

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

N. N. Bogoljubov; D. V. Širkov

Renormalizační grupa? To je velmi jednoduché

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 32 (1987), No. 5, 251--266

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/139832>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1987

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

- [8] GOMBÁS, P.: *Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik*. Basel, 1950 (existuje překlad do ruštiny: *Problema mnogich častic v kvantovoj mechanike*. Moskva, Izd. inostran. lit., 1953).
- [9] LYMAN, TH.: *Astrophys. J.* 60, 1 (1924).  
EDLÉN, B., ERICSON A.: *Nature (London)* 124, 688 (1929) *Z. Physik* 59, 656 (1930).  
EDLÉN, B.: *Nature (London)* 127, 405 (1930).
- [10] HARTREE, D. R.: *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 24, 89, 111 (1928).
- [11] SLATER, J. C.: *Phys. Rev.* 34, 1293 (1929).
- [12] HEISENBERG, W.: *Z. Physik* 38, 411 (1926); *ibid.* 39, 499 (1926).  
DIRAC, P. A. M.: *Proc. Roy Soc. (London)* A 112, 661 (1926).
- [13] FOCK, V. A.: *Z. Physik* 61, 126 (1930); *ibid.* 62, 795 (1930).  
SLATER, J. C.: *Phys. Rev.* 35, 210 (1930).
- [14] HEITLER, W., LONDON, F.: *Z. Physik* 44, 455 (1927).
- [15] DAVĀN, O. K.: *Kvantovaja chimija*. Gos. Izd. „Vysšaja škola“, Moskva, 1962.
- [16] SUGIURA, Y.: *Z. Physik* 45, 484 (1927).
- [17] HUND, F.: *Z. Physik* 40, 742 (1927); *ibid.* 42, 93 (1927).  
MULLIKEN, R. S.: *Phys. Rev.* 32, 186, 761 (1928).
- [18] CONDON, E. U.: *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.* 13, 462 (1927).
- [19] DIRAC, P. A. M.: *Proc. Roy. Soc. (London)* A 123, 714 (1929).
- [20] HÜCKEL, E.: *Z. Physik* 70, 204 (1931).
- [21] ROOTHAAN, C. C. J.: *Rev. Mod. Phys.* 23, 69 (1951).

## Renormalizační grupa? To je velmi jednoduché

*N. N. Bogoljubov, D. V. Širkov*

Akademik Nikolaj Nikolajevič Bogoljubov je sekretářem oddělení matematiky AV SSSR a ředitelem Spojeného ústavu jaderných výzkumů v Dubně. Vytvořil teorii nelineárních kmitů (společně s N. N. Krylovem), rozpracoval teorii konstrukce kinetických rovnic pro kvantové soustavy, vybudoval makroskopickou teorii supratekutosti a supravodivosti, rozvinul obecný aparát pro studium kvantových statistických soustav s degenerovaným vakuem, rozpracoval axiomatický přístup ke kvantové teorii pole, předložil první důkaz disperzních relací. Je laureátem Leninovy ceny (1958) a státních cen SSSR (1947, 1953), dvojnásobným hrdinou socialistické práce. Stal se členem mnoha zahraničních akademií. Je zakladatelem vědeckých škol v oblasti matematiky a teoretické fyziky. V časopisu *Priroda* uveřejnil článek s názvem *Význam základního výzkumu v jaderné fyzice* (1979, No 7). V srpnu roku 1984 se N. N. Bogoljubov dožil 75 let. Redakce a redakční rada časopisu blahopřejí Nikolaji Nikolajevičovi k jeho jubileu, přeji mu dobré zdraví a nové tvůrčí úspěchy.

Člen korespondent Dmitrij Vasiljevič Širkov je vedoucím sektoru Laboratoře teoretické fyziky Spojeného ústavu jaderných výzkumů. Jeho vědecké zájmy jsou spojeny s kvantovou teorií pole,

---

N. N. BOGOLJUBOV, D. V. ŠIRKOV: *Renormgrupa? Eto očeň prosto*. *Priroda* 8 (1984), 3–13. Přeložil M. BEDNÁŘ.

fyzikou elementárních částic a se statistickou fyzikou. Spolu s N. N. Bogoljubovem vybudoval axiomatickou poruchovou teorii v kvantové teorii pole a rozpracoval metodu renormalizační grupy, vytvořil schéma pro kvantitativní popis hadronových interakcí při nízkých energiích. Je autorem řady monografií, k nimž patří *Úvod do teorie kvantovaných polí* (spolu s N. N. BOGOLJUBOVEM); třetí vydání Moskva, 1976. Je laureátem Leninovy ceny (1958). V časopisu *Priroda* otiskl články *Rozvoj obecných idejí kvantové fyziky* (1979, No 7) a *Nové metody elektronických výpočetních strojů — analytické výpočty* (spolu s V. P. GERDEM; 1980, No 11).

V průběhu posledního desetiletí se termín „renormalizační grupa“ (nebo zkráceně renormgrupa) postupně mění z termínu původně úzce speciálního, používaného ve vědeckých pracích o teorii interakcí elementárních částic, na termín obecně fyzikální. Pojmy a metody renormgrupy, které vznikly před více než čtvrt stoletím v kvantové teorii pole — nejabstraktnější a moderní matematiky nejvíce používající oblasti teoretické fyziky, se nyní osvědčují v úlohách statistické mechaniky, teorie kritických jevů a v oblastech vzdálených od kvantového světa, jako jsou teorie turbulence plazmy, fyzika polymerů a teorie přenosu záření.

Aby bylo možné objasnit původ termínu, jenž se objevil v názvu článku, bude nutné uskutečnit nevelkou exkurzi do kvantové teorie pole a rovněž do jedné z oblastí matematiky — do teorie grup. Přitom se nám ovšem nepodaří obejít se bez několika jednoduchých formulí, které, doufejme, neodradí čtenáře.

## 1. Kvantová pole

Přídavné jméno „renormalizační“ vystihuje souvislost s normalizací (nebo renormalizací) — speciální procedurou používanou v kvantové teorii pole, jež je závěrečnou a nejsložitější kapitolou moderního kursu teoretické fyziky. Základním fyzikálním objektem této teorie je kvantové (někdy se též říká kvantované) pole; jde o specifickou směsici pojmů klasického pole elektromagnetického typu a pravděpodobnostního pole nerelativistické kvantové mechaniky. Podle současných představ je toto pole nejzákladnější a univerzální forma hmoty, tvoří základ všech jejích konkrétních projevů.

Jako příklad uvažujme všem známé elektromagnetické pole Faradayovo-Maxwellovo. V důsledku kvantování se potenciály klasického pole  $\mathbf{A}$  a  $\varphi$  (a rovněž tedy jeho intenzity  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$ ) stanou kvantovými operátory, které působí na vlnovou kvantově mechanickou funkci fyzikální soustavy. Lineární kombinace těchto polních operátorů jsou kreačními a anihilačními operátory kvant elektromagnetického pole — fotonů. Operátorové potenciály a intenzity splňují současně obyčejné elektrodynamické rovnice pohybu — Maxwellovy rovnice. Tak dojdeme ke kvantovému elektromagnetickému poli, které v sobě sjednocuje vlnové a korpuskulární vlastnosti elektromagnetismu.

