Alexander Ženíšek
Třicet let matematické teorie metody konečných prvků (medailon prof. M. Zlámala)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 44 (1999), No. 1, 37--41

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/140979`

Třicet let matematické teorie metody konečných prvků

(medailon prof. M. Zlámala*))

Alexander Ženíšek, Brno

Před čtyřmi dny a devětadvaceti lety, tj. 17. dubna 1969 odstoupil z funkce prvního tajemníka KSČ Alexander Dubček a tím i formálně skončil poslední záchvěv pražského jara 1968. Většina z vás asi toto datum zapomněla; já si je pamatuji jenom proto, že matematická teorie metody konečných prvků měla v ten den právě jeden rok.

Je ovšem nutné definovat, čím rozumíme první den matematické teorie. Ztotožňuji se s názorem, že je to datum zaslání článku, který vyšel první v rámci této teorie v matematickém časopise. První článek o metodě konečných prvků vyšel v roce 1968 v Numerische Mathematik, měl název *On the finite element method*, autorem byl Miloš Zlámal a pod jeho jménem stálo: Received April 17, 1968.

Pojem metoda konečných prvků potřebuje alespoň minimální výklad: Je to přibližná metoda pro řešení variačních problémů. Variačním problémem přitom rozumíme problém, ve kterém se minimalizuje (resp. maximalizuje) nějaký funkcionál na třídě přípustných funkcí, které se často nazývají stavy. Nejjednodušším a nejpřístupnějším příkladem je princip *minima potenciální energie*, podle kterého se ze všech přípustných stavů realizuje ten, ve kterém je potenciální energie dané soustavy minimální. (Ještě konkrétněji: představte si kuličku, kterou vložíme do misky kulovitého tvaru, a to nikoliv na dno. Kulička v misce chvíli kmitá, až se ustálí na dně misky. Každá z poloh kuličky v misce je přípustná, na dně má však kulička potenciální energii minimální.)

Formulovat nějaký variační problém matematicky potřebuje velké úsilí; velké štěstí je, že existují třídy variačních problémů; v každé třídě se problémy liší pouze geometrickým tvarem oblasti, ve které jsou definovány, a vedlejšími podmínkami (většinou okrajovými a počátečními) a materiálovými konstantami. Máme-li dva variační problémy téže třídy dané na různých oblastech a s různými vedlejšími podmínkami, jde o dva matematicky různé problémy, z nichž každý se musí řešit samostatně. Donedávna (tj. do konce šedesátých let) jediný způsob, jak tyto problémy řešit, byl sestavit tzv. Eulerovu rovnici příslušného problému. Dostali jsme tak okrajový (či počáteční – okrajový) problém (parciální) diferenciální rovnice. Z matematického hlediska sestavení

*) Medailon prof. M. Zlámala byl přednesen 21. dubna 1998 na schůzi Učené společnosti České republiky.

Prof. RNDr. Alexander Ženíšek, DrSc. (1936), je ředitelem Ústavu matematiky Fakulty strojní VUT, Technická 2, 616 69 Brno, e-mail: zenisek@mat.fme.vutbr.cz. Je členem Učené společnosti České republiky.

Tato práce byla podpořena grantem GAČR 201/97/0153.

takového problému znamená vyřešení původního variačního problému, protože byl formulován snazší matematický problém. Z praktického hlediska ovšem bylo nutné pokusit se o řešení tohoto snazšího problému. Drtivou většinu těchto problémů nelze řešit analyticky a z přibližných metod byla k dispozici pouze tzv. *metoda sítí.* Ta se však neumí dobře vypořádat s nepravidelným tvarem oblastí a s okrajovými podmínkami silového typu. Situace byla pro matematiky v polovině šedesátých let dosti tristní: o metodě sítí mohli pilně teoretizovat, dobré výsledky však nedávala. Nedobře na tom byla také variační metoda Ritzova vzhledem ke své nestabilitě. A tu přišel Zlámal se svým článkem a téměř přes noc (přesněji během neceléo roku) se stal světovou jedničkou v Numerical Analysis. Vysvětlím proč.

Vítězslav Nezval napsal ve čtvrtém zpěvu Edisona:

Je to úmysl a trochu náhoda
stát se presidentem svého národa.

