Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

John Milnor

# Nobelova cena pro Johna Nashe

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 41 (1996), No. 4, 169--179

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139935

# Nobelova cena pro Johna Nashe

*John Milnor*

John F. Nash je autorem pozoruhodného množství vynikajících matematických výsledků, které vznikly během jeho desetileté matematické aktivity. Někomu se může jevit stručný článek, který napsal, když mu bylo 21 let a za nějž mu byla udělena Nobelova cena[1]) za ekonomii, jako nejmenší z dosažených výsledků. Já však tleskám moudrosti výboru, který uvedený článek zvolil pro toto ocenění. Vždy je obtížné aplikovat exaktní matematické metody ve společenských vědách, přesto jsou však myšlenky obsažené v Nashově disertaci jednoduché a přesné a poskytují pevnou základnu nejen pro ekonomickou teorii, ale také pro výzkum v evoluční biologii a obecněji pro studium libovolné situace, v níž se lidské nebo jiné živé bytosti setkávají s konkurencí nebo konfliktem. P. Ordeshook [O] říká na str. 118:

> *Pojem Nashovy rovnovážné n-tice je asi nejdůležitější myšlenka v nekooperativní teorii her... Ať již analyzujeme volební strategie kandidátů, příčiny války, manipulaci se spisy v legislativě nebo aktivity zájmových skupin, predikce událostí se redukuje na hledání a popis rovnováhy. Jednoduše řečeno, rovnovážné strategie představují to, co předpovídáme v chování lidí.*

První část článku popisuje tuto odměněnou práci. Po krátkém odbočení třetí část stručně popisuje práci, která Nashe proslavila mezi matematiky, a poslední část popisuje události od r. 1958.

## Teorie her

Podle prací von Neumanna a Morgensterna [NM] může být hra $n$ osob popsána následujícím způsobem. Je dáno $n$ činitelů nebo hráčů, očíslovaných přirozenými čísly od 1 do $n$. Pro každé $i$ mezi 1 a $n$ má $i$-tý hráč množinu $S_i$ možných strategií a vybírá nějaký prvek $s_i \in S_i$, přičemž tyto výběry jsou prováděny současně. Výsledek hry je funkcí provedených výběrů $s_i, \dots, s_n$; $i$-tý hráč má rovněž preferenční uspořádání

[1]) Srovnej [P]. Toto je třetí Nobelova cena udělená absolventu matematiky v Princetonu. První dvě byly uděleny za fyziku, obě Johnu Bardeenovi.

JOHN MILNOR vystudoval univerzitu v Princetonu. Pracoval v topologii, geometrii, algebře, dynamice a (již dávno) v teorii her. Od roku 1989 je ředitelem Institutu pro matematické vědy na Státní univerzitě v New Yorku (SUNY, Stony Brook).

*Nobel Prize for John Nash.* The Mathematical Intelligencer Vol. *17*, No. 3 (1995), str. 12–17.

Přeložil KAREL ZIMMERMANN za podpory GAČR 201/95/1484.

množiny možných výsledků. Toto uspořádání je popsáno reálnou funkcí

$$p_i : S_1 \times \ldots \times S_n \to \mathbf{R},$$

která se nazývá jeho výplatní funkcí. Cílem každého jednotlivého hráče je provést svůj vlastní výběr tak, že se maximalizuje jeho výplata $p_i(s_1, \ldots, s_n)$, přičemž se bere v úvahu, že pro každé $j \neq i$ $j$-tý hráč současně volí $s_j$ tak, aby maximalizoval hodnotu své vlastní výplatní funkce $p_j$.

Při interpretaci tohoto matematického modelu mohou být „hráči" jednotlivé osoby. Existuje však mnoho dalších možností: jednotlivými hráči mohou být národy, společnosti, armády, týmy, lidmi programované počítače nebo zvířata. Při studiu evoluce se bere v úvahu konkurence mezi druhy nebo geny (srov. [MSP], [MS] a [D]). V případě hry, která probíhá v čase, by měly být „strategie" volené hráči chápány nikoliv jako individuální výběry, ale spíše jako obsažný předpis, co dělat v každé myslitelné situaci, která může v průběhu hry nastat. Například strategie pro hru v šachy by mohla sestávat z počítačového programu, který volí tah pro každou možnou šachovou pozici. Výplatní funkce nejsou obvykle měřeny v něčem jednoduchém a objektivním, jako jsou peníze, ale spíše se předpokládá, že v sobě zahrnují každou relevantní motivaci, kterou hráči mohou mít, ať už sobeckou, altruistickou nebo jinou.

I když von Neumann a Morgenstern vytvořili krásnou teorii her dvou hráčů s nulovým součtem v tom smyslu, že $p_1 + p_2 = 0$, jejich teorie pro obecnější případ byla komplikovaná a nepřesvědčivá. Nashova teorie je na druhé straně jednoduchá a elegantní.