Ke kvantovému poli lze dojít rovněž od částic. Kvantová mechanika dává pravděpodobnostní popis chování částice, například elektronu, pomocí vlnové funkce, která splňuje Diracovu rovnici. V důsledku kvantování přejde tato funkce v operátorové vlnové pole, které obsahuje kreační a anihilační operátory elektronů a pozitronů.

Takto se kvantové pole stává jediným fundamentálním objektem, jenž nahrazuje pole

a částice klasické fyziky. Jedno takové pole, definované v každém bodu čtyřrozměrného prostoročasu, popisuje všechny částice daného druhu ve vesmíru.

Koncepce kvantového pole umožňuje přirozeným způsobem popisovat soustavy s proměnným počtem částic a rovněž procesy přechodu jedněch částic na jiné. Elementárním aktem každé interakce je interakce několika polí v jednom bodu prostoročasu nebo v korpuskulárním jazyku lokální a okamžitý přechod jedněch částic v jiné. Co se týče obvyklých klasických sil, které působí mezi částicemi, lze říci, že vznikají jako druhotný efekt v důsledku výměny kvant pole, které přenáší danou interakci.

Počtení aparát kvantové teorie pole představuje relativistickou analogii kvantově-mechanické poruchové teorie. Metoda poruchové teorie předpokládá, že existuje nějaké zjednodušení výchozí úlohy na úlohu, která je řešitelná exaktně. Efekty, které se při takovém zjednodušení zanedbají, se považují za malé poruchy, jejichž postupné započtení umožňuje přiblížit se k přesnému řešení úlohy. Výchozí fyzikální situaci v kvantové teorii pole je systém navzájem neinteragujících polí. Na příklad v kvantové elektrodynamice (QED) vycházíme ze dvou volných polí – kvantovaného elektromagnetického pole a kvantovaného elektron-pozitronového Diracova pole. Elementárním aktem interakce v QED je emise (nebo pohlcení) fotonu elektronem nebo pozitronem, a rovněž vzájemná přeměna fotonu a elektron-pozitronového páru. Intenzita interakce v takovém elementárním aktu je charakterizována velikostí náboje elektronu  $e$ . Faktickým parametrem rozvoje v poruchové teorii v QED je bezrozměrný parametr – konstanta jemné struktury  $\alpha = e^2/4\pi\hbar c = 1/137$ .

## 2. Virtuální procesy. Polarizace vakua

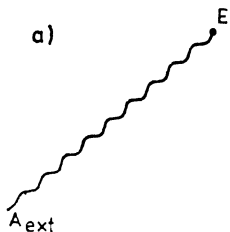
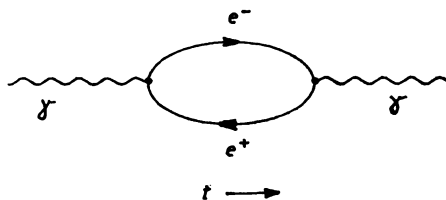
Podstatným rysem kvantové teorie pole a stejně tak i kvantové mechaniky je přítomnost virtuálních přechodů a virtuálních stavů. Kvantový systém, jenž prodělává přechody v důsledku interakcí, může se ocitnout na krátkou dobu  $\Delta t$  ve stavu, který je zakázán zákonem zachování energie. Stupeň narušení energie  $\Delta E$  je svázán s  $\Delta t$  proslulou Heisenbergovou relací neurčitosti

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar ,$$

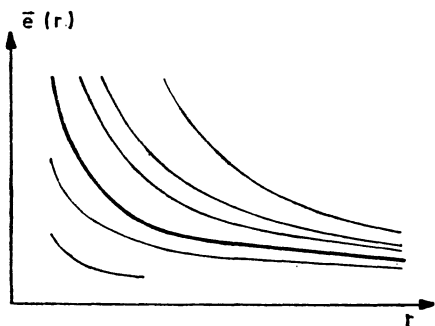
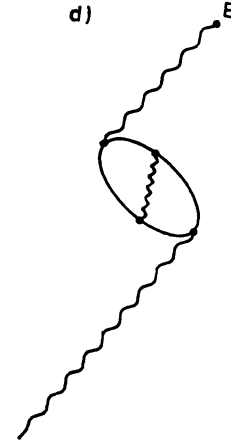
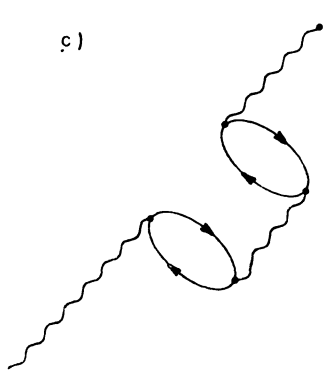
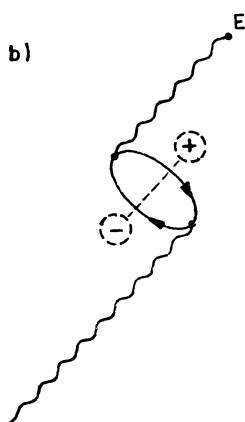
v níž  $\hbar = 1,0546 \cdot 10^{-34}$  Joule . s je Planckova konstanta. Takové intermediální stavy fyzikálních systémů, jež jsou v klasické mechanice zakázány, se nazývají virtuální a přechody mezi těmito stavy jsou tzv. virtuální přechody. Při virtuálních přechodech jsou splněny všechny zákony zachování až na zákon zachování energie (a možná i hybnosti). Ukazuje se např., že je možná virtuální přeměna kvanta elektromagnetického pole – fotonu na elektron-pozitronový pár:  $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$  a rovněž inverzní proces  $e^+ + e^- \rightarrow \gamma$ . Posloupnost takových na sebe navzájem navazujících virtuálních přechodů se obvykle zobrazuje grafickým schématem (viz obr. 1), které zobrazuje jeden z nejjednodušších Feynmanových diagramů v kvantové elektrodynamice. Tento proces se nazývá procesem polarizace vakua. Vede k řadě důležitých fyzikálních důsledků, k nimž patří i vznik pojmu efektivního náboje v kvantové teorii pole. Abychom to mohli objasnit, uvedeme klasickou analogii.

Nechť je do polarizovaného prostředí, jehož molekuly lze přirovnat k „malým čin-kám“ s opačnými elektrickými náboji na koncích, vnesen zvnějšku náboj  $Q$ . V důsledku

Obr. 1.  
Nejjednodušší diagram popisující efekt polariza-ce vakua v QED.



Obr. 2.  
Grafické zobrazení procesu měření náboje elektronu  $E$  pomocí vnější-ho pole  $A_{ext}$  se započtením efektů polarizace vakua.



Obr. 3.  
Chování efektivního náboje jako funkce vzdálenosti od elektronu ještě předtím, než je požadována korespondence k experimentu.

přitahování opačných nábojů se molekuly prostředí natočí tak, že náboj  $Q$  bude částečně odstíněn. V důsledku toho potenciál náboje  $Q$  na vzdálenosti  $r$  od něho nebude roven  $Q/r$ , což by platilo podle Coulombova zákona v nepřítomnosti prostředí, ale nějaké

menší hodnotě, kterou lze zapsat ve tvaru  $Q(r)/r$ , přičemž  $Q(r) < Q$ . Veličina  $Q(r)$  se nazývá efektivním nábojem ve vzdálenosti  $r$ . Pro menší vzdálenosti, tj. v blízkosti samotného náboje  $Q$ , veličina  $Q(r)$  vzrůstá a blíží se ke své „skutečné“ hodnotě  $Q$ .

