe mimo jiné liší přístupem k otázkám zavedení shodnosti. Zatímco Hilbert charakterizuje shodnost staticky (shodnost útvarů, např. trojúhelníků, zavádí pomocí axiomaticky zavedených pojmů shodnost úseček a úhlů), zavádí Pieri shodnost pomocí pohybu, dynamicky, jako proces.

Všeobecně se soudí, že statické pojetí geometrie, charakteristické pro Hilbertovy *Základy*, pramení ze *Základů* Euklidových. Podle mého názoru je takový názor mylný. Pokusme se to doložit na několika příkladech. Přitom nám nejde o výklad historický. Na Euklidovy *Základy* se budeme dívat dnešníma očima.

Všimněme si nejdříve Euklidových postulátů, které zde budu citovat podle knihy [4].

(1) *Dvěma body lze vždy vést jedinou přímku.*

(2) *Úsečku lze neomezeně prodloužit.*

(3) *Z libovolného středu lze libovolným poloměrem sestrojit kružnici.*

Tyto postuláty mají zcela jasný konstruktivní charakter, který je vyjádřen slovy *vést*, *prodloužit*, *sestrojit*. Přímka je něco, co vzniká, právě tak jako kružnice — a to pohybem bodu.

Další postulát

(4) *Všechny pravé úhly jsou shodné.* ([4], str. 15)

(4′) *A že všecky pravé úhly sobě rovny jsou* ([1], str. 2)

má rovněž dynamický charakter, neboť shodnost je v duchu axiomu 7 (v českém překladu [1] uvedeném jako zásada 7)

(5) *A co se navzájem kryje, navzájem rovno je*

chápána tak, že shodné útvary můžeme přemístit do takové polohy, že se ve všech částech kryjí. To není zcela jasně patrno z citovaných úvah, vyplývá to však zřetelně z důkazů vět, v nichž se mluví o shodnosti. Např. podstatnou složkou důkazu věty *sus* o shodnosti trojúhelníků ([1] str. 4, věta IV) je představa uvedená slovy *„přikládáme-li $\triangle ABC$ na $\triangle DEF$ a klademe-li bod A na bod D a přímku AB na DE, tak bod B bude krýti E . . . “* Přitom žádné další vlastnosti shodnosti ve smyslu krytí, kromě představy uvedené v zásadě (5), formulovány v *Základech* nejsou. Je tedy zřejmé, že takovéto úvahy nemohou sloužit exaktnímu dokazování, jsou však dostačujícím podnětem pro provádění příslušných konstrukcí. V postulátech jsou tedy formulovány výsledky prováděných činností, a to i takových, které nelze ověřit, jak je tomu např. v postulátu (2) nebo v následujícím slavném *pátém Euklidově postulátu*:

Dvě přímky v rovině, které protínají jinou přímku této roviny a tvoří s ní po jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých, se vždy protínají, a to po té straně přímky, kde je součet menší.

Z citovaných ukázek vyplývá, že Euklides neuměl vyjádřit přesně ideu shodnosti bez použití pohybu, jak na to konečně poukazuje i M. Hejný v knize [5], str. 34.

Definice Euklidových *Základů* (výměry [1], str. 1) nemohou přirozeně být podkladem deduktivních úvah. Už proto ne, že se v nich hojně užívá nedefinovaných a relativně složitých pojmů. To můžeme doložit následujícími příklady.

(6) *Bod jest to, co nemá dílu.*

(7) *Čára pak délka bez šířky.*

(8) *Přímá jest čára (přímka), která svými body táhne se rovně.*

(9) *Rovinný pak úhel je vzájemný sklon dvou čar, v rovině se stýkajících a neležících k sobě v přímce.*

Zdá se, že tyto formulace vyjadřují jakési intuitivní zkušenosti z práce s pojmy tak, že umožňují jejich pochopení prostřednictvím manuální, konstrukční, geometrické či jiné práce s nimi. Zkušenosti tak usnadňují učinit si správné představy o pojmech, a tak přispět k jejich zařazení do systému.

Doložme to alespoň jedním příkladem.

