Jean-Pierre Aubin
O motivaci v matematice (seriál)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 32 (1987), No. 3, 154--163

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139900

diskuse

O MOTIVACI V MATEMATICE (SERIÁL)

Jean-Pierre Aubin, Paříž

„Nepochybně býváte znovu a znovu dotazováni, k jakému účelu slouží matematika a zdali ty jemné struktury, které již jako zralé plody probouzí k životu naše mysl, nejsou umělé a zrozené z pouhého rozmaru. Pokud jde o lidi, kteří nám kladou takové otázky, musím z nich vyčlenit jako zvláštní skupinu praktiky, kteří by po nás chtěli jen prostředky k vydělávání peněz. Pro ty je škoda jakékoliv odpovědi.“

(*Henri Poincaré, La valeur de la science, kapitola 5*).

I. O nutnosti motivované matematiky

Termín *aplikovaná matematika*, často používaný jako opak slova *čistá matematika*, je zavádějící, protože podporuje přesvědčení, že lze prostě a jednoduše rozlišit mezi základním vývojem matematických prostředků a jejich použitím při řešení problémů, se kterými se setkáváme v jiných oborech vědy. Tyto výrazy totiž ve skutečnosti zastírají jeden z nejdůležitějších činitelů pokroku v matematice: motivaci, kterou mohou matematikové získat studiem jiných věd.

Jenom ti, kteří by raději zapomněli na poučení z historie vědy, mohou popřít skutečnost, že silný pud nutící člověka, aby prozkoumával své prostředí, má příznivý vliv na rozvoj matematiky – vliv mnohem větší, než má aplikovatelnost nebo krátkodobá užitečnost výsledných teorií či prostředků. Prosté seznámení se s fakty ukazuje, že bez této přirozené zvídavosti by nebyl pokrok v technice ani v praxi. Nedovedeme ovšem předpovědět, které části matematiky budou mít nakonec praktické aplikace nebo kterou cestou se vydají příští generace v tom spletitém labyrintu teorií, na němž tolik vědců pracovalo tak dlouhou dobu.

Já sám navrhuji termín *motivovaná matematika*, a to ve snaze přispět novým pohledem do této staré diskuse; nové pohledy na věc jsou naprosto nutné v době, kdy přehnaná formalizace matematiky na jedné straně a obrovské částky peněz spojené s možnými aplikacemi na straně druhé zatemňují tyto otázky víc než kdykoliv předtím.

Matematika, podobně jako jiné prostředky komunikace (jazyky, malířství, hudba atd.), poskytuje *metafory**), jichž lze využít k vysvětlení nového jevu tím,

*) Metafora: nepřímé pojmenování, při němž je nějaká věc označena jménem věci jiné, která je jí některými vlastnostmi podobná. Tyto vlastnosti pojmenované věci vystoupí přitom výrazně do popředí. (Viz *Příruční slovník naučný*, Academia, Praha 1966.)

J.-P. Aubin: *On the Necessity of Motivated Mathematics.* Reprinted from the January/85 issue of SIAM News, Vol. 18, No. 1, pp. 6, 17;

J.-P. Aubin: *Developing Motivated Mathematics.* Reprinted from the March/85 issue of SIAM News, Vol. 18, No. 2, pp. 7, 16;

J.-P. Aubin: *Other Disciplines Provide Motivation.* Reprinted from the May/85 issue of SIAM News, Vol. 18, No. 3, pp. 7, 12.

že jej srovnáme s jiným jevem, který je známější nebo jej alespoň za známější považujeme. Tento pocit důvěrné obeznámenosti, individuální či kolektivní, vrozený či získaný, vede k vnitřnímu přesvědčení, že jsme studovaný jev pochopili.

Tím se dostáváme k lidské touze „vysvětlovat skutečnost". Jsme mozky, které *vnímají* a *interpretují* své okolí a tyto interpretace různými prostředky *sdělují* dále*). To vede k definici stupně reality (pro danou společenskou skupinu v daném čase) v termínech souhlasných interpretací toho, co členové skupiny vnímají ve svém fyzikálním, biologickém, společenském a kulturním prostředí.