*Definice.* $n$-tice strategií $(s_1, \ldots, s_n)$ tvoří *rovnovážný bod* pro danou hru, jestliže žádný hráč nemůže zvýšit svou výplatu $p_i(s_1, \ldots, s_n)$ pouhou změnou strategie $s_i$, zatímco ostatní strategie $s_j$ zůstanou pevné.

Netvrdí se, že rovnovážný bod je zvláště žádoucí výsledek hry. Skutečně, může to být katastrofa pro všechny účastníky. (Jako příklad není obtížné popsat hru „vedení atomové války" s jediným rovnovážným bodem, který spočívá v tom, že každý hráč zničí všechny ostatní.) Spíše se musíme na rovnovážný bod dívat jako na popis toho, co se asi stane při totálně nekooperativní situaci, ve které hráči sledují své individuální cíle bez jakékoliv kooperace, buď proto, že nemohou mezi sebou komunikovat, nebo proto, že nemají žádný mechanismus spolupráce nebo žádnou vůli ke spolupráci. Toto kontrastuje s von Neumannovou–Morgensternovou prací, která uvažuje pouze kooperativní hry.

Děkuji Hectorovi Sussmannovi za dva příklady, které ukazují, že rovnovážné body se vyskytují i v našem každodenním životě.

*Příklad 1.* Na nudném večírku všichni hosté chtějí odejít brzy, ale nikdo nechce odejít před půlnocí, pokud neodejde někdo jiný dříve. V této situaci existuje právě jeden rovnovážný bod: každý zůstane do půlnoci. (Srov. [Sch].)

*Příklad 2.* Skupina dvaceti lidí jde na oběd a každý si může vybrat buď přiměřené jídlo za 10 dolarů nebo výborné jídlo za 20 dolarů. Bude-li každý platit sám za sebe, vyberou si všichni lacinější jídlo. Avšak účastníci oběda se dohodli, že budou platit společně a účet si rozdělí. Protože mezní náklady dražšího jídla představují v tomto případě pro každou osobu pouze 50 centů, každý si vybere dražší jídlo.

Nežli uvedeme Nashovu základní existenční větu, musíme zavést pravděpodobnosti pomocí von Neumannovy–Morgensternovy teorie smíšených strategií. Abychom viděli, proč je to nutné, uvažujme.

*Příklad 3.* Jednoduchý kombinační zámek má 1000 možných kombinací; vlastník si může zvolit kteroukoliv z nich. Potenciální zloděj má jedinou možnost uhádnout správnou kombinaci. Můžeme tedy $S_1$ a $S_2$ definovat jako konečné množiny, z nichž každá má 1000 prvků. Pro takový matematický model by však neexistoval žádný rovnovážný bod. Co musíme udělat, abychom získali rozumnou teorii, je připuštění randomizace jednotlivých výběrů strategií. Za $S_1$ a $S_2$ zvolíme 999rozměrné simplexy, každý s tisíci vrcholy. Body těchto simplexů jsou konstruovány jako pravděpodobnostní rozložení na množině 1000 možných kombinací. Nyní existuje jediný rovnovážný bod $(s_1, s_2)$, kde každé $s_i$ je pravděpodobnostním rozložením, které připisuje každému výběru kombinací pravděpodobnost 1/1000. Zloděj má potom šanci 1 k 1000, že uhádne správnou kombinaci. (Toto je příklad hry dvou hráčů s nulovým součtem, takže Nashův rovnovážný bod je v tomto případě totéž jako dvojice optimálních strategií ve smyslu von Neumanna a Morgensterna.)

Podle von Neumanna a Morgensterna se takový vážený průměr konečně mnoha čistých strategií s váhovými koeficienty interpretovanými jako pravděpodobnosti nazývá *smíšená strategie.* Množina všech smíšených strategií daného hráče tvoří konečněrozměrný simplex.

**Existenční věta.** *Jestliže prostor strategií $S_i$ každého hráče je konečně rozměrný simplex a jestliže každá výplatní funkce $p_i(s_1, \ldots, s_n)$ je spojitá funkce $n$ proměnných a přitom lineární funkce $s_i$, jsou-li ostatní proměnné pevné, pak existuje alespoň jeden rovnovážný bod.*

Abychom dokázali toto tvrzení, vnoříme každé $S_i$ do Eukleidovského prostoru $\mathbf{R}^{d_i}$ téže dimenze a uvažujeme kartézský součin

$$K = S_1 \times \ldots \times S_n \subset \mathbf{R}^{d_1} \times \ldots \times \mathbf{R}^{d_n}.$$