Stejně je to úmysl (pokud tím nazýváme ctižádostivou píli) a trochu náhoda stát se světovou jedničkou ve svém oboru. Miloš Zlámal díky jednomu svému kladnému povahovému rysu této náhodě dosti pomohl. Tím jeho pozitivem byla ochota naslouchat každému inženýrovi a snažit se mu pomoci, pokud žádal o pomoc. A protože jako ředitel výpočetního centra VUT v Brně se často setkával s inženýry, kteří tam počítali na tehdy moderním počítači DATASAAB D21, zajímal se také o jejich práci. V roce 1967 tam často počítali inženýři Kratochvíl a Leitner. Protože Zlámal skoro o ně zakopával, jednoho dne mu to nedalo a zeptal se, co pořád pilně počítají. A k svému velkému překvapení se dozvěděl jemu neznámý výraz: *metoda konečných prvků.* Počítali touto metodou statický výpočet jedné přehrady. Ing. Jiří Kratochvíl, nyní už dlouhá léta profesor a DrSc., byl totiž duše zvídavá a vypěstoval si už před mnoha lety zvyk sledovat všechnu dostupnou časopiseckou inženýrskou literaturu, která jen trochu souvisela s jeho oborem. A tak ačkoliv byl vodař, alespoň okrajově, ale pravidelně sledoval americké letecké žurnály (na VAAZ byly k dispozici), a tak jednou na počátku roku 1965 ho v časopisu AIAA zaujaly konstrukce trupů letadel sestavené z trojúhelníčků a malůvky různých trojúhelníkových prvků. Dočetl se tam o *finite element method*, což si pro sebe přeložil jako *metoda konečných prvků.* (Přirozenější překlad metoda konečného prvku, který byl později propagován, se neujal.) Začal studovat články podrobněji a po důkladnějším zvážení se rozhodl pokusit se o samostatnou praktickou aplikaci: dal si za úkol vytvořit v praxi aplikovatelný program pro statické výpočty přehrad. Úkol nelehký: nejenže se musel doučit mnohé z programování, ale musel také rozřešit to nejtěžší, totiž sestavit algoritmus vytvoření celkové matice tuhosti a vektoru pravé strany z elementárních matic a vektorů. To v článcích totiž nebylo. Jak řešit velkou soustavu lineárních rovnic co nejrychleji, dal za úkol svému partnerovi ing. Leitnerovi, který byl mým bridžovým partnerem. Ten mě také seznámil v březnu 1967 s ing. Kratochvílem, protože prý potřebují matematika. V říjnu 1967 mi ing. Kratochvíl dal fotografickou kopii článku Pin Tonga a Piana z časopisu Solids and Structures o konvergenci metody konečných prvků. Tím, že jsem ten článek „přeložil“ do matematiky, něco přidal a přizpůsobil pasáže ze slavné Michlinovy knihy *Problema minimuma kvadratičnogo funkcionala*, jsem napsal obhajovatelnou kandidátskou práci, kterou jsem v hrubém rukopise dokončil 5. března 1968. Takový byl stav, když v listopadu 1967 dal ing. Kratochvíl svou první informaci o MKP prof. Zlámalovi. Popsal mu v ní princip metody a na co ji konkrétně aplikují. Zlámalova první reakce byla: „No, myslím, že metoda sítí je lepší.“

Zlámal však v inženýrském přístupu rozpoznal polozapomenutou Courantovu myšlenku z roku 1943, která zapadla proto, že tehdy nebyly počítače, na kterých by se dala realizovat. Proto mu to nedalo, vyhledal Kratochvíla a nechal si od něj podrobněji o MKP poreferovat. Dozvěděl se tak mimo jiné o do té doby známých interpolačních polynomech 2. a 3. stupně na trojúhelníku, které dodnes inženýři nazývají Veubeckův element a Holandův element podle jejich prvních uživatelů. A protože zrovna neměl na čem pracovat, dal si za cíl dokázat konvergenci metody konečných prvků při použití Veubeckova elementu. Práce se mu tak dařila, že dokázal konvergenci i pro Holandův element a navíc zkonstruoval trojúhelníkový C^1-prvek, tj. polynom jednoznačně určený takovými parametry, že globální funkce, která je pomocí něj na triangulaci zkonstruovaná, je spojitá i s oběma svými prvními parciálními derivacemi v celé ztriangulované oblasti s polygonální hranicí. To už byl velký výsledek, a když po vtipném triku dokázal také příslušný interpolační teorém, byl článek hotov.

V květnu 1968 sice v Numer. Math. vyšel článek amerických autorů Birkhoffa, Schultze a Vargy na podobné téma — pojednával o konvergenci Galerkinovy-Ritzovy metody při použití Ahlinových polynomů z roku 1964, což jsou vlastně obdélníkové C^m-prvky. Vzhledem k malé použitelnosti obdélníkových prvků byl Zlámalův výsledek obecnější, navíc originálnější, měl ve svém názvu MKP a poukazoval na současné inženýrské trendy. Zlámal je tedy první matematik, který ve své práci užil výraz metoda konečných prvků. Svým článkem Zlámal poukázal na jednu oblast matematiky velmi málo zmapovanou — její mapa měla velký nápis HIC SUNT LEONES.