Protože naše mozky jsou ustrojeny podle stejné biologické předlohy a protože povšechné přijímání místních kulturních zvyklostí se zdá být vrozeným a univerzálním jevem, je nanejvýš pravděpodobné, že jednotlivci patřící k dané společenské skupině se shodnou na dostatečně široké bázi, aby mohl povstat rozumný a důvěryhodný pojem reality. Ovšemže proroci a učenci v každé skupině neustále berou v potaz platnost metafor, na kterých je založen tento konsensus, zatímco veleknéží a jiní strážci ideologické čistoty se nakonec snaží přeměnit jej v dogma a jako dogma jej vnutit ostatním členům skupiny*). Právě díky tomuto neustálému boji se vyvíjí poznání. Ale existuje důležitý rozdíl mezi metaforami ve vědě a (řekněme) v náboženství nebo ideologii: metafora, která si činí nárok na vědeckou platnost, musí být omezená a dokonce úzká svým rozsahem. Čím více je vědecké bádání „aplikované", tím musí být příslušná metafora užší.

Vědecké teorie — vědecké metafory — musí být schopny podrobit se logickému přezkoumání (jako je tomu v matematice) nebo zkoušce experimentem (což ovšem vyžaduje, aby teorie byly vyvratitelné). Ideologie se vymykají těmto požadavkům: čím jsou „širší", tím vypadají svůdněji.

Nicméně je mnoho případů, kdy vědecké metafory byly a jsou rozšiřovány za své přirozené hranice: zneužití teorie katastrof, teorie informace a termodynamiky „povšechnými mysliteli" k „vysvětlení" (pomocí hry se slovy) jevů ležících vně platnosti těchto teorií dává zřejmý příklad ze současnosti.

Konstruování matematických metafor přirozeně vyžaduje nezávislý rozvoj oboru dodávajícího teorie, jež budou nakonec svazovány s pozorovanými reálnými jevy: to je doména čisté matematiky. Rozvoj matematického umění se řídí svou vlastní logikou, jako literatura, hudba, malířství atd. Ve všech těchto oblastech je *estetické uspokojení* jednak cílem veškerého snažení, jednak i signálem, který umožňuje rozpoznat úspěšné dílo. Ve všech těchto oblastech také působí *móda* — nebo společenský konsensus — a ovlivňuje estetická kritéria, podle nichž se dílo posuzuje. Jak se tvoří a vyvíjí sama móda, je ovšem otázka, která stále ještě čeká na odpověď.

---

*) V rozporu s tím, co se často říká, matematika není pouze jiným jazykem, třebas i mnohem bohatším a přesnějším. Matematické myšlení je jednou ze schopností, kterou sdílejí všechny lidské bytosti, stejně jako schopnost mluvit a psát, poslouchat nebo skládat hudbu, prohlížet si a malovat obrazy, věřit v kulturní a morální kodexy a podřizovat se jim. Tyto schopnosti nejsou rozděleny rovnoměrně a mohou být různými jednotlivci rozvinuty v menší nebo větší míře. Je zřejmě nemožné uspořádat tyto různé schopnosti do jakékoliv hierarchie a ze všeho nejméně si lze dělat nárok na svrchovanost matematického myšlení.

*) Často se stává, že proroci a učenci se nakonec sami stanou velekněžími; pohyb v opačném směru je mnohem méně obvyklý.

Popsali jsme již matematickou metaforu jako prostředek spojení určité matematické teorie s jistým pozorovaným jevem. Takové spojení může vzniknout dvěma různými způsoby. První možnost je hledat již existující matematickou teorii, která by mohla dát dobré vysvětlení uvažovaného jevu. To se obvykle považuje za doménu aplikované matematiky.

Je ovšem také možné přistupovat k dané otázce z opačného konce. Jiné vědní obory poskytují matematikům metafory tím, že naznačují nové pojmy a způsoby argumentace, dávají nápovědi možných řešení nebo rozvíjejí nové formy intuice – a to je doména toho, co můžeme nazvat „motivovaná matematika".

Dějiny matematiky jsou plné příkladů toho, jak matematické postupy motivované problémy, na které jsme narazili v jednom vědeckém oboru, našly aplikace v mnoha dalších oborech. *Je to tato „univerzalita", jež činí matematiku tak fascinující.*

Na matematikovu práci bychom se neměli dívat zjednodušeně jako na obstarávání formulí a modelů doplněných více či méně důmyslnými balíky programů. Instituce, která omezuje většinu svých matematiků na tento typ činnosti, velmi rychle zjistí, že dostává opak toho, co zamýšlela: průměrné výsledky, které jsou velmi brzy překonány.