Potom můžeme zkonstruovat spojité vektorové pole

$$(s_1, \ldots, s_n) \mapsto (v_1, \ldots v_n) \in \mathbf{R}^{d_1} \times \ldots \times \mathbf{R}^{d_n} \qquad (*)$$

takto: složka $v_i$ ve směru $\mathbf{R}^{d_i}$ je vektorem gradientu $\partial p_i / \partial s_i$ funkce $p_i$ uvažované jako funkce $s_i$ při pevných ostatních proměnných $s_j$ pro každé $j \neq i$. Budeme potřebovat následující lemma:

**Lemma.** *Je-li $K \subset \mathbf{R}^d$ kompaktní konvexní množina a $v : K \to \mathbf{R}^d$ spojitá funkce, pak existuje alespoň jeden bod $\hat{s} \in K$, v němž je buď $v$ rovno nule, nebo směřuje ven z množiny $K$ v tom smyslu, že každý bod množiny $K$ leží v poloprostoru*

$$\{s \in \mathbf{R}^d : s \cdot v(\hat{s}) \leqq \hat{s} \cdot v(\hat{s})\}.$$

*Nástin důkazu* (viz obr. 1). Nechť $\varrho : \mathbf{R}^d \to K$ je tzv. kanonická retrakce, tj. zobrazení, které převádí každý bod prostoru $\mathbf{R}^d$ do k němu nejbližšího bodu množiny $K$. Potom složené zobrazení $s \to \varrho(s + v(s))$ zobrazuje $K$ do sebe a má tedy podle Browerovy věty o pevném bodě pevný bod

$$\hat{s} = \varrho(\hat{s} + v(\hat{s})).$$

Je snadné dokázat, že $v(\hat{s})$ je buď rovno nule, nebo směřuje z množiny $K$ ven.

Aplikací tohoto lemmatu na vektorové pole (*) dostaneme $n$-tici $\hat{s} = (\hat{s}_1, \ldots, \hat{s}_n)$, které je hledaným rovnovážným bodem. □

*Komentář.* Jako u každé teorie, která konstruuje matematický model pro nějaký reálný problém, se musíme ptát, jak realistický tento model je, zda nám pomáhá porozumět reálnému světu, zda umožňuje predikci, která může být ověřena v realitě.

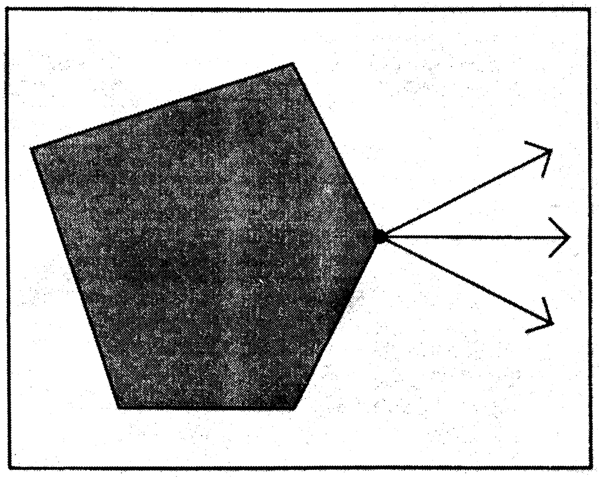
V případě Nashovy teorie rovnovážného bodu se můžeme ptát, zda je tato teorie míněna jako deskriptivní teorie, která nám říká, jak lidé skutečně v konfliktní situaci jednají, nebo jako teorie normativní, která nám říká, jak racionálně smýšlející lidé mají jednat, aby dosáhli nejlepšího možného výsledku. Odpověď asi zní: odděleně ani jedno, ani druhé. Ve skutečnosti nemohou být tyto dva aspekty nikdy odděleny, protože deskriptivní teorie popisující, jak ostatní hráči volí své strategie, může být rozhodující při výběru vlastní strategie.

Ptejme se nejprve, jak realistický je daný model. Předpokládá se, že všichni hráči jsou racionálně smýšlející, že rozumějí přesným pravidlům hry a mají úplnou informaci o cílech ostatních hráčů. Toto je zřejmě splněno jen v malém počtu případů.

Jeden bod, který zasluhuje zvláštní pozornosti, je předpoklad linearity v Nashově větě. Toto je přímá aplikace von Neumannovy–Morgensternovy teorie numerického užitku: požadavek, že lze měřit relativní vhodnost různých možných výsledků (reálná funkce, která je lineární vzhledem k pravděpodobnostem). Jinými slovy, jestliže strategie $s$ dává s 50 %-ní pravděpodobností výsledek o užitku $b$, zatímco strategie $s'$ dává se 100 %-ní jistotou výsledek o užitku $\frac{1}{2}(a + b)$, pak hráč by měl projevovat indiferenci mezi $s$ a $s'$. Tento pojem byl studován mnoha autory. (Viz např. [HM].) Já osobně věřím, že toto je zcela rozumné jako normativní teorie, ale že to nemusí být realistické jako deskriptivní teorie.