V roce 1838 vyšla v prvním vydání učebnice učitele reálky v Giessen, v níž autor dochází k těmto formulacím ([6], str. 1, 8):

(10) *Pohybuje-li se bod stále ve stejném směru, opisuje přímku.*

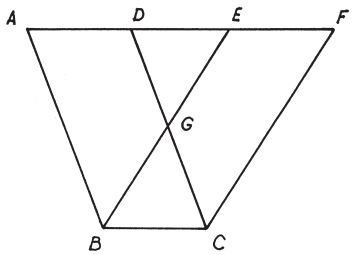
(11) *Velikost otočení, které potřebujeme, aby polopřímka AB přešla do polopřímky AC, se nazývá úhel.*

Vzhledem k tomu, že autor této učebnice nemohl znát pohybové pojetí geometrie v duchu Pieriho knihy, která vznikla o 60 let později, ani práce F. Kleina [7], znal však patrně v nějakém zpracování dílo Euklidovo, je to doklad, že *Základy* jsou publikací, která může vést i ke konstrukci geometrie v transformačním pojetí. Euklidovy *Základy* lze podle mého názoru považovat za podnětné dílo ilustrující i konstruktivní přístupy k vyučování matematice. Nejen že je v nich věnována systematická péče geometrickým konstrukcím, ale směs intuice, logického uvažování, slovních formulací a obrázků umožňuje, aby každý, kdo se ponoří do jejich studia, si pro sebe zkonstruoval bohatý svět matematiky. Na základě dlouholeté pedagogické praxe jsem přesvědčen, že dobré ovládnutí určité části matematiky normálním studentem není jen záležitostí jeho seznámení s její logickou strukturou, ale že je k tomu nutná všestranná zkušenost s příslušnou oblastí zahrnující intuitivní pochopení, poznání souvislostí, zejména aplikačních, a v neposlední míře i logické uspořádání učiva.

Transformační pojetí geometrie

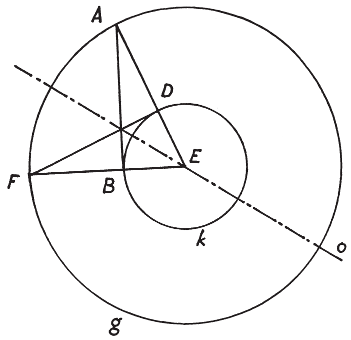
Transformačním pojetím geometrie rozumíme takovou její konstrukci, při níž hrají významnou roli — jako prostředek pojmové výstavby a podklad metod dokazování — geometrická zobrazení. V duchu *Kleinova programu* jde na úrovni naší základní a střední školy o vlastnosti spjaté s grupou shodností a s grupou podobností. V axiomatické výstavbě takto pojaté geometrie bývá primitivním pojmem pohyb nebo některý jeho druh, např. osová souměrnost. V úvodním studiu geometrie na základní škole znamená transformační pojetí geometrie posílení rýsování. Je to zcela v duchu Euklidových *Základů*, v nichž byly — ačkoliv se o nich výslovně nemluvilo — pravítko a kružítko jakýmisi *nástroji tvorby přímky a kružnice.* Úsečka je přímá čára rýsovaná podle pravítka, přímku rovnoběžnou s danou přímkou rýsujeme posunutím pravítka, kružnice vznikne jako dráha bodu v kruhovém pohybu modelovaném kružítkem, úhel si můžeme představit otáčením polopřímky kolem jejího počátku atp. Řadu podnětů k pohybovému pojetí geometrie můžeme najít již v *Základech*, i když slovní formulace důkazů jsou opřeny o staticky pojímané věty o shodnosti trojúhelníků. Doložme to dvěma příklady.

Důkaz věty *Dva rovnoběžníky, které mají shodné základny a shodné výšky, mají sobě rovné obsahy* ilustruje obr. 1, který zde reprodukujeme podle první knihy *Základů* ([1], str. 19). Tvrzení naší věty je zřejmé, neboť trojúhelník DFC je obrazem trojúhelníku AEB v posunutí, které převádí bod B do bodu C.