V kvantové teorii pole úlohu „polarizovaného prostředí“ hraje vakuum, tj. prostor mezi mikročásticemi. Kvantově polní vakuum není fyzikální prázdnota. Je vyplněno vakuovými fluktuacemi – virtuálními částicemi. Toto kvantově polní vakuum lze přirovnat k zdánlivě rovnému povrchu vodní nádrže, o němž se při bližším zkoumání ovšem ukáže, že je zvrásněn chaotickými mělkými vlnami. Toto „vlnění“ – tzv. nulové kmity – je dobře známá vlastnost nejnižšího energetického stavu v kvantové mechanice. V QED nulové kmity sestávají v podstatě z elektron-pozitronových párů, které vznikají během krátkých časových intervalů a hrají úlohu elektrických „malých činek“.

Prozkoumáme vliv těchto fluktuací na proces měření náboje elektronu.

### 3. Efektivní náboj

Na obr. 2 jsou uvedeny Feynmanovy diagramy, popisující proces měření náboje elektronu, jenž je označen symbolem  $E$  (toto označení je zavedeno z toho důvodu, aby nevznikla nedorozumění, jde-li o samotný elektron nebo jeho elektrický náboj). Měření se uskutečňuje pomocí vnějšího elektromagnetického pole, které je reprezentováno vlnovkou. Diagram 2a odpovídá klasické představě, v níž nejsou zahrnuty vakuové fluktuace. Graf 2b odpovídá případu, kdy foton, který slouží k měření náboje, virtuálně disociuje na elektron-pozitronový pár, jenž vytváří efektivní dipól vyvolávající efekt stínění. Tento poslední proces sestává ze dvou elementárních aktů interakce, a proto jemu odpovídající příspěvek je úměrný malému součiniteli  $\alpha = 1/137$ . A právě tento příspěvek závisí na vzdálenosti. V oblasti vzdáleností od elektronu  $E$ , které jsou velmi malé ve srovnání s Comptonovou vlnovou délkou elektronu  $r_e = \hbar/mc \cong 3,8 \cdot 10^{-11}$  cm, je charakter závislosti na  $r$  popsán funkcí  $\ln r$ ; odpovídající příspěvek do měřeného náboje elektronu lze zapsat ve tvaru

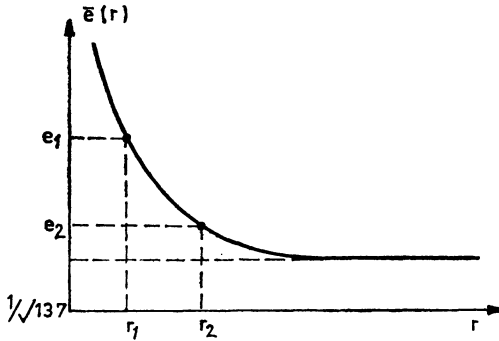
$$e \rightarrow e(r) = e \left\{ 1 - \frac{2\alpha}{3} \ln(r/r_0) + \dots \right\}.$$

Tečkami jsou v této formuli označeny příspěvky složitějších procesů polarizace vakua, které se podobají těm, jež odpovídají grafům 2c a 2d. Jejich příspěvky jsou úměrné druhé mocnině a vyšším mocninám konstanty jemné struktury  $\alpha$ .

Je důležité zdůraznit, že samotný fakt, že vzniká závislost měřeného náboje elektronu na vzdálenosti, má čistě kvantovou podstatu. Při zmenšování vzdálenosti hodnota efektivního náboje vzrůstá. Proto kvalitativní chování  $e(r)$  odpovídá klasickému stínění. Taková závislost je patrná z obr. 3 a je znázorněna několika křivkami. Každá z nich odpovídá možnému chování efektivního náboje  $e(r)$ , získaného na podkladě teoretických výpočtů ještě předtím, než je požadováno, aby teoretické hodnoty byly v korespondenci s hodnotami změřenými v experimentu. V obecném případě každá z křivek může být jednoznačně určena bodem v rovině, tj. vybrána volbou parametrů  $r_i$  a  $e_i$  tak, aby na vybrané křivce platilo  $e_i = \bar{e}(r_i)$ . Podmínka korespondence s Millikenovým experi-

mentem má specifický charakter  $\bar{e}(r \rightarrow \infty) = 1/\sqrt{137}$  (jsou uvažovány vzdálenosti  $10^{-13}$  cm a větší).

Možnost parametrizovat náboj dvojicí  $(r_i, e_i)$  vede k existenci zvláštní symetrie, která tvoří základ renormalizační grupy. Abychom to mohli ověřit, vrátíme se k obr. 3 a budeme předpokládat, že již byl udělán výběr jedné z křivek, a budeme pracovat v rámci nehmotné kvantové elektrodynamiky, tj. v takovém přiblížení, v němž hmota elektronu je nulová. Toto přiblížení je plně opodstatněno pro vzdálenosti, které jsou mnohem menší ve srovnání s Comptonovou vlnovou délkou elektronu  $r_e = \hbar/mc = 3,8 \cdot 10^{-11}$  cm. Efektivní náboj elektronu lze nyní popsat pomocí funkce dvou bezrozměrných argumentů  $r/r_i$  a  $e_i$ , tj. zapsat ji ve tvaru  $\bar{e}(r/r_i, e_i)$ . Uvažme nyní, že dvojice  $(r_i, e_i)$  může odpovídat libovolnému bodu již vybrané křivky. Vezměme dva libovolně zvolené body na této



Obr. 4. Možnost různých parametrizací elektrického náboje reálného fyzikálního elektronu.

křivce (viz. obr. 4) se souřadnicemi  $(r_1, e_1)$  a  $(r_2, e_2)$ . Je evidentní, že funkce  $\bar{e}$ , popisující danou křivku, může být parametrizována první a druhou dvojicí. Jinými slovy, pro libovolná  $r$  musí platit rovnost

$$\bar{e}(r/r_1, e_1) = \bar{e}(r/r_2, e_2),$$

přičemž je zřejmě  $e_2 = \bar{e}(r_2/r_1, e_1)$  a  $e_1 = \bar{e}(r_1/r_2, e_2)$ . Kombinací těchto vztahů dojdeme k funkcionální rovnici

$$\bar{e}(x, e) = \bar{e}(x/t, \bar{e}(t, e)).$$

Tato rovnice má grupové vlastnosti a tvoří základ matematického aparátu renormgrupové metody v kvantové teorii pole. Dříve než přejdeme k posouzení této její role, objasníme původ přívlastku „renormalizační“.

Především je třeba říci, že vztahy mezi různými hodnotami náboje  $e_i$  a funkcionální rovnice, podobné právě odvozené rovnici, byly získány v QED pomocí složitějších úvah založených na vlastnostech tzv. procedury renormalizace (resp. normalizace) používané při odstraňování ultrafialových divergencí. Protože tyto problémy nemají žádný přímý vztah k existenci symetrie, jež představuje základ grupových funkcionálních rovnic, nebudeme se zde zabývat detaily a omezíme se jen na krátkou poznámku.