Je nemožné vést přesné hranice mezi čistou, aplikovanou a motivovanou matematikou; tak početné jsou jejich vzájemné vztahy. Rozlišení se týká spíše intelektuálního a tvořivého chování jednotlivých matematiků než povahy různých problémů, jichž bychom se měli chopit na všech úrovních s použitím všech známých přístupů. Maximálně můžeme říci, že matematik, který spolupracuje s inženýry, řídícími pracovníky nebo s lékaři je pravděpodobně více „aplikovaný" než jeho kolega spolupracující s fyziky, ekonomy nebo biology: ten druhý může být považován spíše za „motivovaného" matematika. Mělo by se také zdůraznit, že tato klasifikace není v žádném případě absolutní: vždycky se může stát, že jednotlivý matematik bude některými kolegy považován za „příliš aplikovaného" a jinými za „příliš čistého"*). Ať je to tak nebo tak, kdo může s konečnou platností říci, zdali daná práce je nebo není aplikovaná, nebo zdali speciální matematická disciplína se nakonec ukáže být užitečnou? Měli bychom si připomenout, že Gauss, nyní považovaný za jednoho z největších matematiků všech dob, fakticky strávil většinu svého produktivního života únavnými výpočty drah planet („užitečný výzkum"); Gauss pravděpodobně „odpočíval" tak, že se zabýval zdánlivě „neužitečnými" problémy v aritmetice, které ho nakonec proslavily a které ironií osudu nalezly od té doby důležité aplikace v pokročilé softwarové technologii.

U kořenů tohoto zmatku můžeme vystopovat působení zákonů psychologie a sociologie (jimž podléhají jako pouhé lidské bytosti i matematikové), které uspořádávají tyto rozdílné intelektuální přístupy do implicitní (nebo častěji, bohužel, explicitní) hierarchie: čistá matematika je dobrá, aplikovaná matematika je špatná a motivovaná matematika je všeobecně ignorována. Tato klasifikace není jen absurdní, je také nebezpečná, protože se neustále reprodukuje a nové talenty mají sklon se

*) Kritika, že dílo je „příliš abstraktní", přichází obvykle od lidí, kteří buď ze zásady opovrhují čistou matematikou, nebo se obávají obtížnosti tohoto druhu práce a chtějí to skrýt před okolím.

rozmísťovat v souladu s takto pociťovanou hierarchií.

Jedním z důvodů, proč se motivovaná matematika často ignoruje, může být skutečnost, že práce motivovaných matematiků zahrnuje spoustu rizika, zejména když jde o problémy pocházející z „měkkých" disciplín, jako jsou společenské vědy nebo v menší míře biologické vědy. Velmi mnoho hodin hlubokého přemýšlení může vést k matematickým trivialitám nebo k problémům, které nemohou být vyřešeny v krátkém termínu — stejné úsilí věnované dobře strukturovanému problému v čisté nebo aplikované matematice by normálně přineslo určité viditelné výsledky.

Často vidíme přátelsky naladěné čisté matematiky, jak žádají specialisty jiných oborů, aby přednášeli o svých problémech matematickému obecenstvu. To je ale většinou nemožné, protože tito specialisté by potřebovali určité předběžné znalosti příslušných matematických technik, aby vůbec mohli své problémy předložit.

Tento druh práce vyžaduje *motivované matematiky*, vědce, kteří jsou jednak důvěrně seznámeni s „druhou" disciplínou, jednak mají též přístup k rozsáhlému arzenálu matematických technik a schopnost tento arzenál rozšiřovat. Pomocí dlouhého a deprimujícího dialogu musí zjistit, zdali je daný problém řešitelný existujícími matematickými metodami, a pokud není, musí se snažit problém transformovat — to je může vést k tomu, že zdánlivě na původní problém zapomenou — a zkonstruovat nějakou teorii ad hoc, o které se intuitivně domnívají, že by se mohla v celém procesu použít (mnohem) později. Musí přesvědčit své kolegy, že potřebují velmi dlouhou „dobu studia" „pouze" k tomu, aby porozuměli jazyku matematické teorie (její „abstraktní" stránce) a odvodili základní výsledky; že důkazy dokonce těch nejprostších, nejnaivnějších nebo nejatraktivnějších tvrzení mohou vyžadovat nové matematické postupy, k jejichž rozvinutí bude zapotřebí mnoho let práce a množství knih; a že porozumění matematické teorii není statický proces — je to něco, co neustále narůstá. V době, kdy si nemůžeme dovolit strávit celé století výstavbou mrakodrapu (jako tomu bylo ve středověku s katedrálami), je zřejmé, proč povolání (a pracovní místa) pro motivované matematiky jsou tak vzácná.