Za jakých podmínek se teorie rovnovážného bodu skutečně aplikuje? Hra může mít mnoho rovnovážných bodů, některé lepší než jiné buď pro jednoho hráče, nebo dokonce pro všechny hráče. Je-li hra hrána pouze jednou bez jakékoliv vzájemné komunikace mezi hráči, jak budou tito hráči vědět, který z těchto rovnovážných bodů je relevantní? Jestliže hráči mezi sebou komunikují, kdy přestává tato hra být „nekooperativní“ hrou? Jiným obecným případem může být hra, která je hrána stále znovu a znovu, přičemž se postupně mohou strategie ustálit na nějakém rovnovážném bodě. V tomto případě vzniká dodatečná komplikace spočívající v tom, že užitková funkce hráčů nemusí být stejná v každé jednotlivé partii hry.

Nashova teorie nebyla zřejmě konečnou odpovědí na problém pochopení konfliktních situací. Spíše to byl začátek, který vedl k mnoha dalším výzkumům během následujících let. Ve skutečnosti je třeba zdůraznit, že žádná jednoduchá matematická



Obr. 1. Příklad vektorů směřujících „ven“ v hraničním bodě kompaktní konvexní množiny.

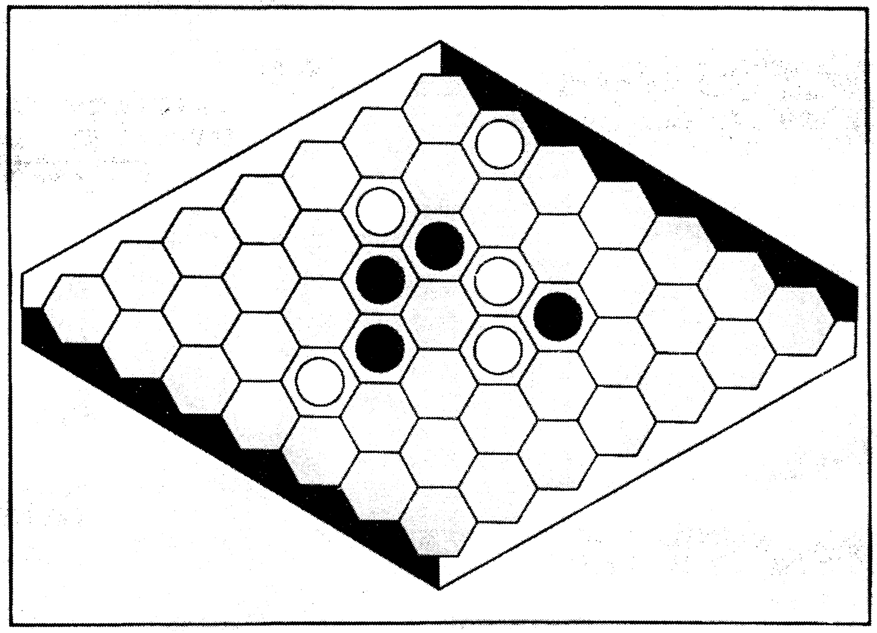
teorie nemůže poskytnout úplnou odpověď, protože k přesnějšímu pochopení může být podstatná psychologie hráčů a mechanismus jejich interakce.

## Hry

Nash vstoupil do Princetonu jako (graduovaný) student v roce 1948, ve stejném roce, v němž jsem byl přijat ke studiu já. Rychle jsem se s ním seznámil, protože jsme spolu strávili značnou dobu ve společném pokoji. Měl vždy plno matematických nápadů nejen v oblasti teorie her, ale také v geometrii[2]) stejně jako v topologii. Avšak v nejživější paměti mám z této doby mnohé hry, které se hrály v našem společném pokoji. Byl jsem uveden do hry Go, do hry „Kriegspiel“ a také do důvtipné topologické hry, kterou jsme nazvali „Nash“ na počest jejího vynálezce. Ve skutečnosti se později ukázalo, že stejnou hru vynalezl již před několika lety Piet Hein v Dánsku. Hein ji nazval „Hex“ a pod tímto názvem je obecně známa dodnes. Deska pro hry „Nash“ nebo „Hex“ rozměrů $n \times n$ je kosočtverec, který je zaplněn $n^2$ šestiúhelníky tak, jak je to znázorněno na obr. 2. (Doporučený rozměr vhodný pro hru je $14 \times 14$. Zde se však uvádí deska mnohem menší pro ilustrativní účely.) Dvě protější strany jsou vybarveny černě a zbývající dvě strany jsou vybarveny bíle. Hráči střídavě umisťují kameny na

[2]) Zde je jeden problém, který Nash zformuloval. Nechť $V_0$ je singulární algebraická varieta dimenze $k$, vnořená do nějaké hladké variety $M_0$, a nechť $M_1 = G_K(M_0)$ je Grassmannova varieta tečných $k$-rovin k $M_0$. Potom $V_0$ se přirozeně zvedá k nějaké $k$-rozměrné varietě $V_1 \subset M_1$. Pokračujeme-li induktivně, dostaneme posloupnost $k$-rozměrných variet $V_0 \leftarrow \leftarrow V_1 \leftarrow V_2 \leftarrow \ldots$. Dostáváme tímto postupem nakonec varietu $V_q$, která je nesingulární? Do dnešních dnů bylo toto tvrzení dokázáno jen ve speciálních případech. (Srov. [G-S], [H] a [Sp].)