Obr. 1

Konstrukci tečny z bodu A ke kružnici k doprovází obr. 2 ([1], str. 44). Ten přirozeně může vnuknout myšlenku, že v osové souměrnosti podle osy úhlu BEA, kde BA je hledaná tečna, přejde trojúhelník BAE do trojúhelníku DFE, který ovšem můžeme sestrojit, neboť DF je v označení podle obr. 2 přímka kolmá k přímce AE a bod F náleží kružnici g se středem v bodě E a poloměrem AE. Odtud je konstrukce patrná. S touto konstrukcí tečny z bodu ke kružnici se můžeme setkat např. ve Vyšínově knize [19]. Je to konstrukce v jistém smyslu jednodušší než tradiční konstrukce našich učebnic, která je založena na větě o Thaletově kružnici.



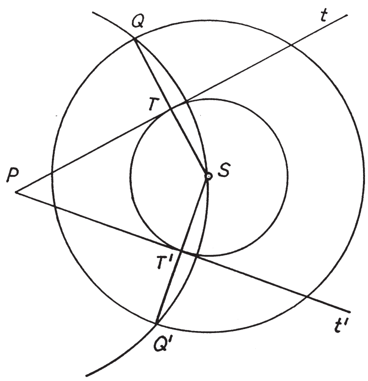
Obr. 2

Četba Euklidových *Základů* je poměrně náročná, protože se zde obvykle formuluje postup konstrukce a její důkaz, není však uváděna úvaha, jak se ke konstrukci došlo. Didaktická otázka tzv. rozboru úlohy se v *Základech* neřeší. Charakter práce v geometrii, který odpovídá podle mého názoru konstruktivním přístupům k vyučování, popisuje v práci [8] E. Čech takto (str. 44): *„Místo základních nedefinovaných pojmů nastoupí ve škole názorné představy a jim odpovídající názvy, místo postulovaných relací nastoupí poznatky, které žák nabude rýsováním obrazů, měřením, pozorováním, odpovídáním na otázky a pod.“*

Všimněme si nyní otázky transformačního pojetí geometrie v učivu střední školy. Jednou z nejpozoruhodnějších knih v tomto směru je učebnice A. Z. Krygowské [9], psaná pro polská lycea. Kniha je produktem tehdejšího přesvědčení o nutnosti deduktivní výstavby geometrie ve středoškolském vzdělávání a o množinovém pojetí matematiky. Ačkoliv je podle mého názoru i dnes zajímavá a byla přeložena do několika jazyků, bylo její působení v praxi školy relativně krátké a zdá se, že ani v Polsku nezanechalo toto dílo hlubší stopy. I učebnice mají své osudy a rozhodujícími bývají obvykle jiné vlivy než objektivní zhodnocení kvality díla. Krygowská zakládá geometrii na souboru devíti základních vlastností, které jsou vlastně didakticky koncipované „silné“ axiomy. Od začátku učebnice se studuje pojem zobrazení a transformace, axiomaticky se zavádí číslo jako velikost úsečky, uspořádání bodů v přímce, studují se i topologické vlastnosti roviny (*Jordanova věta* a dělení roviny na části přímkou). Shodná zobrazení jsou uvedena axiomem IX ([9], str. 101): *Libovolné dva různé body roviny jsou samodružnými body jisté její neidentické shodné transformace.* Tato nepřímá definice osové souměrnosti je základem podrobného studia grupy shodností roviny, včetně vět o rozkladu libovolné shodnosti na osové souměrnosti a aplikací shodnosti na geometrii i jiné oblasti (např. ornament).

Českou školu po druhé světové válce bychom mohli považovat za permanentní didaktickou laboratoř — kdyby ovšem někdo neustále prováděné pokusy hodnotil a řídil. Připomeňme zde z každého desetiletí namátkově vybranou učebnici, která se týká geometrických transformací. První dvě učebnice [10] a [11] jsou koncipovány v transformačním pojetí.

V Holubářově učebnici jsou úvodní kapitoly uspořádány takto: *Osová souměrnost*, *Posouvání*, *Otáčení*, *Shodnost útvarů*. Věty o skládání osových souměrností uváděny nejsou, shodná zobrazení jsou však podle možnosti vhodně využívána. Např. úloha o tečně z bodu ke kružnici, kterou jsme zde již připomněli, je řešena pomocí množiny bodů souměrně sdružených ke středu kružnice podle všech jejích tečen ([10], str. 15, obr. 3). V podobném duchu jako shodnosti jsou studovány i podobnosti.