Ve výchozích rovnicích QED vystupuje tzv. „holý“ náboj elektronu  $e_0$ . Jak bylo objasněno, pozorovaný náboj je funkcí vzdálenosti. Holý náboj odpovídá nulové vzdálenosti, takže  $e_0 = \bar{e}(0, e)$ . Tento vztah se obvykle zapisuje ve tvaru,

$$\alpha_i = Z_i \alpha_0$$

kde  $\alpha_i = e_i^2/4\pi$ ,  $\alpha_0 = e_0^2/4\pi$  a  $Z_i = \alpha_i/\bar{\alpha}(0, \alpha)$ . Konstanta  $Z_i$  odpovídá na otázku, jak se změní  $\bar{\alpha}$  při přechodu od nulové vzdálenosti ke konečné hodnotě  $r_i$ . Nazývá se konstantou renormalizace náboje a realizuje proceduru renormalizace. Uvedený vztah renormalizace náboje v QED je bohužel čistě formální v důsledku singulárního charakteru konstant  $Z_i$ . Nicméně jejich vztahy při různých hodnotách indexu  $i$  jsou konečné a umožňují získat grupově funkcionální vztahy.

#### 4. Renormgrupa v kvantové teorii pole

Existence speciální spojité grupy transformací v renormalizovatelné (tj. „zbavené“ ultrafialových divergencí) kvantové teorii pole, byla poprvé zjištěna v roce 1953 švýcarskými vědci Ernestem Stueckelbergem a André Petermanem. V následujících pracích publikovaných v letech 1954–55 (M. Gell Mann a F. Low; N. N. Bogoljubov a D. V. Širkov) byly tyto transformace, nazvané renormgrupové, explicitně zformulovány pomocí funkcionálních rovnic. V tomto výkladu se ovšem nebudeme přidržovat historického vývoje z důvodů, o nichž jsme pojednali na konci předchozí kapitoly.

Vrátíme se k obr. 4 a uvažujeme současně transformace dvou veličin, a to změnu měřítko vzdáleností s koeficientem  $\sqrt{t}$  a transformaci proměnné – náboje, jenž je popsán funkcí dvou proměnných  $\bar{e}(t, e)$ . V souladu s tradicí budeme namísto náboje uvažovat konstantu jemné struktury  $\alpha = e^2/4\pi$ , takže platí  $4\pi\bar{\alpha}(t, \alpha) = \bar{e}^2(t, e)$ . Nechť

$$T_t = \{r^2 \rightarrow r^2/t, \alpha \rightarrow \bar{\alpha}(t, \alpha)\}.$$

Poněvadž  $t = 1$  odpovídá identické transformaci, funkce  $\bar{\alpha}$  musí splňovat následující normalizační podmínku  $\bar{\alpha}(1, \alpha) = \alpha$ . Aby uvedené transformace  $T_t$ , charakterizované spojitym parametrem  $t$ , tvořily grupu, je nutné požadovat, aby platil kompoziční zákon  $T_t T_\tau = T_{t\tau}$ , tj. aby výsledek dvou po sobě následujících transformací charakterizovaných parametry  $t$  a  $\tau$  byl ekvivalentní působení nějaké třetí transformace, která odpovídá parametru  $t\tau$ . Je evidentní, že transformace změny škály vzdáleností tento požadavek splňují. Ovšem transformační zákon proměnné  $\alpha$  splňuje grupovou vlastnost pouze za předpokladu, že platí podmínka

$$\bar{\alpha}(t\tau, \alpha) = \bar{\alpha}(\tau, \bar{\alpha}(t, \alpha)),$$

na jejímž podkladě, pokud označíme  $\tau = x/t$ , dojdeme k funkcionální rovnici, která je ekvivalentní rovnici odvozené na konci předcházející kapitoly. Tím jsme vsuktu ukázali, že funkcionální rovnice pro efektivní náboj (nebo jeho kvadrát) má v QED grupovou vlastnost.

Lze ukázat, že funkce efektivního náboje  $\bar{\alpha}(r, \alpha)$  je v QED dána součinem  $\alpha$  a funkce  $d(r, \alpha)$ , která charakterizuje šíření fotonu (tzv. fotonový propagátor) se započtením efektů polarizace vakua patrně z obr. 2. V jiných modelech kvantové teorie pole s jednou vazbovou konstantou, např. v kvantové chromodynamice, lze rovněž zavést efektivní vazbovou konstantu  $\bar{g}(t, g)$ , jež splňuje tutéž funkcionální rovnici, která ovšem v obecném případě je mnohem složitějším objektem. Lze ji vyjádřit pomocí součinu vazbové konstanty, několika propagátorů různých částic, a rovněž (tzv. vrcholové) funkce,



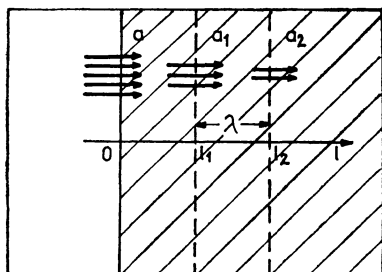
v níž jsou započteny kvantově polní korekce, tzn. efekty polarizace vakua, k elementárnímu aktu interakce.

Ukazuje se rovněž, že lze zobecnit zmíněné úvahy a funkcionální rovnice jednak na kvantově polní modely s několika vazbovými konstantami, jednak na případ, kdy jsou započteny nenulové hmoty částic. Tato zobecnění byla poprvé získána v pracích dříve uvedených autorů.

## 5. Renormgrupa v teorii přenosu

Ponecháme na chvíli stranou teoretické problémy fyziky mikrosvěta a pokusíme se pochopit podstatu renormgrupy transformací a zákona kompozice na příkladu jednodušší fyzikální situace.

Z toho důvodu se budeme věnovat tzv. rovinné úloze přenosu záření. Představíme si, že pravá polovina prostoru, ohraničená vertikální rovinou, je zaplněna homogenní hmotou a nalevo od hranice je vakuum. Nechť z tohoto vakua dopadá na rozhraní daný svazek



Obr. 5.  
Schéma přenosu záření z vakua (zleva) do poloprostoru zaplněného hmotou (rovinná úloha přenosu záření).

částic (fotonů, neutronů a pod.), jenž je charakterizován jejich počtem  $a$  (viz obr. 5). Všimneme si částic, jež se pohybují zleva napravo do vnitřku prostředí. Označíme symboly  $a_1$  a  $a_2$  počet částic, které jsou ve vzdálenostech  $l_1$  a  $l_2 = l_1 + \lambda$  od hranice rozmezí s vakuum. V důsledku homogenity prostředí je počet částic ve vzdálenosti  $l$  od rozhraní s vakuum jednoznačně určen hodnotou  $a$  toku na hranici a vzdáleností  $l$ , tj. je popsán nějakou funkcí  $A(l, a)$ . Přirozeně  $a_1 = A(l_1, a)$  a  $a_2 = A(l_2, a)$ . Veličinu  $a_2$  lze ovšem vyjádřit i jinak. Lze si totiž představit, že ve vzdálenosti  $l = l_1$  je umístěno rozhraní. Známe tok  $a_1$  na této pomyslné hranici a známe rovněž vzdálenost od ní  $\lambda$ . (V této úvaze je zcela nepodstatné, že za pomyslnou hranici je ve skutečnosti hmota.) Funkce  $a_2 = A(\lambda, a_1)$  pak prostě vyjadřuje počet částic ve vzdálenosti  $\lambda$  od toho místa, kde jejich počet byl roven  $a_1$ . Jestliže kombinujeme dvě různé definice  $a_2$  a užíváme-li vyjádření  $a_1$  pomocí funkce  $A$ , dostaneme funkcionální rovnici

$$A(l + \lambda, a) = A(\lambda, A(l, a)).$$

Poznamenejme, že podstata dopadajících částic (neutrony, fotony) a vlastnosti prostředí (absorbátor, zesilovač, nelineární rozptylovač, atd.) nejsou v naší formulaci úlohy důležité. Řešíme-li úlohu přenosu obvyklou metodou pomocí integrodiferenciální kinetické rovnice, dostaneme v každém takovém konkrétním případě explicitní tvar funkce  $A(l, a)$