Zajímavé je, že v roce 1968 publikovali čtyři různí inženýři stejný trojúhelníkový C^1-prvek — ovšem bez příslušného interpolačního teorému, pouze s poukazem na možnosti při řešení tenkých desek. V tom roce začalo být v MKP horko, výsledky stíhaly výsledky a do práce se začali v důsledku Zlámalovy práce zapojovat i matematici. V Brně jsme však díky ing. Kratochvílovi měli náskok.

I když byl ve své podstatě Zlámal vždy vlk-samotář, v té době jsme si to ani neuvědomovali. Ing. Kratochvíl se u něj pravidelně při svých návštěvách v LPS stavoval, Zlámal se neměl kromě mne s nikým o MKP možnost bavit, a tak jsme dosti často spolu všichni tři družně sedávali ve Zlámalově pracovně. Tento kolektiv se na jaře 1968 rozrostl o dalšího člena — programátora ing. Holušu, budoucí programátorskou jedničku přes MKP v Československu. Zlámal totiž chtěl svoje výsledky ověřit v početní praxi a pověřil proto Holušu, aby mu jeho algoritmus pro výpočet tenké desky při použití jeho trojúhelníkového C^1-prvku naprogramoval.

Kratochvílovy programy obsahovaly jako konečněprvkovou násadu funkce, které byly po trojúhelnících polynomy prvního stupně, takže Holušova úloha nebyla lehká: musel Kratochvílovy programátorské postupy zobecnit pro polynom pátého stupně, kde kromě derivací prvního a druhého řádu vystupovaly také derivace podle normály. Holuša vždy říkal, že programovat konečné prvky je snadná věc (ale v závorce dodával, že hledat chyby při ladění je velmi obtížné). A ladění při tak komplikovaném programu bylo k zoufání, protože výsledky testovacích příkladů byly takové neslané nemastné — zkrátka nepřesvědčivé vzhledem k teoreticky předpovězené přesnosti. Zlámal se ptal Kratochvíla: „A počítal tou metodou vůbec někdo něco?“ Kratochvíl se jen smál a říkal Zlámalovi, aby byl trpělivý. V polovině července 1968 našel Holuša po několikanásobné kontrole chybu v jednom indexu a testovací příklady najednou vyšly s přesností na osm platných číslic — čili naprosto přesvědčivě potvrzená teorie. Zlámal týden nato odjel na konferenci do Edinburku a tam požádal předsedajícího, aby směl hovořit o něčem naprosto jiném, než na začátku roku oznámil. To byl první mezinárodní referát o metodě konečných prvků.

Po vstupu vojsk jsme se ještě více zakousli do práce. Zlámal psal současně dva články; jeden o algoritmizaci MKP, druhý o redukci parametrů — oba vyšly krátce po sobě v Numer. Math. a spolu s prvním článkem z roku 1968 mu vynesly pozvání do USA a Francie celkem na tři měsíce za velmi výhodných finančních podmínek. Odjel začátkem roku 1970. Já v říjnu 1968 začal budovat hierarchii interpolačních polynomů na trojúhelníku — byla to cesta dlouhým tmavým tunelem a směšné na celé věci je, že z matematiky jsem na to nepotřeboval nic, nepočítám-li vědomost, že součet přirozených čísel od jedné do n je roven $\frac{1}{2}n(n+1)$. V hlavě se mi rozsvítilo někdy na začátku roku 1969 při večerních zprávách tu sobotu, kdy dávali druhé pokračování Randalla a Hopkirka. Článek, který mi udělal jméno, jsem pak sepsal během měsíce. Stačilo dokázat ještě jedno duchaplnější lemma a zobecnit trochu Zlámalovo důkazové schéma z jeho prvního článku o MKP. Zlámal tento můj výsledek odvezl na podzim 1969 do USA a spolu s Bramblem jej oděli do lepšího hávu, tj. příslušné interpolační teorémy dokázali v sobolevovských normách. Mezitím stačil Zlámal ještě pracovat na algoritmech pro pružnostní výpočty metodou konečných prvků a spolupracovat na několika drobnějších článcích.