šestiúhelníky, přičemž je-li kámen umístěn, není jím možno během hry pohybovat. Hráč s černými kameny se snaží vytvořit souvislý řetězec černých kamenů spojující dva černé okraje desky, zatímco hráč s bílými kameny se snaží o vytvoření řetězce z bílých kamenů spojujícího bílé okraje. Hra pokračuje do té doby, dokud jeden nebo druhý hráč neuspěje.



Obr. 2. Typická situace ve hře Hex. Problém: Černý táhne a vyhraje. Alternativní problém: Bílý táhne a vyhraje.

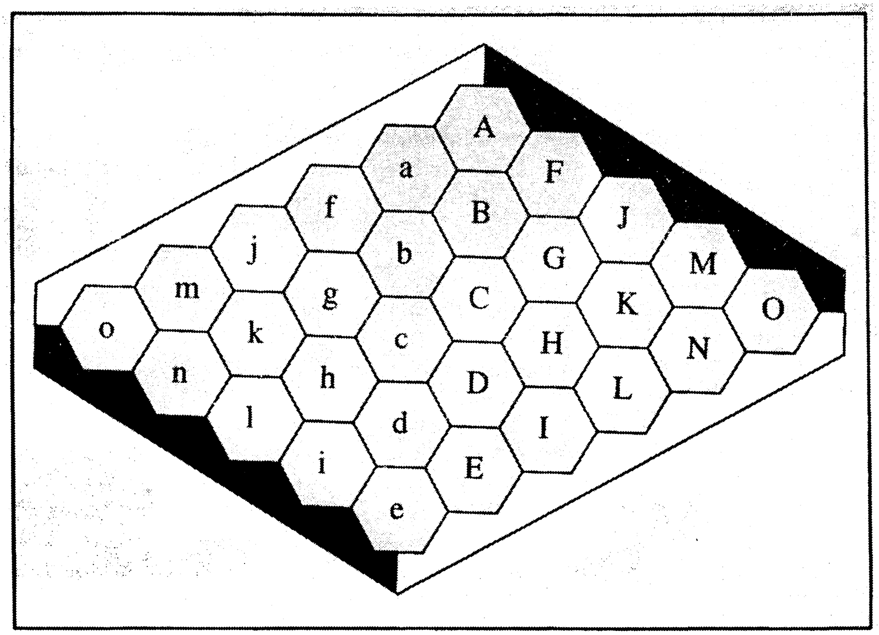
**Věta.** *Na desce hry Hex rozměrů $n \times n$ první hráč může vždy vyhrát.*

Nashův důkaz je obdivuhodně nekonstruktivní a lze jej nastínit následovně.

**První krok.** Čistě topologický důkaz ukazuje, že v každé partii hry musí zvítězit jeden z hráčů: Je-li deska pokryta černými a bílými kameny, potom buď existuje řetězec černých kamenů spojující černé okraje, nebo řetězec bílých kamenů spojující bílé okraje, ale nikdy nemůže nastat obojí najednou.

**Druhý krok.** Protože tato hra je konečná a má pouze dva možné výsledky a protože hráči provádějí své tahy střídavě s úplnou informací, plyne z Zermelovy věty, která byla znovu objevena von Neumannem a Morgensternem, že jeden ze dvou hráčů musí mít vítěznou strategii.

**Třetí krok** podle symetrie. Kdyby měl druhý hráč vítěznou strategii, první hráč by mohl udělat počáteční tah náhodně a pak následovat strategii druhého hráče. Protože jeho počáteční partie jej nikdy nemůže zasáhnout („zranit"), musí zvítězit. Tudíž předpoklad, že druhý hráč má vítěznou strategii, vede ke sporu. (Toto je známý důkaz,




Obr. 3. Na asymetrické desce na tomto obrázku bílý může vyhrát, i když černý táhne první. Vítězná strategie může být explicitně popsána tzv. „dvojnými tahy“ (ang. „doubles“): ať táhne černý jakkoliv, bílý odpovídá obsazením šestiúhelníku, který je označen odpovídajícím symbolem, přičemž korespondence (např. $a \leftrightarrow A$) je klouzavý odraz, který převrací levou polovinu desky na pravou.

který se používá i na jiné symetrické hry, jako je např. hra „pět v řadě“ (angl. „Five-in-a-Row“). □

Všimněte si, že tento důkaz podstatně závisí na symetrii hrací desky. Na desce o rozměrech $n \times (n+1)$ může hráč, který má spojit okraje s kratší vzdáleností, vždy zvítězit, i když druhý hráč má první tah. (Srovnej obr. 3.)