Můžeme říci, že jedním z hlavních rozdílů mezi matematiky a jinými vědci je skutečnost, že v jistém smyslu je jejich práce podřízena jiným časovým měřítkům. Nepřekvapuje, že pomalost a esoterická povaha matematické práce může velice brzy vyčerpat trpělivost těch spolupracovníků (nebo zaměstnavatelů), kteří si přejí mít rychlé a konkrétní odpovědi na své problémy. To je zhoršováno skutečností, že potenciální uživatelé nejsou vždy přesvědčeni o vhodnosti matematiky pro jejich speciální problém; a dokonce i když jsou o tom přesvědčeni, jejich zájem se obvykle omezuje na to, čeho může matematika dosáhnout cestou *bezprostředního dopadu*. Zdá se, že si neuvědomují, že výsledky jsou nerozlučně spojeny s matematickou konstrukcí jako celkem a že v matematice nelze provádět izolované „velké skoky kupředu", což je možné v jiných oborech lidské činnosti. Umělé rozlišování mezi čistou a aplikovanou prací, které vzniklo jako důsledek růstu počtu matematiků po druhé světové válce, pouze zdůraznilo, že „aplikovaná skupina" odtržená od hlavního proudu matematického vývoje nemůže dosáhnout dlouhodobého pokroku a že izolace v takovém „ekologickém zákoutí" odsuzuje skupinu ke zkostnatění a rozkladu.

II. Rozvíjení motivované matematiky

V první části tohoto článku jsme obhajovali potřebu *motivované matematiky*, která se jednak obrací na jiné obory, aby poskytly matematikům vědecké metafory, a jednak klade nové problémy, aby byly studovány čistými matematiky a později aplikovány. Nyní musíme zvážit, jak by taková práce mohla být co nejlépe podněcována a rozvíjena.

První možnost je povzbuzovat matematiky, aby užívali ve své práci rozličných přístupů, tj. aby se rozhlíželi po nových problémech v různých oborech vědy (motivovaná matematika), rozvíjeli nové matematické postupy (čistá matematika) a používali tyto postupy k hledání explicitních nebo numerických řešení „konkrétních" problémů (aplikovaná matematika).

Ovšemže není již snadné najít jednotlivé matematiky, kteří by byli schopni takového „eklekticismu" – je docela dobře možné, že von Neumann byl posledním z nich.

Soutěžení uvnitř rostoucí obce matematiků a současný důraz na poměrně krátkodobou *produktivitu* přirozeně vedly k rostoucí specializaci. Je stále obtížnější nespěchat a udržet si rozhled. Nicméně by se stále ještě daly vybudovat malé týmy složené ze tří až deseti matematiků, kteří by mohli společně obsáhnout všechny tři výše popsané stránky matematiky, *aniž by je kladli do nějaké hierarchie*.

Neměli bychom podceňovat psychologické problémy takové týmové práce, která vyžaduje vzájemnou snášenlivost, osobní skromnost a potlačení paranoidních sklonů, kterým vědci vděčí za své věčné mládí.

Mohlo by se také využít důležitého rysu kolektivní psychologie vědecké obce a povzbuzovat dobře známé „čisté" matematiky, aby přesunuli svůj zájem směrem k motivované (nebo aplikované) matematice a na základě své prestiže přilákali mladé talentované matematiky k tomuto novotářskému druhu výzkumu. Tento přístup (pokud by fungoval) by měl také výhodu, že by vyvinul (přátelský) tlak na matematiky, aby se podívali po zdrojích inspirace vně svého oboru.

Matematikové se tedy musí obrátit na vedoucí pracovníky výzkumných ústavů a vědeckých programů, aby navrhli nějaké institucionální prostředky umožňující sdružování matematiků a vědců s různými zájmy a schopnostmi; to by se nemělo dít podle nějakých tuhých procedurálních pravidel, ale spíše s jistým nádechem anarchie. To je nutné k rozšíření sítě výměny informací, ve které dochází k tajemnému početí vědeckých objevů. „Ideje" se patrně vyhýbají otevřeným prostorám, zkratkám a přímočarosti, daří se jim v podzemí, v temných a složitých bludištích, objevují se krátce (a vůbec příliš zřídka), když je nejméně očekáváme.

Co potřebujeme od řízení vědy, je pravidelné vyhodnocování výzkumu a rychlé rozšiřování výsledků, nikoli soustavné „plánování" vědy, které by si vyžadovalo nemožné: předpovědi toho, kdy a kde dojde k dalšímu průlomu. Mělo by se stát zřejmým, že matematickou obec (která potřebuje investice pouze do výpočetního zařízení a do všech prostředků komunikace) nelze řídit stejně jako administrativní nebo výrobní jednotku a takto postupovat by bylo opravdu nebezpečné.