(ačkoliv ve většině případů zřejmě nebude podáno řešení exaktní, ale jen přibližné). Avšak přesné řešení úlohy bude vždy splňovat uvedenou funkcionální rovnici, která obdobně jako zákon kompozice má grupovou podstatu. Je zřejmé, že to vše souvisí s grupovým charakterem transformací přechodu od libovolného bodu  $l$  uvnitř prostředí k jinému bodu  $l + \lambda$ :

$$T(\lambda) = \{l \rightarrow l + \lambda, a \rightarrow A(\lambda, a)\}.$$

Z formálního hlediska jsou navíc transformace  $T_t$  a  $T(\lambda)$  a funkcionální rovnice pro  $\alpha$  a  $A$  zcela ekvivalentní, poněvadž přejdou jedny v druhé při ztotožnění proměnných a funkcí:

$$l = \ln t, \quad \lambda = \ln \tau, \quad a = \alpha, \quad A(\ln t, \alpha) = \bar{\alpha}(t, \alpha).$$

Ukazuje se, že podobné rovnice lze získat pro širokou třídu různorodých úloh z mechaniky, hydrodynamiky, teorie turbulence plazmy, teorie kritických jevů a jiných oblastí fyziky. Vidíme tedy, že renormgrupové transformace z kvantové teorie polí jsou pouze speciálním případem zcela obecné třídy transformací, jež jsou charakteristické pro mnohé oblasti fyziky. Z důvodů, které objasníme později, je vhodné nazývat takové transformace transformacemi funkcionální podobnosti nebo funkcionální automodelity.

## RENORMGRUPOVÉ TRANSFORMACE

$$T_t = \{x^2 \rightarrow x'^2 t, \alpha \rightarrow \bar{\alpha}(t, \alpha) - \text{v kvantové teorii pole},$$

$$T(\lambda) = \{l \rightarrow l + \lambda, a \rightarrow A(\lambda, a) - \text{v teorii přenosu}.$$

### 6. Funkcionální automodelita

Termín „automodelový“ (jinak „sám sobě podobný“) se používá v úlohách hydrodynamiky a mechaniky plynů v souvislosti se zvláštním druhem transformací argumentů (souřadnic  $x$  a času  $t$ ) a funkcí (popisujících fyzikální charakteristiky a definovaných rovnicemi pohybu):

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = \xi x, \\ t &\rightarrow t' = \xi^a t, \\ f(x, t) &\rightarrow f'(x', t') = \xi^{bf} f(x, t). \end{aligned}$$

Tyto transformace, jak je vidět, závisí na jednom parametru  $\xi$  a jsou podobnostními transformacemi mocninného charakteru, které nepozměňují rovnice pohybu.

Praktický význam tohoto typu transformací záleží například v tom, že dokonce v případech, kdy nejsou známa přesná řešení, umožňují najít fyzikální modely a s pomocí neúplných modelů určit z experimentálního hlediska podstatné rysy skutečného řešení, např. charakter té nebo jiné singularity.

Aby bylo možné stanovit souvislost mezi touto obyčejnou automodelitou a nově zavedenou funkcionální, bude zapotřebí podívat se na řešení dříve uvedených funkcionálních rovnic. Jejich obecná řešení jsou známa – byla nalezena v polovině 50. let v rámci

kvantově polní renormgrupy. Tato řešení obsahují libovolné funkce a v takové obecnosti je zde uvádět nebudeme. Omezíme se pouze na ta řešení, jež jsou lineární v druhém argumentu, tj. na řešení typu  $\bar{\alpha}(t, \alpha) = \alpha f(t)$ . Dosazením tohoto výrazu do kompozičního zákona pro  $\bar{\alpha}$  snadno získáme rovnici pro novou funkci  $f(t)$ , a to  $f(t)f(\tau) = f(t\tau)$ . Obecným řešením této rovnice je libovolná mocnina argumentu:  $f(t) = t^k$ . V lineárním případě má tedy řešení funkcionální rovnice pro  $\bar{\alpha}$  tvar  $\bar{\alpha}(t, \alpha) = \alpha t^k$ , kde  $k$  je libovolné číslo. Využijeme-li toto řešení v transformaci  $\bar{\alpha} \rightarrow \alpha(t, \alpha)$ , snadno se přesvědčíme, že i všechny transformace  $T_i$  mají charakter transformací mocninné podobnosti. To znamená, že ve speciálním lineárním případě se funkcionální automodelita převede na výše uvedený zákon podobnosti. Lze proto tvrdit, že funkcionální automodelita je funkcionálním zobecněním obyčejné automodelity.

## 7. Podstata metody renormgrupy

Vyzbrojeni základními pojmy a představami renormgrupového přístupu, můžeme se věnovat přímo metodě renormgrupy. Abychom si objasnili, jaké úlohy se řeší touto metodou, připomeňme, že v teoretické fyzice se obvykle nepodaří získat přesná řešení rovnic, jež popisují více nebo méně složité modely. Takové rovnice, zvláště v kvantových úlohách, se obvykle řeší metodou postupných přiblížení, kdy dané řešení rozkládáme v řadu vzhledem k vhodnému malému parametru. V kvantové teorii pole je takovým parametrem vazbová konstanta nebo její kvadrát – veličina typu konstanty jemné struktury  $\alpha$  v QED, určující intenzitu interakce kvantových polí. Přibližná řešení jsou vyjádřena pomocí nevelkého počtu po sobě jdoucích členů poruchové řady a v některých případech se mohou zásadně lišit od přesných řešení. Taková situace vzniká obvykle v těch případech, kdy řešení nebo jeho derivace nabývá nulové nebo nekonečné hodnoty, přesněji, kdy řešení obsahuje singularitu.

Uvažujeme-li úlohy, jež mají vlastnost funkcionální automodelity, potom jejich přesná řešení obecně, a tedy i v okolí singularit, musí vyhovovat dříve již uvedeným funkcionálním rovnicím. Přibližná řešení poruchové teorie ovšem tuto vlastnost obvykle nemají.

Metoda renormgrupy řeší úlohu „vylepšení“ řešení poruchové teorie. Vycházíme-li z jednoho nebo druhého přibližného výrazu, získaného pomocí poruchové teorie, tj. výrazu, jenž je konečným polynomem ve vazbové konstantě, můžeme najít pomocí metody renormgrupy k tomuto výrazu „vylepšené“ řešení. Z jedné strany toto nové renormgrupové řešení splňuje podmínku funkcionální automodelity a je přesným řešením odpovídajících funkcionálních rovnic. Ze strany druhé, rozkládáme-li toto řešení do řady podle vazbové konstanty, lze získat výchozí přiblížení, odvozené z poruchové teorie, jež samotné ovšem nesplňuje podmínku automodelity.