## Geometrie a analýza

Po získání doktorátu přešel Nash do M.I.T., kde napsal pozoruhodnou řadu článků. První z nich byl fundamentálním příspěvkem k teorii reálných algebraických variet.

**Věta.** *Je-li dána libovolná hladká kompaktní k-rozměrná varieta $M$, pak existuje reálná algebraická varieta $V \subset \mathbf{R}^{2k+1}$ a její souvislá komponenta $V_0$ tak, že $V_0$ je hladká varieta difeomorfní k $M$.*

Tuto větu doplnil abstraktní charakteristikou takových hladkých variet $V_0$ pomocí vhodné algebry reálných funkcí.

Jako jeden příklad toho, jak silný je tento výsledek, uvedu jednu jeho důležitou aplikaci. Jedním ze základních problémů v dynamice je pochopit, jak může počet periodických bodů s periodou $p$ pro hladké zobrazení růst jako funkce $p$.

**Věta Artinova–Mazurova.** *Libovolné hladké zobrazení kompaktní hladké variety do sebe může být aproximováno takovým hladkým zobrazením, že počet periodických bodů s periodou $p$ roste nejvýše exponenciálně s číslem $p$.*

Jediný známý důkaz tohoto výsledku podstatně využívá Nashovu práci, aby převedl tento dynamický problém na problém algebraický o počtu řešení polynomiálních rovnic.

O dva roky později zaměřil Nash svoji pozornost na jeden z fundamentálních nevyřešených problémů Riemannovské geometrie, na problém izometrického vnoření pro Riemannovské variety. Jinými slovy, uvažoval soustavu diferenciálních rovnic

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} = g_{ij}(u_1, \ldots, u_k),$$

kde $u_i$ jsou lokální souřadnice nějaké dané Riemannovské variety, $g_{ij}(u_1, \ldots, u_k)$ je předepsaná Riemannovská metrika a kde $\mathbf{x}(u_1, \ldots, u_k)$ je neznámé izometrické vnoření do Eukleidovského $n$-rozměrného prostoru. Toto je soustava $\frac{1}{2}k(k+1)$ nelineárních diferenciálních rovnic s $n$ neznámými funkcemi, která má být řešena globálně na celé varietě. Nash nejprve řešil případ $C^1$.

Každý student diferenciální geometrie ví, že kompaktní plocha bez hraničních bodů v třírozměrném Eukleidovském prostoru musí mít body s kladnou křivostí. (*Důkaz:* Uzavřeme plochu do sférického „balónu“ a potom posouvejme tento balón, až se poprvé dotkne plochy. Potom musí obě hlavní křivosti v bodě dotyku být různé od nuly a mít stejné znaménko. Gaussova křivost v tomto bodě je tudíž kladná.) Jako příklad uvedeme, že odtud plyne, že plochý torus $S^1 \times S^2 \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ nemá žádné hladké izometrické vnoření do třírozměrného prostoru.

Nash ignoroval tyto obtíže. Zahrneme-li pozdější zdokonalení od Kuipera [K], můžeme jeho výsledek formulovat takto.

**Věta.** *Jestliže lze kompaktní Riemannovskou varietu $(M, g)$ hladce vnořit do Eukleidovského prostoru $\mathbf{R}^n$, pak ji lze $C^1$-izometricky vnořit do $\mathbf{R}^n$.*

Uveďme velmi stručný nástin důkazu. Začněme s libovolným hladkým vnořením a zmenšujme jej stejnoměrně tak, že všechny vzdálenosti v indukované metrice budou kratší nežli vzdálenosti v dané metrice $g$. Potom zaveďme malé sinusové vlnky do vnoření variety tak, aby se zvětšily Eukleidovské délky křivek po jednotlivých souřadnicích. Opakujme nyní tento proces a kontrolujme pečlivě první derivace na každém stadiu, takže Riemannovská metrika indukovaná vnořením bude růst monotónně k požadované metrice $g$.

Háček v této konstrukci spočívá v tom, že neexistuje žádný způsob kontroly druhých derivací. Tudíž zkonstruované vnoření nebude nikdy $C^2$-hladké. Protože pojem křivosti v sobě obsahuje podstatným způsobem druhé derivace, jakýkoliv důkaz zahrnující hlavní křivosti se prostě pro výsledné vnoření nehodí.

Dále se Nash zabýval mnohem obtížnějším problémem $C^r$-vnořením pro $r > 1$.