Obr. 3

Čechova učebnice [11] znamená obrat v přístupu autora k elementární geometrii. Sám o tom píše ([12], str. 3): „*Vcelku jsem podstatně ustoupil od svého někdejšího odporu proti transformačnímu stanovisku… Domnívám se, že stanovisko vycházející od transformací je pro budoucnost možná to pravé. Je však stále ještě metodicky nepropracované a se skutečným jeho zaváděním na školu není proto možná radno příliš spěchat.*“ Základní vlastnost shodnosti je v učebnici [11] uvedena takto (str. 146): „*Jsou-li A, B dva různé body rovinného útvaru U a máme-li sestrojit jeho shodný obraz U', můžeme polohu obrazů A', B' zvolit libovolně, až na to, že musí býti $|AB| = |A'B'|$. Je-li provedena volba obrazů A', B', zbývá právě dvojí možnost pro polohu útvaru U'; shodnost je při jedné možnosti přímá, při druhé nepřímá.*“ Další výklad má deduktivní charakter a dochází ke konstrukci translace a rotace jako zobrazení složených ze dvou osových souměrností.

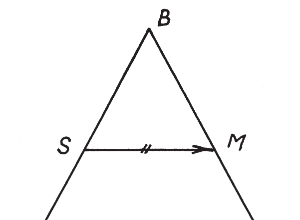
Čechovy učebnice byly poměrně brzy nahrazeny učebnicemi novými. Obvykle se uvádí, že byly obtížné pro svou deduktivní výstavbu. Ačkoliv s nimi nemám přímé pedagogické zkušenosti, domnívám se, že situace je složitější. Necelých 20 stránek textu obsahuje 33 náročných úloh, bez jejichž řešení nemůže být studium úspěšné. Úlohy mají konstrukční charakter: *načrtněte*, *narýsujte*, *sestrojte*, *proveďte*, *vyšetřete podmínky*, *dokažte*, … Podle mého názoru nebylo možné ani při tehdejší dotaci hodin matematiky učivo v celém rozsahu a hloubce probrat.

Učebnice [13] je podstatně méně náročná než učebnice Čechovy, zobrazení jsou probírána spíše ilustrativně. Dostatečná pozornost se věnuje konstrukčním úlohám, skládání osových souměrností se nestuduje. Učebnice [14], [15] a [16] představují v naší historii nejhlubší ilustrace role souměrností v grupě shodností roviny a jsou v tomto smyslu nejmodernější.

Podle mého názoru však v žádné z našich učebnic se nestala geometrická zobrazení dosti účinným nástrojem ke studiu geometrických vlastností roviny (resp. prostoru). Jsou pouze jedním tématem školské geometrie. Je otázka, zda je to zákonité, nebo zda se v budoucnu transformační pojetí geometrie skutečně prosadí. Tento didaktický problém není dosud vyřešen a kladu si otázku, zda ho lze vyřešit v souvislosti s konstruktivními přístupy k vyučování matematice.

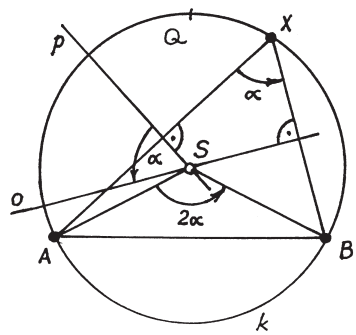
Několik příkladů

V tomto odstavci bych chtěl na několika příkladech ukázat souvislost transformačního pojetí geometrie s řešením některých didaktických otázek. Podle mého názoru je pro vyučování (ale obecně asi pro veškerou lidskou činnost) základní otázka *smyslu*. Jestliže zařadíme do výuky téma, jehož výsledky nikde nepoužijeme, jestliže toto téma nepřispívá ani k hlubšímu pochopení širších souvislostí, ani k rozvíjení duševních schopností studenta, je patrně ve výuce zbytečné a zabírá čas, který lze využít plodněji. V tomto smyslu vyznívají dosti naplano