Technickým prostředkem řešení této úlohy je využití grupových diferenciálních rovnic, které odpovídají funkcionálním rovnicím. Takové diferenciální rovnice lze získat, předpokládáme-li, že parametr  $\tau$  v rovnici  $\bar{\alpha}(t, \bar{\alpha}(\tau, \alpha)) = \alpha(t\tau, \alpha)$  je nekonečně blízký jedničce, tj. derivujeme tuto rovnici podle  $\tau$  v okolí hodnoty  $\tau = 1$ . Tento postup je možný díky tomu, že parametry renormgrupových transformací jsou spojité povahy. Takové spojité

grupy byly studovány asi před sto lety norským matematikem Sophusem Lie a nazývají se jeho jménem. Odpovídající diferenciální rovnice se obvykle nazývají Lieovými rovnicemi.

Metoda renormgrupy byla navržena, technicky rozpracována a efektivně použita ve fyzikálních úlohách určování tak zvaných ultrafialových a infračervených asymptotik kvantové teorie pole v souboru prací autorů tohoto článku v roce 1955. Podstatný příspěvek při formulaci a použití renormgrupy v QED byl vypracován A. A. Longunovem. Abychom nezatemnili výklad složitými formulami a pojmy kvantové teorie pole, budeme ilustrovat efektivnost metody renormgrupy na příkladu téže úlohy o přenosu záření.

Známe tvrzení v teorii Lieových grup říká, že spojitou grupu lze plně specifikovat pomocí transformací, jež jsou blízké k jednotkové (tj. identické) transformaci. V aplikaci na rovinnou úlohu přenosu záření to znamená, že stačí znát chování funkce v okolí hranice s vakuem (v matematickém jazyce derivaci podle  $l$  v bodu  $l = 0$ ). Budeme uvažovat dva konkrétní případy.

Nechť dochází v prostředí k pohlcování částic, jež je úměrné jejich počtu, přičemž pro  $l \ll 1$  je známo přibližné řešení poruchové teorie:

$$A_{PT}(l, a) \cong a - \nu a l.$$

Metoda renormgrupy založená na řešení Lieových rovnic, které obsahují právě toto přiblížení, dává potom „vylepšené“ řešení

$$A_{RG}(l, a) = a \exp(-\nu l).$$

Tato formule platí v celém poloprostoru zaplněném prostředím až do nekonečně velkých hodnot  $l$ . Užitečnost renormgrupového přístupu se projevila tím, že jsme využitím informace o chování řešení v malé oblasti hranice získali jeho explicitní vyjádření v celém nekonečném intervalu  $0 \leq l < \infty$ .

Předpokládáme nyní, že mechanismus pohlcení je spojen pouze s nelineárními efekty a koeficient pohlcení je úměrný toku částic, jež dosáhnou dané části prostředí. Fyzikálně to může znamenat např., že v důsledku srážky s částicí z toku se atom prostředí excituje a přejde do některého vzbuzeného stavu, přičemž v tomto vzbuzeném stavu je schopen pohltit nějakou jinou částici z původního toku v důsledku druhotné interakce. Potom v okolí hranice platí

$$A_{PT}(l, a) \cong a - \beta a^2 l,$$

přičemž poruchová teorie nám dá hodnotu pro číslo  $\beta$  (tj. koeficient absorpce  $\beta a$ ). V tomto případě metoda renormgrupy vede k řešení:

$$A_{RG}(l, a) = \frac{a}{1 + \beta a l},$$

jež má nyní charakter součtu geometrické řady. Získaný výsledek obdobně jako v předchozím případě platí v celém polonekonečném objemu prostředí a především popisuje asymptotické chování šířícího se toku pro  $l \rightarrow \infty$ .

Je třeba poznamenat, že tyto formule v teorii přenosu záření lze získat i jinými způsoby, např. řešením kinetické rovnice. Avšak právě popsaná metoda, využívající grupové diferenciální rovnice, je nejjednodušší. V řadě důležitých případů se navíc ukazuje, že

tato metoda tvoří jedinou možnost: její pomocí lze získat výsledky, kterých nelze dosáhnout jinak.

Právě taková je situace v nejpopulárnějších oblastech využívání metody renormgrupy: v kvantové teorii polí a v teorii fázových přechodů. Touto metodou se zde studují fyzikální situace, jimž odpovídají jedny nebo jiné singularity řešení rovnic s nekonečným počtem stupňů volnosti. V obdobných případech standardní metoda poruchové teorie, tj. rozklad řešení do mocninné řady podle malého parametru, buď neobsahuje singularitu vůbec, nebo naopak vede k singularitám odlišným od singularit přesného řešení.

Připomeňme si výraz pro absorpci částic v prostředí s nelineárními efekty. Pro velké vzdálenosti tento výraz klesá stejně rychle jako  $1/\beta l$ . Vrátime-li se k výchozímu výrazu poruchové teorie nebo rozložíme-li  $A_{RG}$  v mocninnou řadu vzhledem k hustotě počtu částic, dostaneme v každém jednotlivém řádu rostoucí výrazy typu  $l, l^2$ , atd. Je evidentní, že poruchová teorie kazí asymptotické chování, tj. charakter singularity řešení.

Obdobná je situace v QED. Např. při zvětšování vzdáleností jsou některá řešení kvantově polních pohybových rovnic úměrná výrazu  $(x^2)^{\nu}$ , kde  $\nu = 3\alpha/4\pi$  a  $x^2$  je kvadrát čtyřrozměrné vzdálenosti. Tuto singularitu řešení (nazývá se infračervená) lze popsat pomocí exponenciální funkce a rozložit ji do mocninné řady v konstantě jemné struktury  $\alpha$ :

$$(x^2)^{\nu} = \exp\left(\frac{3\alpha}{4\pi} \ln(x^2)\right) \simeq 1 + \frac{3\alpha}{4\pi} \ln(x^2) + \frac{9\alpha^2}{32\pi^2} \ln^2(x^2) + \dots$$

Z tohoto rozkladu je patrné, že namísto mocninné singularity se v jednotlivých členech poruchového rozvoje objevuje logaritmická singularita.

Lze proto tvrdit, že efektivnost metody renormgrupy je podmíněna tím, že tato metoda umožňuje konstruovat skutečnou strukturu singularity řešení, jež je v korespondenci s funkcionální automodelitou a jež není pokažena jako v poruchové teorii.

## 8. „Slabost silných interakcí“

Nejdůležitějším výsledkem kvantové teorie polí, který byl získán metodou renormgrupy, je fenomén asymptotické volnosti v teorii silných interakcí. Abychom mohli posoudit jeho význam, vrátíme se k pojmu efektivního náboje, resp. efektivní vazbové konstanty. V třetí části bylo objasněno, že graf s jednou uzavřenou smyčkou, zobrazený na obr. 2b, dává logaritmický příspěvek do efektivního náboje elektronu. Uvedenou formuli poruchové teorie lze zapsat ve tvaru

$$\bar{\alpha}_{PT}(x, \alpha) = \alpha + \frac{\alpha^2}{3\pi} \ln x, \quad x = r_a^2/r^2.$$

Je patrné, že uvedený výraz je až na číselný koeficient u druhého členu a záměnu proměnných ( $l \sim \ln x$ ,  $a \sim \alpha$ ) shodný s formulí z předcházející kapitoly pro pronikání toku do prostředí v nelineárním případě. Použití metody renormgrupy vede stejně jako v předchozím případě k součtu geometrické řady

$$\bar{\alpha}_{\text{RG}}(x, \alpha) = \alpha \left/ \left( 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln x \right) \right.$$

Poznamenejme, že získaný výraz z hlediska mocninné poruchové teorie sčítá nekonečnou posloupnost logaritmických příspěvků typu  $\alpha^{n+1}(\ln x)^n$ , které odpovídají iteracím jednosmyčkových grafů 2b, z nichž nejjednodušší je uveden na obr. 2c.