Obhajoba motivovanější matematiky jde ruku v ruce s potřebou zvýšeného důrazu na historii matematiky. Někdy je nejvýš důležité umět vystopovat meandrující proud idejí zpět k jejich zdroji, zjistit, kde se rozvětvuje, a rozpoznat (případná) mrtvá ramena. K mnoha „zdržením" a „chybám" došlo prostě proto, že se ignorovaly dávno odložené „ideje". Matematická „idea" není dokonale propracovaný výtvor, nad kterým lze rozjímat jako nad obrazem v galerii. Je to žijící a vyvíjející se pohádková nestvůra, saň se sto hlavami a stejným počtem ocasů. A tak jako slepec z bajky objevil na příkladu slona, důvěrná obeznámenost s jednou nebo dokonce několika hlavami nestačí k identifikaci zvířete; je také nutno prozkoumat ocasy a všechno, co leží mezi hlavou a ocasem.

Mezi matematiky existuje mlčenlivá dohoda, že tyto nestvůry je třeba ukrýt před veřejností, které je dovoleno jen letmo zahlédnout některé z hezčích částí jejich těl; že je třeba hledat důkazy, které jsou co nejpřesnější a nejpřímější, přičemž zůstává skryta skutečná motivace a geneze díla; a že je možno sdílet skutečné pozadí pouze s přáteli v intimitě důvěrných setkání (matematického typu), tak podstatných pro pokrok vědy. Výsledkem všeho toho zakrývání je, že skutečný vývoj myšlenek se ztrácí a může být znovu odhalen pouze výzkumnou prací.*)

Může zde být určitá spojitost s paradoxem, který říká, že abstraktní vědění je lépe přenosné než konkrétní vědění (i když to první je nedostupnější a obtížnější k osvojení), protože může být sdíleno více osobami; konkrétní vědění lze pokládat v jistém smylu za jedinečné, a proto zajímá pouze omezenou skupinu lidí. Stupeň abstrakce určitého díla lze tedy považovat za určený rozsahem „matematického trhu", na němž se má uplatnit. Zde se dotýkáme některých citlivých otázek spojených s didaktikou matematiky, kde převládá tendence vyučovat stále „čistší a čistší" matematiku — vzhledem k jejímu univerzálnímu charakteru — a zároveň se vychází z předpokladu, že bude dost času ji aplikovat v budoucnosti, která však nejspíš nikdy nenastane.

Navíc pak požadavek, aby matematikové byli „produktivní", vede k předávání „nejpřímějších" a „nejjednodušších" důkazů výsledků, které byly původně získány způsobem, na který studenti svým chápáním ještě nestačí. Tento způsob výuky nevede k ničemu jinému než ke zmaření veškeré schopnosti „učit se hrou" a intuitivních (na rozdíl od logických) vloh studentů, které mohli původně mít. Vyučování určité teorie by asi mělo odrážet její historický vývoj, přičemž by se nemělo příliš prodlévat u jednotlivých etap, ale také by se tyto etapy neměly ignorovat. Pouze po takovém historickém úvodu by měli být studenti seznámeni s později vynalezenými zkratkami těchto křivolakých cest.

III. Jiné obory poskytují motivaci

Vytvořením názvu „motivovaná matematika" jsme v první části tohoto článku naznačili, že by matematikové měli více hledat motivace v jiných oborech, a v druhé části jsme podali některá doporučení pro rozvíjení motivované matematiky. Ale nejde o žádnou novinku: historie přírodních věd je bohatá na příklady užití matematických metafor ve fyzice a mechanice.

Podívejme se například na vývoj pojmu derivace funkce vytvořeného Fermatem, Leibnitzem a Newtonem v 17. století. Měli bychom se alespoň mimochodem

---

*) O tom podrobněji viz PMFA roč. *XXIII* (1978), str. 156—159.

zmínit, že Fermat objevil „Fermatovo pravidlo"*) pro polynomy a první variační model v optice. Takto se zrodil variační počet, jehož náplní byla optimalizace toho, co dnes nazýváme funkcionály, a který dodal fyzice mnohé z jejích základních modelů.

Euler a Lagrange si přizpůsobili myšlenku, jež byla skryta za Fermatovým pravidlem, a hledali řešení problémů variačního počtu mezi řešeními jistých parciálních diferenciálních rovnic (Eulerovy-Lagrangeovy rovnice).