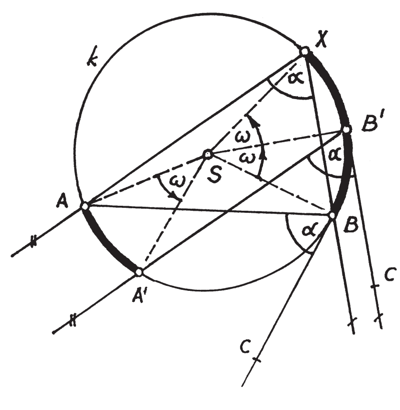
Obr. 4

v našich posledních třech citovaných učebnicích [14], [15] a [16] věty o skládání souměrností. Jejich využití je přitom dobře možné, jak ukážeme na příkladech. Máme-li k dispozici větu, že složením dvou středových souměrností je posunutí, můžeme ji využít k odvození vlastností střední příčky trojúhelníku. Naopak: je-li již odvozena vlastnost střední příčky trojúhelníku, můžeme pomocí ní dokázat, že výsledkem skládání dvou středových souměrností se středy S, M je posunutí $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{SM}$ (obr. 4). Z věty o skládání osových souměrností s různoběžnými osami vyplývá bezprostředně věta o obvodovém a středovém úhlu podle obr. 5. Je-li totiž AXB obvodový úhel, který na



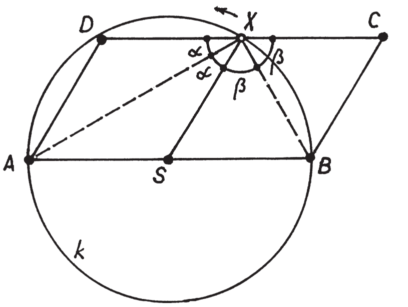
Obr. 5

kružnici k odpovídá kružnicovému oblouku AB, můžeme bod B považovat za obraz bodu A v osových souměrnostech s osami p, o (osy úseček AX, BX). Protože složením těchto osových souměrností je rotace se středem S o úhlu 2α, je

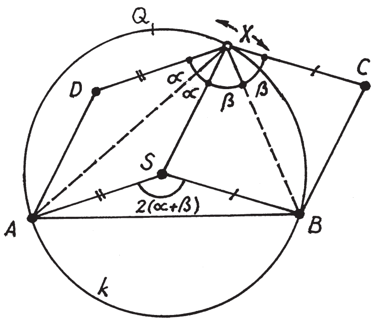


Obr. 6

tím dokázáno, že středový úhel příslušný kružnicovému oblouku AB má velikost 2α. Ukažme dále, že věta o obvodovém a středovém úhlu může být odvozena otočením úsekového úhlu ABC kolem středu S kružnice opsané trojúhelníku ABX do polohy $A'B'C'$, kde B' je střed kružnicového oblouku XB (obr. 6). Protože kružnicové oblouky AA', XB', BB' jsou shodné, jsou shodné i úhly AXB, $A'B'C'$, ABC. Je-li AB průměr kružnice k, můžeme pohyb bodu X po kružnici k mo-



Obr. 7



Obr. 8

delovat pomocí dvou kloubových kosočtverců $SBCX$ a $ASXD$ (obr. 7). Protože je v každé poloze bodu X úhel DXC přímý, je úhel AXB pravý. Tím jsme naznačili podstatnou část důkazu věty o *Thaletově kružnici*. Je-li AB tětiva kružnice k, která není průměrem, je tvrzení o obvodovém a středovém úhlu zřejmé z obr. 8, neboť úhlopříčky AX, BX kosočtverců $ASXD$, $BSXC$ půlí jejich vnitřní úhly u vrcholu X. Těmito příklady jsme chtěli ilustrovat možnosti využití geometrických zobrazení ve školní praxi.

Didaktický konstruktivismus

Na základě ne zcela uspokojivých výsledků vyučování matematice, experimentální práce s žáky i učiteli a studia literatury jsme v článku [17] formulovali hlavní zásady didaktického konstruktivismu, o němž zde budeme jen stručně informovat.