**Věta.** *Jestliže $n \geqq \frac{1}{2}k(k+1)(3k+11)$, pak každá $k$-rozměrná Riemannovská varieta třídy $C^r$ může být $C^r$-izometricky vnořena do $\mathbf{R}^n$ pro $3 \leqq r \leqq \infty$.*

Aby dokázal tento výsledek, zavedl úplně novou metodu v nelineární analýze. V jejím pozdějším zobecnění pocházejícím od Mosera může být tato metoda popsána následujícím způsobem. Snažíme se vyřešit nějakou soustavu rovnic v nekonečně rozměrném prostoru funkcí $f$. Je-li dáno přibližné řešení $f_0$, můžeme aplikovat nějaký lineární aproximační postup analogický Newtonově metodě, abychom získali lepší aproximaci $g_0$. Nesnáz je však v tom, že tento lineární postup v sobě obsahuje obvykle derivování, takže $g_0$ je méněkrát diferencovatelná než $f_0$. Trik pak spočívá v tom, že se aplikuje „zhlazovací" (angl. „smoothing") operátor, který aproximuje $g_0$ funkcí $f_1$, která má lepší hladkost. Můžeme pak postupovat induktivně a konstruovat posloupnost aproximací $f_0, f_1, f_2, \dots$ s extrémně opatrnými odhady na každém stupni. Při vhodných předpokladech budou tyto odhady konvergovat k požadovanému řešení. (Další rozpracování těchto myšlenek lze najít v pracích [Gr] a [Gü].)

V této době začal Nash studovat do hloubky problematiku parabolických a eliptických diferenciálních rovnic, dokázal základní věty o lokální existenci, jednoznačnosti a spojitosti řešení (přemýšlel též o vztazích se statistickou mechanikou, singularitami a turbulencí). Tato práce byla poněkud opomenuta. Ve skutečnosti článek uveřejněný v r. 1957 Di Giorgim [DG] měl tendenci dominovat v této oblasti. Metody byly zcela odlišné, ale oba autoři byli pozoruhodně originální a jejich výsledky lze hodnotit jako skutečný průlom. Di Giorgi uvažoval pouze eliptický případ, zatímco Nash přisoudil prvořadou roli spíše parabolickým rovnicím. Jeho metody založené na momentové nerovnosti pro fundamentální řešení jsou velmi silné. (Srovnej [FS].) Uveďme zde některé citace (zkrácené a mírně upravené), které nám pomohou popsat jeho pohled a cíle v r. 1958.

Otevřené problémy v oblasti nelineárních parciálních diferenciálních rovnic jsou velmi závažné pro aplikovanou matematiku a vědu jako celek snad více než otevřené problémy v libovolné jiné oblasti matematiky a zdá se, že tato oblast je zralá pro rychlý rozvoj. Málo se ví o existenci, jednoznačnosti a hladkosti řešení obecných rovnic proudění pro vazkou, stlačitelnou a teplo vedoucí tekutinu. Také vztah mezi tímto kontinuálním popisem tekutiny a fyzikální představě více odpovídajícím popisem na základě statistické mechaniky nebyl dosud správně pochopen. Snad by se nejdříve mělo zkusit dokázat existenci, hladkost a jednoznačnost pokračování proudění (v čase) za podmínky, že se někde nevyskytují určité podstatné typy singularit jako nekonečně velké hodnoty teploty nebo hustoty. Výsledek tohoto druhu by objasnil problém turbulence.

Úspěšné vyšetření chování nelineárních parciálních diferenciálních rovnic obecně závisí na „priorních" odhadech, které samy o sobě představují věty o lineárních rovnicích... Metody, kterých zde bylo užito, byly inspirovány fyzikální intuicí difuse, Brownova pohybu, toku tepla nebo elektrických nábojů, ale rituál matematického výkladu má tendenci tuto přirozenou základnu skrývat.

## Epilog

V roce 1958 ve věku 30 let trpěl Nash zničujícím útokem duševní choroby (srov. [N]). Následovalo mnoho těžkých let: období hospitalizace v ústavech pro duševně choré, obvykle nedobrovolné, spojené často se šokovou terapií, vystřídaná obdobími částečného uzdravení. Během krátkého uzdravení v r. 1966 publikoval další článek, který ukazoval, že jeho věta o izometrickém vnoření a obecněji Nashova–Moserova technika implicitní funkce mohou být rozšířeny na reálně analytický případ. Potom následovalo velmi dlouhé neplodné období jeho života. Během tohoto období jsem s ním ztratil kontakt; byl jsem však velmi šťasten, když jsem se dozvěděl, že se jeho choroba v posledních letech zmírnila, a že se opět začal zajímat o větší nevyřešené problémy. V tomto roce se Nash nejen zúčastnil ceremonie předání Nobelovy ceny ve Stockholmu, ale uspořádal také seminář v Uppsale o své nejnovější práci v matematické fyzice.

Uzavírám tento článek gratulací Johnu Nashovi nejen k jeho ocenění, ale také k jeho mnoha příspěvkům k lidskému poznání, a přeji mu vše nejlepší do budoucna.