Kvalitativní chování efektivního náboje odpovídající získané renormgrupové formuli je na obr. 3 a obr. 4. Stejně jako formule z poruchové teorie odpovídá „normálnímu“ stínění, kde efektivní náboj klesá na rostoucích vzdálenostech. Uvedená formule byla odvozena v polovině 50. let. Protože číselný koeficient u logaritmu v této formuli je malý, samotná formule neměla dlouho žádný praktický význam. V posledních letech se ovšem situace změnila. V průběhu experimentů, v nichž byly hledány intermediální vektorové bosony  $W^\pm$  a  $Z^0$  se podařilo dosáhnout vzdáleností řádově  $10^{-16}$  cm. Na těchto vzdálenostech efektivní konstanta jemné struktury vzroste asi o 7% a je rovna  $\bar{\alpha}$  ( $10^{-16}$  cm)  $\simeq \simeq 1/128$ . Tento výsledek lze získat pomocí formule pro vakuové stínění, v níž spolu s efekty virtuálních elektron-pozitronových párů jsou započteny rovněž příspěvky virtuálních procesů s jinými nabitými částicemi,  $\mu$ -mezony a kvarky. Započtení těchto příspěvků změní číselný koeficient u logaritmu ve jmenovateli. V současnosti dosažená experimentální přesnost ovšem nestačí k tomu, aby bylo možné bezprostředně zaregistrovat efekty vakuového stínění elektrického náboje. Nicméně nedávno bylo dokázáno (D. Ju. Bardin, JINR, Dubna), že přesnost experimentů, o nichž se předpokládá, že budou realizovány v nejbližších 2–3 letech, bude dostatečná, aby bylo možné pozorovat takové efekty.

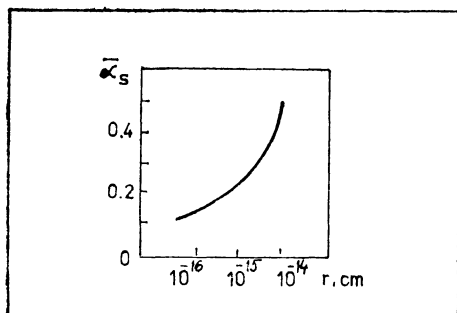
Obdobné formule získané pomocí renormgrupy platí i v jiných kvantově polních modelech. Počátkem 70. let se ve fyzice mikročástic objevila nová kvantově polní teorie silných interakcí elementárních částic – kvantová chromodynamika (QCD). Svou obecnou strukturou je QCD blízká QED. Obsahuje rovněž dva typy kvantových polí – pole částic s poločíselným spinem (kvarků) a pole částic se spinem jedna (gluonů), jež přenášejí interakce mezi kvarky. Intenzita interakce v QCD je popisována jednou vazbovou konstantou  $g$ , jejíž bezrozměrný kvadrát  $\alpha_s = g^2/4\pi\hbar c$  je analogem konstanty jemné struktury v QED.

Efektivní náboj v QCD  $\alpha_s$  se zavádí na podkladě renormgrupových představ a jeho konkrétní výpočet je uskutečněn v rámci dříve zmíněného schématu, tj. pomocí poruchové teorie, která byla zdokonalena metodou renormgrupy. Takové vypočty, provedené v roce 1973 americkými teoretiky D. Grossem, F. Wilczekem a D. Politzerem, vedly k objevu pozoruhodné vlastnosti efektivního náboje silných interakcí  $\bar{\alpha}_s(r)$ . Ukázalo se, že je popisován vzrůstající funkcí vzdálenosti! Jeho chování pro malá  $r$  je popsáno formulí:

$$\bar{\alpha}_s(r, \alpha_s) = \frac{\alpha_s}{1 + \alpha_s \beta(r_N/r)}, \quad \beta > 0.$$

Číselná hodnota  $\alpha_s$ , odpovídající vzdálenostem řádově comptonovské vlnové délky nukleonu  $r_N \simeq 10^{-14}$  cm, je dána veličinou přibližně rovnou 0,5. Číselný koeficient  $\beta$  je blízký jednotce (viz obr. 6).

Při zmenšování vzdálenosti  $r$  se efektivní náboj  $\bar{\alpha}_s$ , tedy rovněž zmenšuje a v limitě  $r \rightarrow 0$  se stává nulovým stejně jako  $1/\ln(1/r)$ . Tento jev „vypnutí“ interakce na malých vzdálenostech byl nazván asymptotickou volností.



Obr. 6.  
Kvalitativní chování efektivního náboje kvantové chromodynamiky  $\bar{\alpha}_s$  jako funkce vzdálenosti  $r$  pro  $\leq 10^{-14}$  cm.

Teoreticky dokázaný jev asymptotické volnosti umožnil kvalitativně pochopit tzv. partonovou představu o struktuře nukleonů na malých vzdálenostech. Tato představa, zformulovaná na podkladě experimentálních objevů z konce 60. let, vede k tomu, že na malých vzdálenostech – řádově  $10^{-14}$  cm a méně – proton „vypadá“ jako sypká struktura, obsahující masivní konstituenty, nazvané partony. (Dnes víme, že partony jsou kvarky a gluony.) Na velkých vzdálenostech se partony neprojevují, a proton si lze představit jako protáhlý objekt o velikosti  $10^{-13}$  cm, v jehož vnitřku je spojitě rozložena hmota.

Právě tato představa vyplývá z renormgrupové formule asymptotické volnosti. Ta vysvětluje rychlé zmenšení efektivního náboje od hodnot řádově jedna při  $r \approx 10^{-13}$  –  $10^{-14}$  cm až po hodnoty řádově  $1/5$  při  $r \approx 10^{-15}$  –  $10^{-16}$  cm. Svého času právě tento výsledek byl rozhodujícím fyzikálním argumentem ve prospěch kvantové chromodynamiky jako kvantově polního modelu silných interakcí.

#### FORMULE PRO VAKUOVÉ STÍNĚNÍ V KVANTOVÉ ELEKTRODYNAMICE:

$$\bar{\alpha}(r, \alpha) = \frac{\alpha}{1 - \frac{2}{3\pi} \alpha \ln(r_0/r)}$$

#### FORMULE PRO ASYMPTOTICKOU VOLNOST V KVANTOVÉ CHROMODYNAMICE:

$$\bar{\alpha}_s(r, \alpha_s) = \frac{\alpha_s}{1 + \alpha_s \beta \ln(r_N/r)}$$

$$\alpha_s \approx 1/2, \quad r_N \approx 10^{-14} \text{ cm}, \quad \beta = \frac{33 - 2f}{6\pi},$$

kde  $f$  je počet různých druhů kvarků, pro něž je Comptonova délka mnohem větší než  $r$ .