1. Matematika není jen souborem definic, vět a důkazů, je lidskou činností specifického typu.

2. Podstatnou složkou této činnosti je řešení úloh, tvorba a rozvíjení pojmů, formulace výsledků a zobecňování tvrzení a jejich dokazování. Popsaný proces může probíhat v matematice nebo v libovolné jiné oblasti lidského poznání. Tvorba matematických modelů reality je pak jeho součástí.

3. Poznatky, a to nejen poznatky matematické, jsou nepřenosné. Přenosné (formou knih, časopisů, přednášek a různých médií) jsou pouze informace. Poznatky vznikají v mysli poznávajícího člověka. Jsou to individuální konstrukty.

4. Vytváření poznatků (např. v oblasti pojmů, postupů, představ, domněnek, tvrzení, zdůvodnění, ...) se opírá o informace, je však podmíněno zkušenostmi poznávajícího. Zkušenosti si přináší žák zčásti z kontaktu s okolní realitou, měl by však mít dostatek příležitostí nabývat zkušenosti ve škole (experimentování, řešení úloh, ...).

5. Základem matematického vzdělávání konstruktivistického typu je vytváření

prostředí podněcujícího tvořivost. Toto prostředí vytvářejí tři faktory: učitel, který je nejdůležitějším činitelem, různorodost podnětového pole matematiky a sociální klima třídy.

6. Ačkoliv je konstrukce poznatků proces individuální, přispívá k jeho rozvoji sociální interakce ve třídě (diskuse, srovnávání výsledků, konstrukce příkladů a protipříkladů, pokusy o formulace domněnek a tvrzení, argumentace, hledání důkazů . . .).

7. Charakteristickým rysem konstruktivistického přístupu k vyučování je pěstování nejrůznějších druhů reprezentace a strukturální způsob budování matematického světa. Dílčí zkušenosti a poznatky jsou různě organizovány, tříděny, hierarchizovány, vznikají obecnější a abstraktnější pojmy.

8. Pro konstruktivistické vyučování matematice mají značný význam různé formy komunikace ve třídě a pěstování jazyků matematiky. Jedním z nich je neverbální vyjadřování (tabulky, grafy, obrázky), jiným matematická symbolika.

9. Vzdělávací proces v matematice je nutno hodnotit minimálně ze tří hledisek. První nazveme porozumění matematice, druhé je zvládání matematického řemesla, třetí jsou aplikace matematiky. Pro porozumění matematice má zásadní význam vytváření představ, pojmů a postupů a nalézání souvislostí. Rozvíjení matematického řemesla vyžaduje trénink a případně i pamětné zvládnutí určitých pravidel, algoritmů a definic. Aplikace matematiky nemusí být vyvrcholením vzdělávacího procesu, mohou hrát i roli motivační.

10. Vyučování, které má charakter předávání informací (vyučování transmisivní), nebo vyučování, které dává pouze návody, jak postupovat (vyučování instruktivní), vede pouze k ukládání informací do paměti. To umožňuje v lepším případě jejich reprodukci (např. u zkoušky), obvykle však dochází k rychlému zapomínání a zřídkakdy k jejich netriviálnímu využití a dalšímu rozvíjení.

Existují konstruktivisticky pojaté matematické knihy? Domnívám se, že ano a nejsou výsledkem poněkud módní vlny zájmu o konstruktivisnus v současné době.

Vznikaly např. v práci matematických kroužků pro středoškoláky při Moskevské univerzitě po druhé světové válce. Produkce těchto kroužků je zpracována v řadě publikací Knihovničky matematického kroužku a jednu z nich přeložil E. Čech [18], který v její předmluvě píše:

Tato kniha řeší s velkou obratností úkol seznámit čtenáře, který zná jen tradiční školskou matematiku, se třemi velmi typickými obory moderní matematiky, a to s topologií, theorií čísel a s moderním pojetím počtu pravděpodobnosti. Přitom autoři soustředili veškerou pozornost ne na popis dosažených výsledků, nýbrž na to, aby se čtenáři seznámili se způsobem usuzování, který se v moderní matematice velmi osvědčil a který nevyžaduje vlastně vůbec předběžných znalostí, nýbrž pouze lásky k matematice.