### Poděkování

Chtěl bych poděkovat D. Galeovi, I. Kra, H. Kuhnovi, J. Moserovi, M. Spivakovskému a H. Sussamannovi za jejich pomoc.


Literatura


[AM] M. Artin and B. Mazur: *On periodic points.* Ann. Math. *81* (1965), 82–99.

[D] R. Dawkins: *The Selfish Gene.* Oxford: Oxford University Press (1976).

[DG] E. Di Giorgi: *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari.* Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) *3* (1957), 25–43.

[FS] E. B. Fabes and D. W. Stroock: *A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality using the old ideas of Nash.* Arch. Rat. Mech. Anal. *96* (1986), 327–338.

[G-S] G. Gonzalez-Sprinberg: *Résolution de Nash des points double rationnells.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 32 (2) (1982), 111–178. See also: *Désingularisation des surfaces par des modifications de Nash normalisées.* Sém. Bourbaki 1985/86, Astérisque 145–146 (1987), 4 and 187–207.

[Gr] M. Gromov: *Partial Differential Relations.* New York: Springer-Verlag (1986).

[Gü] M. Günther: *Isometric embeddings of Riemannian manifolds.* Proc. Int. Cong. Math. Kyoto, II, Mathematical Society of Japan, Springer (1991), 1137–1143.

[H] H. Hironaka: *On Nash blowing-up.* Arithmetic and Geometry II, Boston: Birhäuser (1983), 103–111.

[HM] I. N. Herstein and J. Milnor: *An axiomatic approach to measurable utility.* Econometrica *21* (1953), 291–297.

[K] N. Kuiper: *On $C^1$-isometric imbeddings, I, II.* Indag. Math. *17* (1955), 545–556, 683–689.

[M] J. Moser: *A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA *47* (1961), 1824–1831.

[MS] J. Maynard Smith: *Did Darwin Get It Right?* Chapman and Hall, New York (1989).

[MSP] J. Maynard Smith and G. R. Proce: *The logic of animal conflict*[3]). Nature *246* (1973), 15–18.

[N] S. Nasar: *The lost years of a Nobel laureate.* New York Times Business Section, 13 November 1994, 1 and 8.


---

[3]) Všimněme si, že evoluční stabilní strategie ve smyslu Maynarda Smitha a Price'a je skoro totéž jako Nashův rovnovážný bod.

[NM] J. von Neumann and O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton, NJ: Princeton University Press (1944).

[O] P. Ordeshook: *Game and Political Theory: An Introduction.* Cambridge UK: Cambridge University Press, (1986).

[P] R. Pool: *Economics: Game theory's winning hands.* Science *266* (Oct. 21, 1994), 371.

[Sch] J. Schwartz: *Lectures on the Mathematical Method in Analytical Economics.* New York: Gordon and Breach (1961).

[Sp] M. Spivakovsky: *Sandwiched surface singularities and desingularization of surfaces by normalized Nash transformations.* Ann. Math. *131* (1990), 411–491.

**Publikované články Johna F. Nashe**

[1] *Equilibrium points in n-person games.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA *36* (1950), 48–49.

[2] *The bargaining problem.* Ecometrica *18* (1950), 155–162. (Written as an undergraduate at Carnegie Tech.)

[3] *Non-cooperative games.* Ann. Math. *54* (1951), 286–295.

[4] *Real algebraic manofolds.* Ann. Math. *56* (1952), 405–421.

[5] *Two-person cooperative games.* Econometrica *21* (1953), 128–140.

[6] *Some experimental n-person games* (with C. Kalisch, J. Milnor and E. Nering). *Decision Processes* (R. M. Thrall, C. H. Coombs, and R. L. Davis, eds.), New York: Wiley (1954).

[7] *$C^1$-isometric imbeddings.* Ann. Math. *60* (1954), 383–396. [See also Bull. Amer. Math. Soc. *60* (1954), 157.

[8] *Results on continuation and uniqueness of fluid flow.* Bull. Am. Math. Soc. *60* (1954), 165–166.

[9] *A path space and the Stiefel–Whitney classes.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA *41* (1955), 320–321.

[10] *The imbedding problem for Riemannian manifolds.* Ann. Math. *63* (1956), 20–63. [See also Bull. Am. Math. Soc. *60* (1954), 480.]

[11] *Parabolic equations.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA *43* (1957), 754–758.

[12] *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations.* Am. J. Math. *80* (1958), 931–954.

[13] *Le problème de Cauchy pour les équations différentielles d'un fluide géneral.* Bull. Soc. Math. France *90* (1962), 487-497.

[14] *Analyticity of the solution of implicit function problems with analytic data.* Ann. Math. *84* (1966), 345–355.

*Institute for Mathematical Sciences*
*State University of New York at Stony Brook*
*Stony Brook, NY 11794-3660, USA*