V druhé polovině roku 1970 začal Zlámal pracovat na své koncepci zakřivených trojúhelníkových prvků. První část tohoto díla mu vyšla v roce 1973 v SIAM J. Numer. Anal. Je to práce typicky zlámalovská: stručná, přesná, srozumitelná. Zatímco první část pojednávala o ideálních zakřivených trojúhelníkových prvcích, jejichž křivá strana je totožná s částí hranice, druhá část, ještě hutnější a přitom rozsáhlejší, pojednávala o reálných křivých trojúhelnících a numerické integraci na nich. Při psaní této práce udělal Zlámal jen jednu chybu: referoval o dosažených výsledcích v průběhu práce při jedné ze svých zahraničních cest. Prof. Raviart z Paříže mi v roce 1975 řekl: „Věděli jsme, že ještě nějakou dobu potrvá, než Zlámal článek pošle do tisku. Museli jsme jej předehnat. Dělali jsme na tom s Ciarletem téměř dnem i nocí a práci o křivých izoparametrických prvcích a numerické integraci na nich jsme uveřejnili v Azizově knize o matematických základech metody konečných prvků, která vyšla v rok konání konference (tj. 1972).“ Tak vlastně ztratil Zlámal pozici světové jedničky v Numerical Analysis. Nic nemění na tom skutečnost, že Raviart mi v témže hovoru přiznal, že se metodu konečných prvků učil z prvních Zlámalových prací.

Uvedenými dvěma pracemi skončilo Zlámalovo stacionární (či eliptické) období. Od roku 1973 začal pracovat na evolučních problémech, které řešil kombinací metody konečných prvků a diferenční metody. Zprvu to byla lineární rovnice pro vedení tepla, kde se zejména věnoval vícekrokovým metodám; od roku 1975 začal analyzovat různé nelineární typy. V období 1975–78 navíc zásadním způsobem přispěl k teoretickým otázkám superkonvergence MKP. V období 1981–88 se věnoval jednak řešení kvazistacionárního magnetického pole v nestejnorodém prostředí a jednak metodě konečných prvků aplikované na rovnice polovodičů. Pozoruhodné je, že kromě zásadních matematických výsledků publikovaných v renomovaných amerických časopisech se vždy zúčastnil na přípravě algoritmu a podstatně tak přispěl k praktické realizaci řešení problému pomocí průmyslového programu.

Prof. Zlámal nenapsal žádnou knihu — byl příliš soustředěn na hledání řešení praktických problémů. Nevydržel u žádné problematiky přitom tak dlouho, aby ji zcela vyčerpal. Obrazně řečeno: jeho brázda byla široká, ale ne tak hluboká, aby tam žádné brambory nezůstaly. A při pečlivém zkoumání člověk zjistil, že jich tam zůstalo požehnaně. Je to moje dobrá zkušenost.

Je zajímavé, že se nikdy nezajímal o svoje ohlasy v časopisech — citace ho zkrátka nezajímaly a nikdy žádný Citation Index neotevřel. Citací měl přitom požehnaně; o tom jsem se vždy přesvědčil, když jsem hledal svoje citace, protože naše příjmení jsou v anglické abecedě blízko sebe. Zato si zakládal na velkém množství pozvání, která za svůj život obdržel. Málokterý matematik odmítl tolik pozvání jako on.

Z formálních uznání stojí za zmínku dvě: řadu let byl předsedou matematického kolegia ČSAV a obdržel čestný doktorát Technische Universität Dresden.

Prof. Zlámal zemřel náhle ve věku 73 let dne 22. června 1997. V jeho pozůstalosti jsem nalezl seznam jeho článků. Má 70 položek, z toho 47 je věnováno metodě konečných prvků. Od roku 1968 pracoval jenom na této metodě. Asi 18 článků je zcela zásadních. Kdybych je měl hodnotit kvantitativně, užil bych následující hodnotovou stupnici:

-1 = záporný stupeň: stydím se za autora, že toto napsal
0 = neutrální stupeň: práce mě nezajímá, i když na ní něco je
1 = první stupeň: to je chytré — že mě to nenapadlo
2 = druhý stupeň: práce mě velmi obohacuje, jsem rád, že jsem ji poznal
3 = třetí stupeň: práce otvírá nový směr bádání

Zlámalova práce z roku 1968 je třetího stupně, zbývajících 17 druhého stupně — mne aspoň velmi obohatily.

Zlámalovo velké štěstí bylo, že první inženýr na kontinentě, který začal pracovat s metodou konečných prvků, působil v Brně. Další vývoj událostí však už náhoda nebyla.

Když vědecká rada strojní fakulty VUT blahopřála prof. Zlámalovi k jeho sedmdesátinám, prozradil na sebe: „Když jsem v roce 1961 přešel na strojní fakultu, uvědomil jsem si, že musím dělat matematiku jinak, než jak se dělá na univerzitě.“ A to se mu podařilo dokonale.