A tak se dostáváme oklikou k důležité otázce matematického vzdělávání. Vzdělávání jako tvořivý proces nemůže probíhat bez zaujetí studentů, bez jejich aktivity, zájmu a lásky k předmětu.

Proto je realizace konstruktivních přístupů k vyučování matematice tak obtížná. Je to však výzva naší didaktice, která by neměla zůstat bez odezvy. V souvislosti s vyučováním geometrie jde pak o otázku, zda konstruktivní přístupy k vyučování nepomohou k realizaci jejího transformačního pojetí.

Děkuji prof. M. Hejnému za připomínky k první verzi článku.

Tato studie byla zčásti vypracována v rámci úkolů grantu GA ČR 406196/1186.

L i t e r a t u r a

[1] Eukleidovy *Základy.* JČMF, Praha 1907.

[2] Hilbert, D.: *Grundlagen der Geometrie.* Göttingen 1899.

[3] Pieri, M.: *Della geometria elementare come sistema impotetico deductivo.* Torino 1899.

[4] Pavlíček, J. B.: *Základy neeuklidovské geometrie Lobačevského.* Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1953.

[5] Hejný, M.: *Teória vyučovania matematiky 2.* SPN, Bratislava 1989.

[6] Müller, J.: *Elemente der ebenen Geometrie und Stereometrie.* Braunschweig 1869.

[7] Klein, F.: *Das Erlanger Programm.* Leipzig 1974.

[8] Čech, E.: *Jak vyučovati geometrii v primě?* Časopis pro pěstování matematiky a fyziky *70* (1941).

[9] Krygowska, Z., Maroszkowa, J.: *Geometria.* Warszawa 1975.

[10] Holubář, J., Vojtěch, J.: *Geometrie pro V. třídu středních škol.* JČMF, Praha 1947.

[11] Čech, E. a kol.: *Matematika pro 1. třídu gymnasií.* SNU, Praha 1951.

[12] Čech, E.: *Počáteční stadium vyučování geometrii.* Rukopis, 1955.

[13] Zedek, M. a kol.: *Matematika pro I. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol.* SPN, Praha 1964.

[14] Hejný, M., Hanula, M., Dekrét, A.: *Matematika pro gymnázia, 4, 1.* SPN, Praha 1978.

[15] Šedivý, J. a kol.: *Matematika pro 1. ročník gymnázií.* SPN, Praha 1984.

[16] Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia, planimetrie.* Prometheus, Praha 1993.

[17] Hejný, M., Kuřina, F.: *Konstruktivní přístupy k vyučování matematice.* In: Matematika, fyzika, informatika č. 7, 1997–1998.

[18] Dynkin, J. B., Uspenskij, V. A.: *Matematické besedy.* SNTL, Praha 1955.

[19] Vyšín, J.: *Elementární geometrie I.* Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952.

---

jubilea & zprávy

K ŠEDESÁTINÁM PROFESORA JIŘÍHO ANDĚLA

Dlouholetý vedoucí katedry pravděpodobnosti a matematické statistiky MFF UK v Praze, současný proděkan téže fakulty a jedna z nejvýraznějších postav české matematické statistiky prof. RNDr. Jiří Anděl, DrSc., oslavil své šedesátiny. Narodil se dne 7. 3. 1939 v Jenišovicích v okrese Jablonec nad Nisou. Základní školu navštěvoval ve svém rodišti. Vzhledem k zájmu o matematiku se přihlásil ke studiu na MFF UK, kde studoval v letech 1956–1961. Již během studia si ho prof. Janko vybral jako asistenta na katedře statistiky. Vědeckou přípravu na téže katedře absolvoval pod vedením prof. Hájka a řadí se tak ke známým žákům a pokračovatelům v Hájkově díle. Kandidátskou disertační práci *Lokální asymptotická mohutnost testů typu Kolmogorova–Smirnova* obhájil v roce 1965 (výsledky této práce byly v roce 1967 publikovány v prestižních Annals of Mathematical Statistics). Na docenta MFF UK se habilitoval v roce 1977 na základě habilitační práce Mnohorozměrné autoregresní posloupnosti. Od téhož roku byl pověřeným vedoucím a od roku 1981 pak řádným vedoucím katedry pravděpodobnosti