## 9. Velké sjednocení interakcí

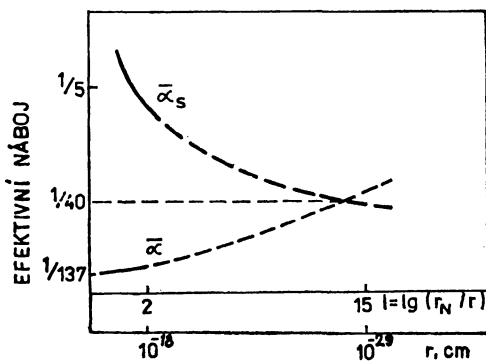
Asymptotická volnost posloužila jako odrazový můstek i pro další smělou hypotézu – velké sjednocení interakcí. Podle této hypotézy je příroda při supervysokých energiích charakterizována vysokým stupněm symetrie, takže prakticky mizí rozdíly mezi různými typy elementárních částic. Při takových energiích (nebo při extrémně malých vzdálenostech, což je totéž) jsou částice vázány jedinou interakcí. Při nižších energiích se stupeň symetrie v organizaci hmoty snižuje a jediná interakce se „rozpadá“ na tři větve, které se projevují různými vlastnostmi. Nazýváme je základními interakcemi – silnou, elektromagnetickou a slabou.

Budeme-li mluvit poněkud přesněji, potom musíme říci, že fundament velkého sjednocení tvoří dva výsledky získané metodou renormgrupy:

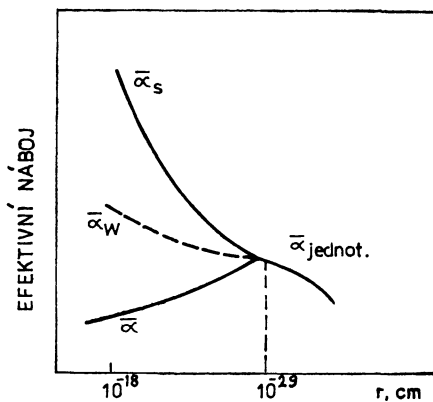
1. formule pro vakuové stínění QED (pro vzrůstající efektivní náboj QED při  $r \rightarrow 0$ ), jež adekvátním způsobem započítává efekty polarizace elektromagnetického vakua, které vznikají v důsledku „rození párů“ různých nabitých částic;

2. formule asymptotické volnosti pro klesající efektivní náboj QCD při  $r \rightarrow 0$ .

Modely velkého sjednocení vycházejí ze smělé extrapolace těchto výsledků od vzdáleností řádově  $10^{-14}$ – $10^{-16}$  cm, jež jsou dostupné v současných experimentech, do mnohem menších vzdáleností řádově  $10^{-28}$ – $10^{-29}$  cm. Při přechodu k těmto vzdálenostem zeslábnou silné interakce v důsledku asymptotické volnosti natolik, že jsou podle intenzity srovnatelné s pomalu vzrůstající elektromagnetickou interakcí (viz obr. 7). Srovnáme-li efektivní náboje QED a QCD, dospějeme k závěru, že k tomu může dojít v prostorových oblastech  $r_* \approx 10^{-29}$  cm. Tato skutečnost ovšem nemusí nic znamenat; pokud by idea velkého sjednocení neodpovídala skutečnosti, potom formule



Obr. 7. Možné kvalitativní chování efektivního náboje kvantové chromodynamiky  $\bar{\alpha}_s$  a efektivního náboje kvantové elektrodynamiky  $\bar{\alpha}$  na vzdálenostech, jež jsou mnohem menší než  $10^{-14}$  cm. Existence průsečíku extrapolovaných křivek při  $r_* \approx 10^{-29}$  cm se stala odrazovým můstkem pro hypotézu velkého sjednocení.



Obr. 8. Hypotetické schéma sjednocení tří interakcí: silné (s efektivním nábojem  $\bar{\alpha}_s$ ), elektromagnetické ( $\bar{\alpha}$ ) a slabé ( $\bar{\alpha}_w$ ) — na vzdálenostech  $r \sim 10^{-29}$  cm a menších.



pro vakuové stínění v QED a asymptotické volnosti v QCD vyjadřují dvě zcela různé fyzikální skutečnosti. V tom případě se efektivní náboje QED a QCD náhodně shodují v bodu  $r_*$  a při ještě menších vzdálenostech budou opět rozdílné.

Hypotéza velkého sjednocení vychází z představy, že taková shoda není náhodná a že v oblasti  $r < r_*$  se mechanismy silné a elektromagnetické interakce (a rovněž slabé interakce, kterou jsme neuvažovali proto, aby výklad byl co nejjednodušší) podstatně mění. Ztrácejí svou individualitu, stávají se pouze částí jediné interakce s vazbovou konstantou řádově  $1/40$  (viz obr. 8). Mechanismus sjednocení interakcí je založen na předpokladu existence supertěžkých částic s hmotami  $m_*$ , určenými vzdáleností  $r_*$ , podle známého kvantově mechanického vztahu  $m_* = \hbar/cr_* \simeq 10^{14} \text{ GeV}/c^2$ . Tyto hypotetické částice, leptokvarky, doplňují rodinu známých vektorových částic – fotonů, gluonů,  $W$ - a  $Z^0$ -bosonů, jež přenášejí interakce. Pokud leptokvarky existují, musí na vzdálenostech  $r \leq r_*$  být dovoleny přechody mezi kvarky a leptony, tj. přeměny jedněch v druhé. Objevuje se možnost rozpadu protonu na lehké částice, např. rozpad  $p \rightarrow e^+ + \pi^0$ . Při obvyklých energiích je pravděpodobnost vzájemných přechodů kvarků a leptonů velmi malá, takže proton je prakticky stabilní částicí. Modely velkého sjednocení umožňují odhadnout možný poločas rozpadu protonu. Odhadnutá hodnota je řádově  $10^{31} - 10^{32}$  let. Pozorování tak řídkých událostí je na hranicích současných experimentálních možností. Doposud ovšem žádná přesvědčivá svědectví ve prospěch existence takových rozpadů nebyla zjištěna. Možná, že modely velkého sjednocení přistupují poněkud primitivně k řešení pozoruhodné myšlenky sjednocování sil v přírodě.

## 10. Závěr

Pokusili jsme se poskytnout představu o podstatě jedné z nejeftivnějších metod současné teoretické fyziky a doufáme, že čtenář, jenž se dopracoval až do konce, může nyní říci o renormgrupě slova Piera Bezuchova: „Jak je to jednoduché a jasné ... Jak se mohlo stát, že jsem o tom nevěděl již dříve?“ Omezený rozsah nedovolil zastavit se u různorodých, fyzikálně důležitých aplikací metody renormgrupy v teorii kritických jevů, teorii turbulence plazmy a ve fyzice polymerů, jež byly připomenuty v úvodu našeho pojednání. Úplnost výkladu fyzikálních výsledků metody nebyla původně plánována. Základním cílem článku bylo sejmutí příkrovu tajemnosti, a proto jsme se věnovali tak poměrně jednoduché – z hlediska formulace – fyzikální úloze, jakou je přenos záření.

Nicméně poznamenáme, že v uvedených třech oblastech teoretické fyziky, jež jsou vzdáleny od fyziky mikrosvěta i od problémů přenosu záření, se používají renormgrupové metody založené na grupových transformacích uvedeného typu. Jejich výpočetní aparát je tam přímo převzat z metody renormgrupy v kvantové teorii pole a v podstatě se opírá o proceduru a formule, jež byly námi zformulovány v roce 1955.

Pozoruhodný fakt obecnosti teoretického popisu navzájem vzdálených fyzikálních jevů názorně demonstruje užitečnost používání matematických abstrakcí ve fyzice, jejich všeobšáhly charakter, který ilustruje jednotu přírody a zvláštnosti procesu jejího poznávání.