Vypracování těchto matematických modelů se stalo výzvou pro matematiky a přinutilo je, aby se znovu zabývali obsahem pojmu *derivace*. Přesná definice podaná Cauchym byla zřejmě fundamentální, ale tím, že ji matematikové zmrazili a nechali ustrnout v této formě si v podstatě odřízli přístup k prostředkům pro řešení mnoha svých problémů. Laurent Schwartz určitě potřeboval hodně troufalosti k tomu, aby zavedl distribuce, které jsou obecnější než obyčejné funkce a přitom se dají neomezeně „derivovat". Co zůstalo zachováno, byla „idea" derivování; co se změnilo, byla formální definice derivace. To umožnilo řešit mnohé parciální diferenciální rovnice tak, že se řešení hledala spíše mezi distribucemi než mezi funkcemi. Ale ani tyto pokroky nestačily: variační počet a jedna z jeho současných odnoží, teorie optimálního řízení, neustále nutí matematiky, aby vymýšleli nové definice derivace (jako jsou subdiferenciály konvexních funkcí a jiné zobecněné gradienty) ve snaze dát nějaký smysl starému Fermatovu pravidlu v problémech stále rostoucí složitosti. Tyto postupy odvozené ze starého variačního počtu se nyní používají v mnoha ekonomických modelech, všude kde jsou relevantní...

Fyzika a mechanika nejsou jediné vědecké disciplíny, které poskytují matematikům motivace. Také ekonomové vždy hledali silné matematické metafory, které by jim pomohly porozumět fungování složitých ekonomických systémů. Před dvěma stoletími přišel Adam Smith s odvážnou myšlenkou (která zdánlivě odporovala intuici), že je možné řešit problém decentralizovaného rozdělení omezených zdrojů mezi spotřebitele bez ohledu na stav trhu a rozhodování jednotlivců. Protože mu chybělo lepší vysvětlení, jak je to možné (a dobré vysvětlení vlastně neexistuje dosud), zavedl poeticky znějící pojem „neviditelné ruky". Pak trvalo celé století než Leon Walras, původním povoláním technik, vyslovil myšlenku, že tato neviditelná ruka „působí" na účastníky směny prostřednictvím cen, přičemž má dostatek informací, aby bylo zaručeno, že jednotlivá rozhodnutí budou konzistentní, a že tedy podmínky plynoucí z omezenosti zdrojů budou splněny. Walras navrhl, aby se ekonomická rovnováha definovala jako řešení systému nelineárních rovnic*). V té době byly zkušenosti pouze s lineárními systémy a již skutečnost, že počet rovnic

*) Jde o tvrzení, že derivace funkce se anuluje v bodě jejího lokálního extrému.

*) Pojem ekonomické rovnováhy, za který vděčíme právě Walrasovi, není jedinou z jeho zásluh: Leon Walras byl první, kdo přišel s myšlenkou, že matematika by mohla být užitečná v ekonomické teorii. Originalita je často spíše otázkou nového způsobu nazírání na svět než otázkou objevů, které vzbudí pozornost vrstevníků. Walras zavedl matematickou přesnost do oboru, který nikdy předtím nebyl podrobně analyzován. Tím znevážil tehdejší převládající ekonomické myšlení a dostal se do opozice; musel překonat nesmírné těžkosti, protože zůstal sám a bez pomoci, bez povzbuzení a morální podpory kolegů. Učinil to proto, že byl v hloubi duše přesvědčen o dalekosáhlých důsledcích své odvážné vize.

byl roven počtu proměnných, vedla Walrase a jeho následovníky k optimistickému předpokladu, že řešení musí existovat.

Ale trvalo to celé další století, až do roku 1954, než Arrow a Debreu našli matematické řešení problému. Toto řešení ovšem nemohlo být získáno bez základní věty o pevném bodu, objevené v roce 1910 Brouwerem. To zase na oplátku vyvolalo řadu modifikací této věty, aby se dala použít na daný specifický případ; zejména bylo nutné vypracovat jisté matematické věty, jejichž předpoklady by se daly stejně dobře ekonomicky interpretovat jako jejich závěry. Nedávný pokrok nám nyní umožňuje sestrojit elegantní a jednoduché (elegantní, protože jednoduché) důkazy těchto výsledků.

Od té doby byla pro použití v ekonomické teorii doporučena a také různým způsobem vyzkoušena řada dalších matematických technik (diferenciální geometrie, nestandardní analýza, ...) – tento proces nadále pokračuje. Například statický charakter „obecného rovnovážného modelu" je zjevně neslučitelný s pozorovaným ekonomickým chováním, které ukazuje, že ceny se ve skutečnosti mění. Bystré, ale povrchní hlavy se snažily využít těchto nedostatků k tvrzení, že každý decentralizovaný mechanismus užívající cen jako základu pro rozdělování omezených zdrojů mezi ekonomické činitele je pouhou fantazií vysněnou vědci v jejich věžích ze slonoviny. Vedlo to až k popírání důležitosti matematických metafor pro ekonomiku.

To je typický příklad netrpělivosti a totalitářské touhy po monistickém vysvětlení. Ve skutečnosti se dá nyní sestrojit jiná matematická metafora, která se uplatňuje ve vývojovém kontextu, kde se ceny mohou měnit.

Matematikové ještě ani zdaleka neřekli své poslední slovo k tomuto problému. Ve skutečnosti toho řekli zatím velmi málo, zvláště vezmeme-li v úvahu velké úsilí, které bylo v tomto směru vynaloženo. Vědí však již, jak musí být skromní a trpěliví, jak deprimující je dosáhnout tak úzkého a omezeného porozumění po tak velké práci a kolik toho ještě zbývá vykonat ...

Nicméně na každém stupni tohoto dlouhého procesu zplodily jednoduše formulované otázky ekonomické teorie mnoho nových, matematicky zajímavých problémů a staly se kolébkou několika nových matematických teorií (konvexní analýza, nehladká analýza, nelineární analýza, atd.). Jeden z rozhodujících kroků v tomto oboru podnikl John von Neumann. Skutečnost, že tento významný matematik se zajímal o ekonomické otázky, jim propůjčila určitou věrohodnost a přivábila k tomuto oboru další známé matematiky. Úsilí vložené do důkazů výsledných vět nebylo ovšem promarněno, protože tyto věty se ukázaly užitečnými nejen v řešení ekonomických problémů, ale i v mnoha jiných oborech.

Matematické techniky motivované a využívané ekonomickou vědou, společenskými vědami a některými odvětvími biologie procházejí nyní základními změnami. Pozorné a důkladné zkoumání statického rámce bylo závazným, třebaže nedostatečným prvním krokem v těchto oborech a v řadě jiných oborů. Nástroje nutné pro tuto práci – matematické programování a teorie rovnováhy – jsou nyní vyvinuty a všeobecně používány, navíc mohou být zřejmě dále zlepšovány a přizpůsobovány pro řešení specifických problémů.

Ovšem systematické používání statických modelů – speciálně modelů matematického programování – v analýze velkých systémů, které bylo docela rozumné, dokud nebyly k dispozici žádné alternativní postupy, nelze nadále ospravedlňovat. Dokonce i pojem evoluce vypůjčený z Newtonovy mechaniky je pro tento účel příliš omezený. Vedl k zavádějícímu ztotožňování matematiky s *deterministickým* modelem skutečnosti, který implikuje, že *vývoj makrosystémů se dá předpovědět*. I kdybychom měli přijmout existenci deterministického mechanismu jako základu vývoje biologických, ekonomických a společenských makrosystémů, víme, že takové systémy jsou svou vnitřní povahou nestabilní — a z toho důvodu se skutečný výpočet příslušných trajektorií vymyká možnostem i těch nejdokonalejších současných počítačů. „Řídit" modely, které mají vestavěnou strukturální nestabilitu, nemůže vést k žádnému užitečnému cíli.

Aplikovatelnost dosavadních matematických technik na systémovou analýzu a příslušné modely, pokud nemají být přímo vzaty v pochybnost z čistě logických důvodů, měly by být přinejmenším přezkoumány ve světle našich zkušeností se studiem mechanických systémů. Newton potřeboval Keplera a Poincaré musel vynalézt kvantitativní analýzu, aby nám mohli poskytnout konzistentní model pro pohyb planet ... a nyní zjišťujeme, že některé z našich „dokonale deterministických" modelů mohou vykazovat všechny druhy rozličných trajektorií. Jde o „chaotické" systémy, jejichž stavový prostor je rozdělen na řadu buněk, kde každá buňka může být „navštívena" jakýmkoliv myslitelným způsobem přinejmenším jednou trajektorií, což skutečně znemožňuje jakékoliv předpovídání. Současně pak hledání matematických metafor v takových oborech, jako je mechanika (turbulence), fyzika, meteorologie, ekonomie a biologie, plodí nové pojmy jako „chaos" a „podivné atraktory".

Je nyní jasné, že zkoumání makrosystémů vyžaduje nedeterministický přístup, který bere v úvahu:

- naši neznalost budoucích vnějších podmínek systému (nebo nemožnost opakovat experimenty),
- absenci determinismu (včetně nemožnosti souhrnného popisu dynamiky systému),
- naši neznalost pravidel svazujících různé řídící zásahy se stavem systému,
- mnohotvárnost dynamiky, která může v systému fungovat,
- neexistenci nebo neznalost přesně definovaných činitelů, které svým rozhodováním řídí fungování systému,
- spojitý tok rozhodování a přizpůsobivých reakcí systému.

Nyní je dokonce možné najít matematické metafory toho, co je známo jako „darwinovský" vývoj a dát matematickou interpretaci výroku připisovanému Demokritovi: „Všechno, co existuje ve vesmíru, je dílem náhody a nutnosti". Vývoj tohoto typu se dá popsat pomocí „diferenciálních inkluzí" (s pamětí nebo bez paměti): jsou to takové dynamické systémy, pro něž v každém okamžiku závisí vektor rychlosti víceznačně na stavu (nebo historii) systému a popřípadě též na různých řídících zásazích. Do této kategorie patří též systémy, které konzumují omezené zdroje a (nebo) uchovávají je pro budoucí použití.

Nový přístup nazývaný *teorie životaschopnosti* používá metody výběru, při nichž volíme pouze takové trajektorie, které v každém okamžiku vyhovují jistým omezením známým jako *podmínky životaschopnosti*. Tato omezení určují ve stavovém prostoru určitou oblast nazývanou *obor životaschopnosti*; *životaschopné tra-*

jektorie jsou ty, které leží celé v oboru životaschopnosti. Obor životaschopnosti může záviset na času, současném stavu historie systému, na řídících zásazích atd.

Tento přístup dává explicitní nutné a postačující podmínky pro existenci alespoň jedné životaschopné trajektorie, která vychází z libovolného životaschopného počátečního stavu. Poskytuje také *zpětné vazby* (skryté v dynamice i v podmínkách životaschopnosti), které svazují stav systému s řídícími zásahy. Tyto zpětné vazby nejsou nutně deterministické: jsou to množinově hodnotová zobrazení, která každému stavu systému přiřazují *podmnožinu* řídících zásahů. Pozorujeme pak, že čím větší jsou tyto podmnožiny řídících zásahů, tím pružnější – a tedy také robustnější – bude řízení systému.

V systémech tohoto typu se mohou také objevovat „těžké trajektorie"; ty vznikají v případě, že řídící zásahy zůstávají po maximální možnou dobu konstantní a systém se podél nich vyvíjí s minimální rychlostí, pokud byl k tomu jednou donucen.

Stojí snad za to dotknout se jiného aspektu teorie životaschopnosti, který se týká složitosti a robustnosti. Ve shodě s teorií, stav systému se stává tím robustnějším, čím je vzdálenější od hranice oboru životaschopnosti. Proto po uplynutí určité doby zůstanou pouze ty části trajektorií, které jsou nejvzdálenější od hranice životaschopnosti. Tato skutečnost může vysvětlit zjevné nespojitosti („chybějící články", „rozkouskovaná rovnováha") a hierarchické uspořádání pozorované v jistých vyvíjejících se systémech.

Na závěr lze shrnout: *hlavním cílem teorie životaschopnosti je vysvětlit vývoj systému při dané možné dynamice a omezeních a odhalit skryté zpětné vazby, které umožňují řízení systému.* Takto lze například vysvětlit roli politického oportunismu, který umožňuje [buržoazně demokratickému společenskému] systému držet se těch životaschopných trajektorií, které jsou možné při absenci determinismu, tj. v situaci, kdy v každém okamžiku existuje několik různých přípustných vektorů rychlosti.

Alespoň v současné době patří tento typ teorie do oblasti motivované matematiky: je možné, že ještě stále neposkytuje ideální popis vývoje velkých systémů. Někteří potenciální uživatelé (ekonomové, biologové aj.) mohou být zklamáni nebo odrazeni dosavadními výsledky – to nepřekvapí, protože je stále ještě příliš brzy na to, aby se taková teorie mohla stát „aplikovanou" v inženýrském smylu. Avšak ať se již věci vyvinou jakkoliv, motivace poskytovaná studiem velkých systémů prospěje matematice tím, že oživí a obohatí teorii dynamických systémů a diferenciálních rovnic.

Přeložil Oldřich Kowalski

O autorovi

Jean-Pierre Aubin je profesorem na CEMERADE (Universita Paris-Dauphiné) a je zaměstnán na částečný úvazek v International Institute for Applied System Analysis (Laxenbourg, Rakousko).